

嘉義市第 37 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：「和」而為「1」

關鍵詞：一次聯立方程式、三角形數

編號：

51	105	50	105	50	94	39	94	39	83	28	83	28	72	17	72	17	61	1	61
106	51	105	50	95	40	94	39	84	29	83	28	73	18	72	17	62	7	61	1
51	106	49	95	40	95	40	84	29	84	29	73	18	73	18	62	7	62	7	60
106	49	104	49	95	40	93	38	84	29	82	27	73	18	71	16	62	7	60	2
52	104	49	104	41	93	38	93	38	82	27	82	27	71	16	71	16	63	2	60
107	52	104	41	96	41	93	38	85	30	82	27	74	19	71	16	63	8	63	2
52	107	48	96	41	96	37	85	30	85	30	74	19	74	19	70	8	63	8	59
107	48	103	48	96	37	92	37	85	30	81	26	74	19	70	15	70	8	59	3
53	103	48	103	42	92	37	92	31	81	26	81	26	75	15	70	15	64	3	59
108	53	103	42	97	42	92	31	86	31	81	26	75	20	75	15	64	9	64	3
53	108	47	97	42	97	36	86	31	86	25	80	20	75	20	69	9	64	9	58
108	47	102	47	97	36	91	36	86	25	80	25	80	20	69	14	69	9	58	4
54	102	47	102	43	91	36	91	32	81	25	80	21	76	14	69	14	65	4	58
109	54	102	43	98	43	91	32	87	32	81	21	76	21	76	14	65	10	65	4
54	109	46	98	43	98	35	90	32	87	24	79	21	76	13	68	10	65	10	57
109	46	101	46	98	35	90	35	90	24	79	24	79	13	68	13	68	10	57	5
55	101	46	101	44	99	35	90	33	88	24	79	22	77	13	68	11	66	5	57
110	55	101	44	99	44	99	53	88	33	88	22	77	22	77	11	66	11	66	5
55	110	45	100	44	99	34	89	33	88	23	78	22	77	12	67	11	66	6	56
110	45	100	45	100	34	89	34	89	23	78	23	78	12	67	12	67	6	56	6

作品名稱：「和」而為「1」

摘要：

「在 4×4 方格表的16個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為1（註：兩個相鄰的方格恰有一個共同的邊）。試求此 4×4 方格表的16個方格中的數之總和。」這樣的表填得出來嗎？（有解嗎？）表中16個數的總和是多少呢？

一個看起來不是很難的題目，但是令人驚訝的是，這樣的表有許多填法，但是只要填得正確，表中16個數的總和都一樣，只有一個答案。

若依此類推， 6×6 、 8×8 、 10×10 、……、 20×20 方格表填得出來嗎？（有解嗎？）表中所有數的總和又是多少呢？答案是形成一個規則的數列—2倍的「三角形數」。是不是很特別呢？

在這件作品中，我們解出 2×2 、 4×4 、 6×6 、 8×8 、 10×10 的方格表中，所有數的總和，並預測 12×12 、 14×14 、……、 20×20 等偶數階方格表中，所有數的總和的答案。（奇數階方格表是無法填出來的）

壹、研究動機：

我很喜歡像數獨類的填數問題，因為可以訓練腦力。話說寒假時，我遇到一個像數獨的填數問題：「在 4×4 方格表的16個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為1（註：兩個相鄰的方格恰有一個共同的邊）。試求此 4×4 方格表的16個方格中的數之總和。」

要填出這樣的表並不困難，我沒一會兒就填好了，重點是那個「和」的答案。這道題若由兩個不同的人填出不同但都正確的表，那兩個表中所有數的總和相等嗎？或是這個表就只有一種填法呢？這使我覺得很好奇，剛好，老師說要做科展，所以我決定把這道題目作為科展研究的主題，好好地延伸探究下去。

貳、研究目的：

一、探討原問題的解法？

二、可將 4×4 的方格表向下或向上延伸嗎？

例如：當 n 是大於1的任意自然數時， $n \times n$ 方格表一定可解嗎？

表內所有數的總和是多少呢？若不能， n 等於那些數時有解？ n 等於那些數時又無解呢？

參、研究器材與設備：

計算紙、方格紙、黑色棋子、人腦、挑戰的心。

肆、研究過程與方法：

一、探討原問題的解法？

首先我們就把這個問題當作是數獨遊戲去填，將一些簡單的數如0、1、-1、2、 $\frac{1}{2}$ 、

$-\frac{1}{2}$ 等填到格子裡，依題意再去調整位置和數值，例如以下就是一些填法：

1	0	0	1
1	0	0	1
0	0	0	0
0	1	1	0

-1	1	1	-1
0	1	1	0
1	-1	-1	1
2	0	0	2

0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

每個表中，所有數的總和都是 6。

二、可將 4x4 的方格表向下或向上延伸嗎？

例如：當 n 是大於 1 的任意自然數時， $n \times n$ 方格表一定可解嗎？

表內所有數的總和是多少呢？

若不能， n 等於那些數時有解？ n 等於那些數時又無解呢？

(一)探討：在 2×2 方格表的 4 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1。試求此 2×2 方格表中的數之總和。

2×2 方格表：

0	1	0.5	0.5
0	1	0.5	0.5

或

表中，所有數的總和都是 2。

(二)探討：在 3×3 方格表的 9 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1。試求此 3×3 方格表中的數之總和。

當我們按照類似的方法去填 3×3 的方格表，發現不管如何調整都無法得到答案，經過我們討論後，才發現是不可能有的。

[說明]：先將 3×3 的方格表設定為 A 格，...到 I 格，

A	B	C
D	E	F
G	H	I

依題意可知：B 格+D 格=1；且 H 格+F 格=1

故可推得 B 格+D 格+H 格+F 格=1+1=2，與題目矛盾，因此無解。

(三)探討：在 4×4 方格表的 16 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1。試求此 4×4 方格表中的數之總和。

代數解法：

	a		
1-a		b	
	-b		

→

	a		1-a-b
1-a		b	
	-b		
a+b			

→

	a		1-a-b
1-a		b	
	-b		a
a+b		1-a	

得到一般解：

1-x-y	a	x	1-a-b
1-a	y	b	1-x
x	-b	-y	a
a+b	1-x	1-a	x+y

表中，所有數的總和都是 6。

(四)探討：在 5×5 方格表的 16 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1。試求此 5×5 方格表的 25 個方格中的數之總和。

[說明]：

依題意可知，粉紅色格子中的數的和為 1

→橘色格子中的數的和為 0

→黃色格子中的數的和為 1

→綠色格子中的數的和為 0，此與題意相互矛盾，故無解。

5×5 方格表無法填得

(五)探討：在 6×6 方格表的 16 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1。試求此 6×6 方格表的 36 個方格中的數之總和。
填數解之 1

0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0

表中，所有數的總和為 12。

代數解法：

	a				
1-a		-b			
	b				

→

	a		1-a+b		
1-a		-b			
	b				
a-b					

	a		1-a+b		
1-a		-b			
	b		c		
a-b		-c			

→

	a		1-a+b		
1-a		-b		a-c	
	b		c		
a-b		-c			
	c-a				

	a		1-a+b		c-b
1-a		-b		a-c	
	b		c		
a-b		-c			
	c-a				
1+b-c					

→

	a		1-a+b		c-b
1-a		-b		a-c	
	b		c		1+a-b
a-b		-c			
	c-a				
1+b-c		a-b			

	a		1-a+b		c-b
1-a		-b		a-c	
	b		c		1+a-b
a-b		-c		-b	
	c-a		b		
1+b-c		a-b			

	a		1-a+b		c-b
1-a		-b		a-c	
	b		c		1+a-b
a-b		-c		-b	
	c-a		b		a
1+b-c		a-b		1-a	

一般解：

1+y-z	a	x-y	1-a+b	1-x	c-b
1-a	z-x	-b	y	a-c	x
x-y	b	1-z	c	-y	1+a-b
a-b	y	-c	z	-b	1-x+y
1-x	c-a	-y	b	x-z	a
1+b-c	x	a-b	1-x+y	1-a	z-y

表中，所有數的總和為12。

(六)探討：在 7×7 方格表的49個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為1。試求此 7×7 方格表的49個方格中的數之總和。

[說明]：

依題意可知，粉紅色格子中的數的和為1

- 橘色格子中的數的和為 0
 - 黃色格子中的數的和為 1
 - 綠色格子中的數的和為 0
 - 藍色格子中的數的和為 1
 - 深藍色格子中的數的和為 0，此與題意相互矛盾，故無解。
- 7×7 方格表無法填得

(七)探討：在8×8方格表的64個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為1。試求此8×8方格表中的數之總和。
填數解之 1

1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0

表中，所有數的總和為 20。

(八)探討：在9×9方格表的81個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為1。試求此9×9方格表中的數之總和。
[說明]：

依題意可知，粉紅色格子中的數的和為 1

- 橘色格子中的數的和為 0
 - 黃色格子中的數的和為 1
 - 綠色格子中的數的和為 0
 - 藍色格子中的數的和為 1
 - 深藍色格子中的數的和為 0
 - 紫色格子中的數的和為 1
 - 灰色格子中的數的和為 0，此與題意相互矛盾，故無解。
- 9×9 方格表無法填得

(九)探討：在10×10 方格表的 100 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1。試求此10×10 方格表的 100 個方格中的數之總和。

填數解之 1

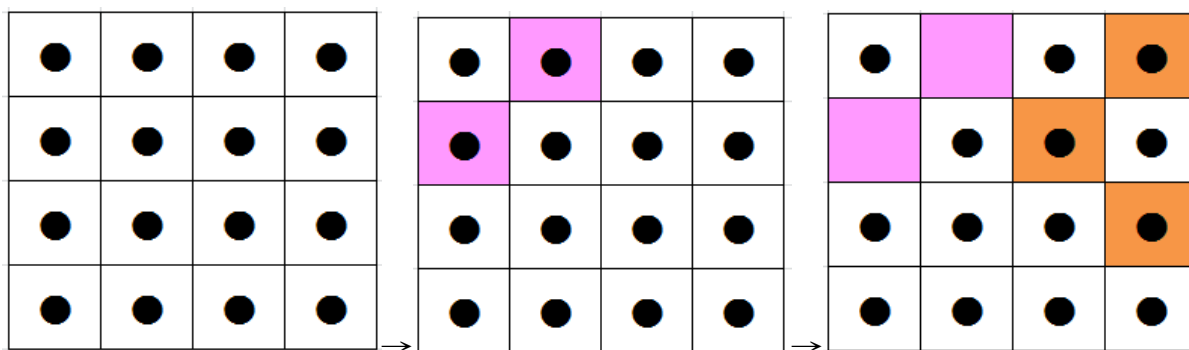
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

表中，所有數的總和為 30。

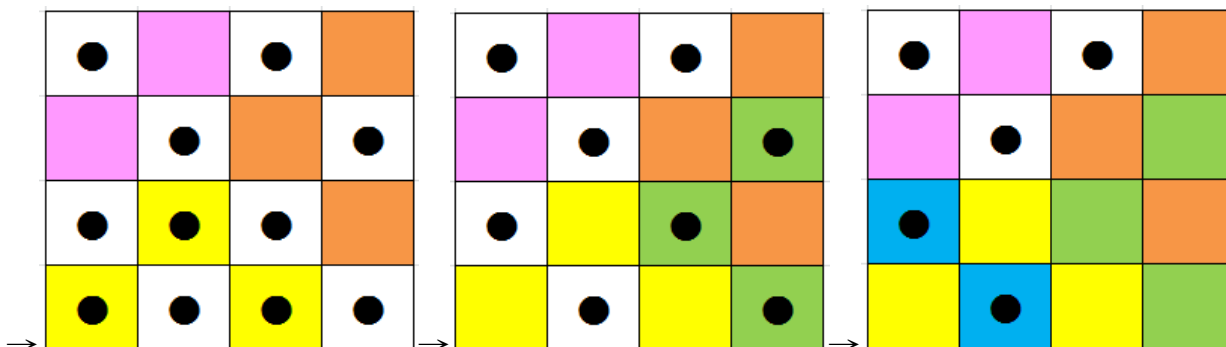
(十)探討：如何快速得到表中所有數總和的方法？

採取先假設某格中的數，然後利用格子之間的關係求出一些相關的格子，依此類推一直找下去，在格子數變多時，實在不是一個很好的作法；另外，利用代數符號的方法求出一般解就更累人了。在互相討論之後我們提出一個較快速且可行的辦法——「取棋子法」。

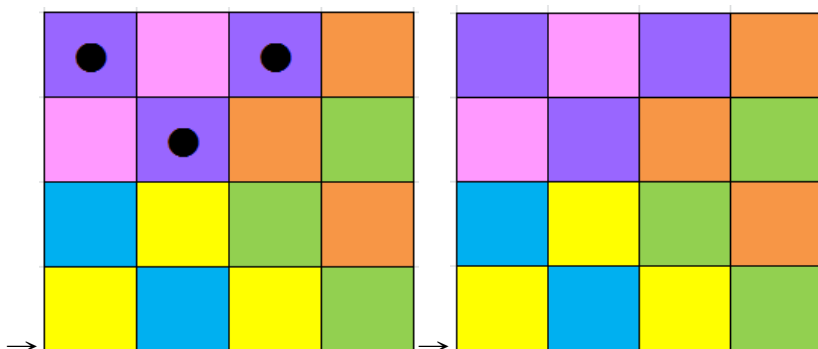
以4×4 方格表為例：先將所有格子各擺上一個黑色棋子，



先取走粉紅色格子中的兩顆棋子得 1，再取走橘色格子中的三顆棋子再得 1，



再取走黃(或綠或藍)色格子中的諸顆棋子各再得 1，



最後取走紫色格子中的三顆棋子得 1，

故得 4×4 方格表所有數的總和為 6。

6	1	6	2
1	6	2	4
5	3	4	2
3	5	3	4

4×4 方格表，表中所有數的總和為 6。
數字表示取棋子的順序(不是所填數字)

1	10	4	10	4	7
11	1	10	4	7	5
1	11	3	9	5	7
11	3	9	3	9	5
2	12	3	9	6	8
12	2	12	6	8	6

6×6 方格表，表中所有數的總和為 12。
數字表示取棋子的順序(不是所填數字)

1	12	1	15	9	15	9	16
12	1	14	6	15	9	16	10
3	14	6	14	6	20	10	16
13	3	14	6	20	7	20	10
3	13	5	19	7	20	7	17
13	5	19	5	19	7	17	8
2	11	5	19	4	18	8	17
11	2	11	4	18	4	18	8

8×8 方格表，表中所有數的總和為 20。
數字表示取棋子的順序(不是所填數字)

18	1	18	9	17	9	17	13	16	13
1	18	5	30	9	17	11	19	13	16
28	5	30	5	30	11	19	11	19	14
2	28	5	30	8	24	11	19	14	20
28	2	29	8	24	8	24	12	20	14
2	29	4	29	8	24	12	22	12	20
27	4	29	4	25	7	22	12	22	15
3	27	4	25	7	25	7	22	15	21
27	3	26	6	25	7	23	10	21	15
3	26	6	26	6	23	10	23	10	21

10×10 方格表，表中所有數的總和為 30。

數字表示取棋子的順序(不是所填數字)

(十一)探討：偶數階方格表中所有數總和的規律性：

先將我們已得到的答案列出來，如下表，看起來似乎有某種規律，

偶數階方格表中所有數的和

方格表	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10
表中所有數的和	2	6	12	20	30

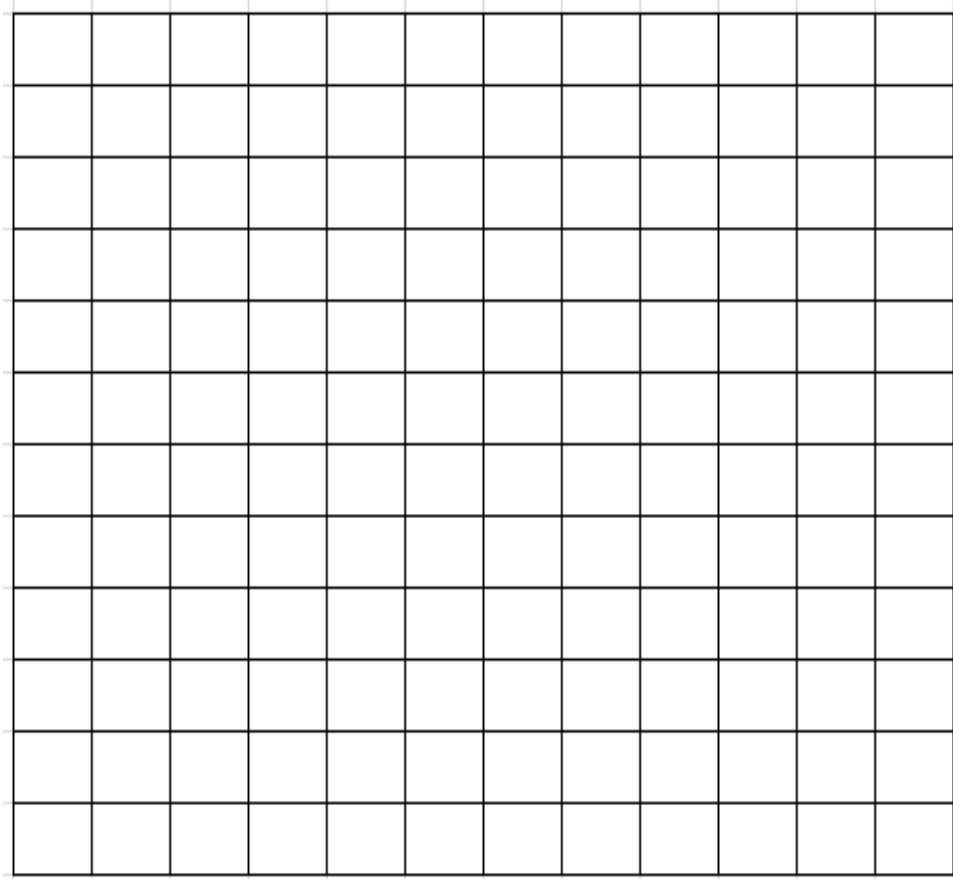
將它們各除以 2，就形成下表：

方格表	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10
表中所有數的和	2	6	12	20	30
除以 2 之後	1	3	6	10	15
三角形數	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5

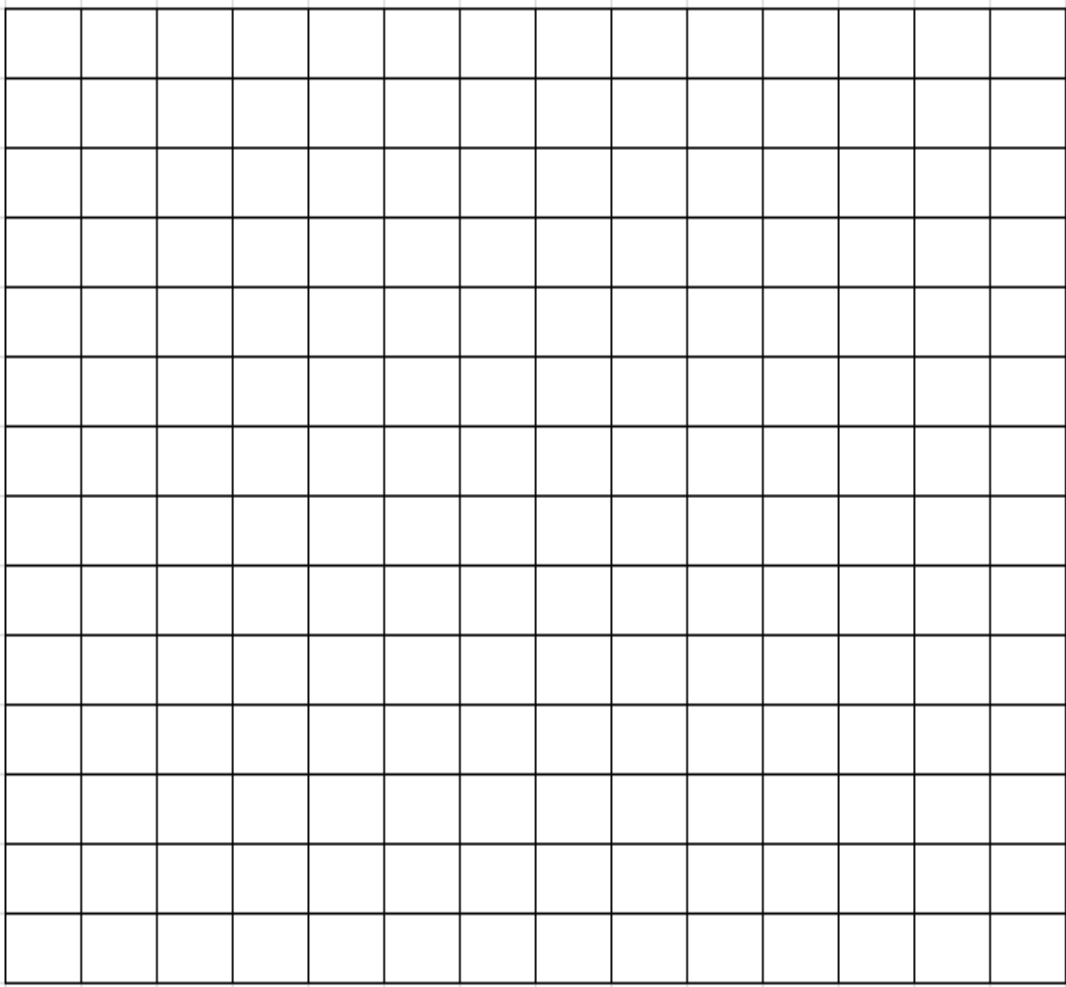
我們觀察到偶數階方格表中所有數的和正好是：「三角形數」的2倍。

依據前面的結果，我們作出以下的預測：

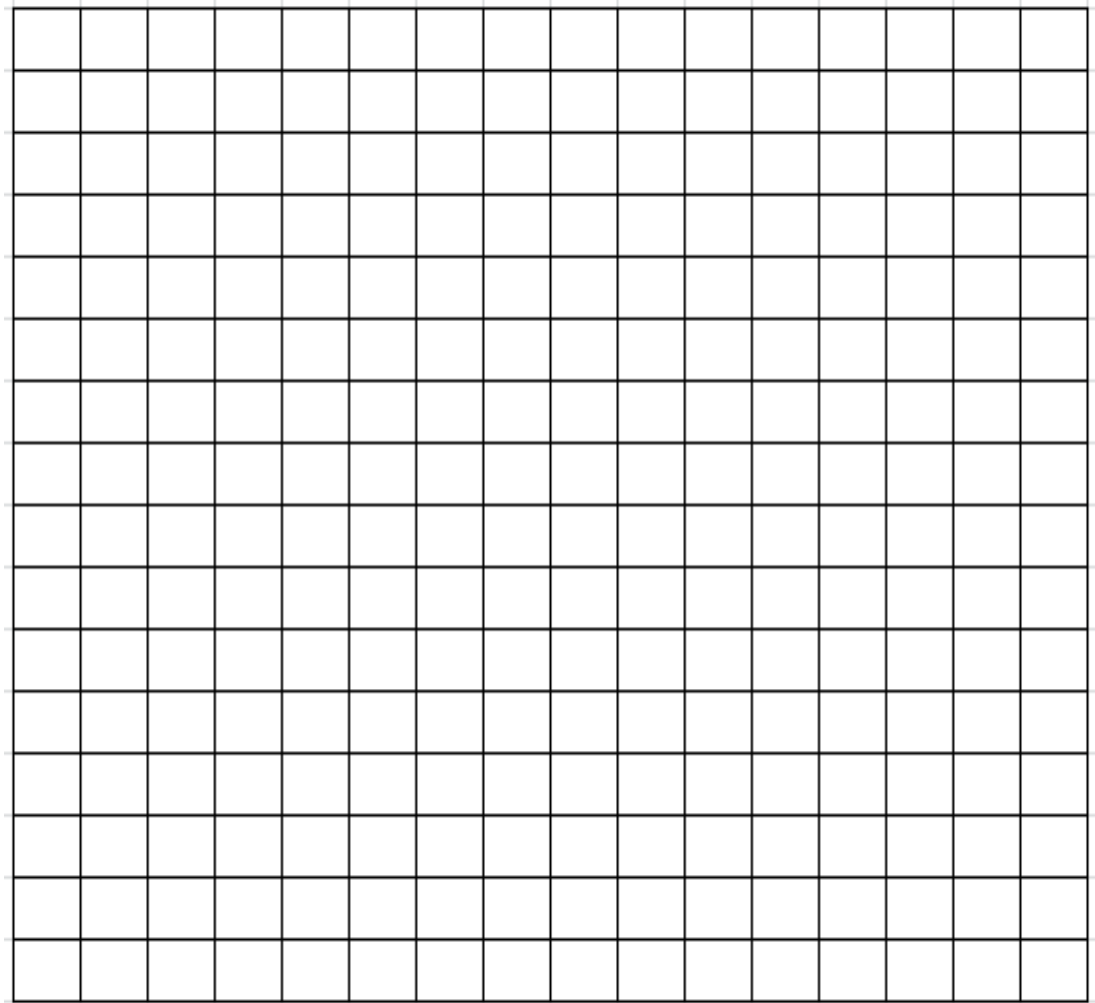
方格表	12×12	14×14	16×16	18×18	20×20
表中所有數的和	42	56	72	90	110



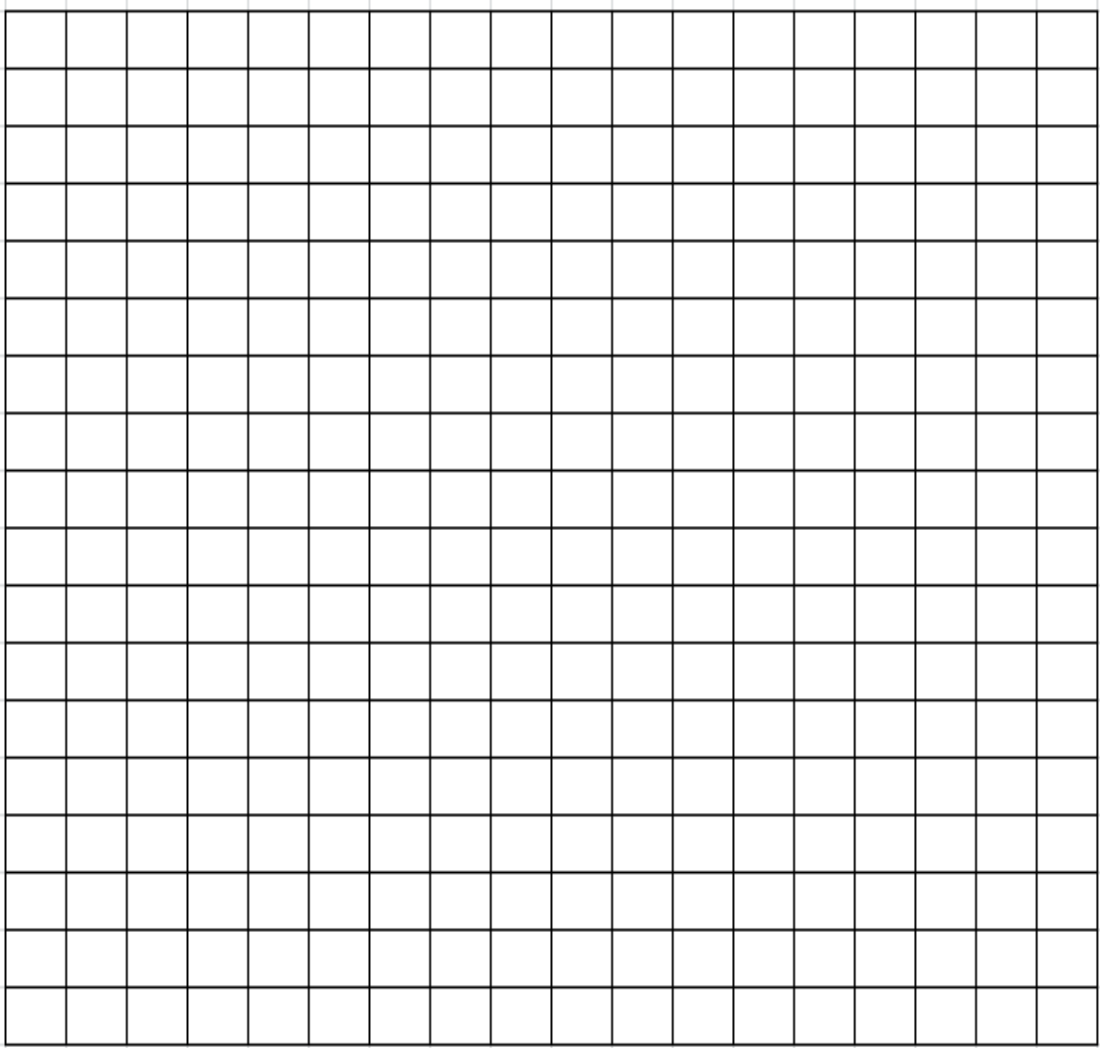
12×12 空白方格表
(一起來填填看)



14×14 空白方格表
(一起來填填看)



16×16 空白方格表
(一起來填填看)



18×18 空白方格表
(一起來填填看)

我們故意先跳過 12×12 、 14×14 、 16×16 、 18×18 方格表，直接作 20×20 方格表，
 答案果然就如預測的結果吻合，我們將取棋子的順序列出以下的三個表：

51	105	50	105	50	94	39	94	39	83	28	83	28	72	17	72	17	61	1	61
106	51	105	50	95	40	94	39	84	29	83	28	73	18	72	17	62	7	61	1
51	106	49	95	40	95	40	84	29	84	29	73	18	73	18	62	7	62	7	60
106	49	104	49	95	40	93	38	84	29	82	27	73	18	71	16	62	7	60	2
52	104	49	104	41	93	38	93	38	82	27	82	27	71	16	71	16	63	2	60
107	52	104	41	96	41	93	38	85	30	82	27	74	19	71	16	63	8	63	2
52	107	48	96	41	96	37	85	30	85	30	74	19	74	19	70	8	63	8	59
107	48	103	48	96	37	92	37	85	30	81	26	74	19	70	15	70	8	59	3
53	103	48	103	42	92	37	92	31	81	26	81	26	75	15	70	15	64	3	59
108	53	103	42	97	42	92	31	86	31	81	26	75	20	75	15	64	9	64	3
53	108	47	97	42	97	36	86	31	86	25	80	20	75	20	69	9	64	9	58
108	47	102	47	97	36	91	36	86	25	80	25	80	20	69	14	69	9	58	4
54	102	47	102	43	91	36	91	32	81	25	80	21	76	14	69	14	65	4	58
109	54	102	43	98	43	91	32	87	32	81	21	76	21	76	14	65	10	65	4
54	109	46	98	43	98	35	90	32	87	24	79	21	76	13	68	10	65	10	57
109	46	101	46	98	35	90	35	90	24	79	24	79	13	68	13	68	10	57	5
55	101	46	101	44	99	35	90	33	88	24	79	22	77	13	68	11	66	5	57
110	55	101	44	99	44	99	53	88	33	88	22	77	22	77	11	66	11	66	5
55	110	45	100	44	99	34	89	33	88	23	78	22	77	12	67	11	66	6	56
110	45	100	45	100	34	89	34	89	23	78	23	78	12	67	12	67	6	56	6

20×20方格表-(1)

70	1	70	2	69	2	69	3	68	3	68	4	67	4	67	5	66	5	66	6
1	70	20	79	2	69	33	88	3	68	41	97	4	67	51	106	5	66	6	65
71	20	79	20	79	33	88	33	88	41	97	41	97	51	106	51	106	52	65	6
19	71	20	79	25	80	33	88	34	89	41	97	42	98	51	106	52	107	52	65
71	19	78	25	80	25	80	34	89	34	89	42	98	42	98	50	107	52	107	7
19	78	21	78	25	80	32	87	34	89	40	96	42	98	50	105	50	107	7	64
72	21	78	21	81	32	87	32	87	40	96	40	96	43	105	50	105	53	64	7
18	72	21	81	26	81	32	87	35	90	40	96	43	99	43	105	53	108	53	64
72	18	77	26	81	26	86	35	90	35	90	39	99	43	99	49	108	53	108	8
18	77	22	77	26	86	31	86	35	90	39	95	39	99	49	104	49	108	8	63
73	22	77	22	82	31	86	31	91	36	95	39	95	44	104	49	104	54	63	8
17	73	22	82	27	82	31	91	36	91	36	95	44	100	44	104	54	109	54	63
73	17	76	27	82	27	85	30	91	36	94	38	100	44	100	48	109	54	109	3
17	76	23	76	27	85	30	85	30	94	38	94	38	100	48	103	48	109	9	62
74	23	76	23	83	28	85	30	92	37	94	38	101	45	103	48	103	55	62	9
16	74	23	83	28	83	28	92	37	92	37	101	45	101	45	103	55	110	55	62
74	16	75	24	83	28	84	29	92	37	93	46	101	45	102	47	110	55	110	10
16	75	24	75	24	84	29	84	29	93	46	93	46	102	47	102	47	110	10	61
56	15	75	24	57	14	84	29	58	13	93	46	59	12	102	47	60	11	61	10
15	56	15	27	14	57	14	58	13	58	13	59	12	59	12	60	11	60	11	61

20×20方格表-(2)

55	56	45	72	45	72	34	79	34	79	28	87	28	87	20	110	20	110	6	108
56	55	62	45	72	44	73	34	79	33	86	28	87	21	100	20	110	19	108	6
55	62	46	62	44	73	44	73	33	86	33	86	21	100	21	100	19	109	19	108
57	46	62	46	71	44	73	35	80	33	86	27	94	21	100	18	109	19	109	5
54	57	46	71	43	71	35	80	35	80	27	94	27	94	18	101	19	109	5	107
57	54	63	43	71	43	74	35	80	32	88	27	94	22	101	18	109	17	107	5
54	63	47	63	43	71	36	74	32	88	32	88	22	95	22	101	17	106	17	107
58	47	63	47	70	43	74	36	81	32	88	23	95	22	95	16	106	17	106	4
53	58	47	70	42	70	36	81	31	81	23	89	23	95	16	102	16	106	4	105
58	53	64	42	70	42	75	31	81	31	89	23	89	15	102	16	102	9	105	4
53	64	48	64	42	70	37	75	31	82	24	89	15	96	15	102	9	103	9	105
59	48	64	48	69	42	75	37	82	24	82	24	96	15	96	10	103	9	103	3
52	59	48	69	41	69	37	76	30	82	24	90	14	96	10	97	10	103	3	104
59	52	65	41	69	41	76	30	76	30	90	14	90	14	97	10	97	8	104	3
52	65	49	65	41	68	38	76	30	83	25	90	14	91	11	97	8	98	8	104
60	49	65	49	68	38	68	38	83	25	83	25	91	11	91	11	98	8	98	2
51	60	49	66	40	68	38	77	29	83	25	84	13	91	11	92	7	98	2	99
60	51	66	40	66	40	77	29	77	29	84	13	84	13	92	7	92	7	99	2
51	61	50	66	40	67	39	77	29	78	26	84	13	85	12	92	7	93	1	99
61	50	61	50	67	39	67	39	78	26	78	26	85	12	85	93	93	1	93	1

20×20 方格表-(3)

伍、研究結果：

在 $n \times n$ 方格表的每個方格中，各填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1，則此 $n \times n$ 方格表的每個方格中的數之總和如下表：

方格表	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10
表中所有數的和	2	6	12	20	30
方格表	12×12	14×14	16×16	18×18	20×20
表中所有數的和	42	56	72	90	110

偶數階方格表中所有數的和正好是：「三角形數」的 2 倍。

當 n 為奇數，則無解。

陸、研究討論及展望：

若將正方形改成矩形，其結果又如何？

「取棋子法」的盲點：用「取棋子法」去找一般矩形的方格表內的數總和時，發現有很多都是無法作的，因此以為是無解的。（參考下表）

列\行	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	4	4	4	6	6	6	8
3		無解	6	無解	8	8	無解	無解	無解
4			6	無解	10	無解	12	12	無解
5				無解	無解	無解	無解	無解	無解
6					12	無解	無解	無解	無解
7						無解	無解	無解	無解
8							20	無解	無解
9								無解	無解
10									30

可是一經檢驗，卻是可解的。舉例說明如下：

矩形方格表的討論：

1. 3×8 方格表：

	$1-x$						
x							

	$1-x$		1		x		0
x		$x-1$		$-x$		$1-x$	
	$1-x$		1		x		0

→

可推得 $x=0$ ，所以可得

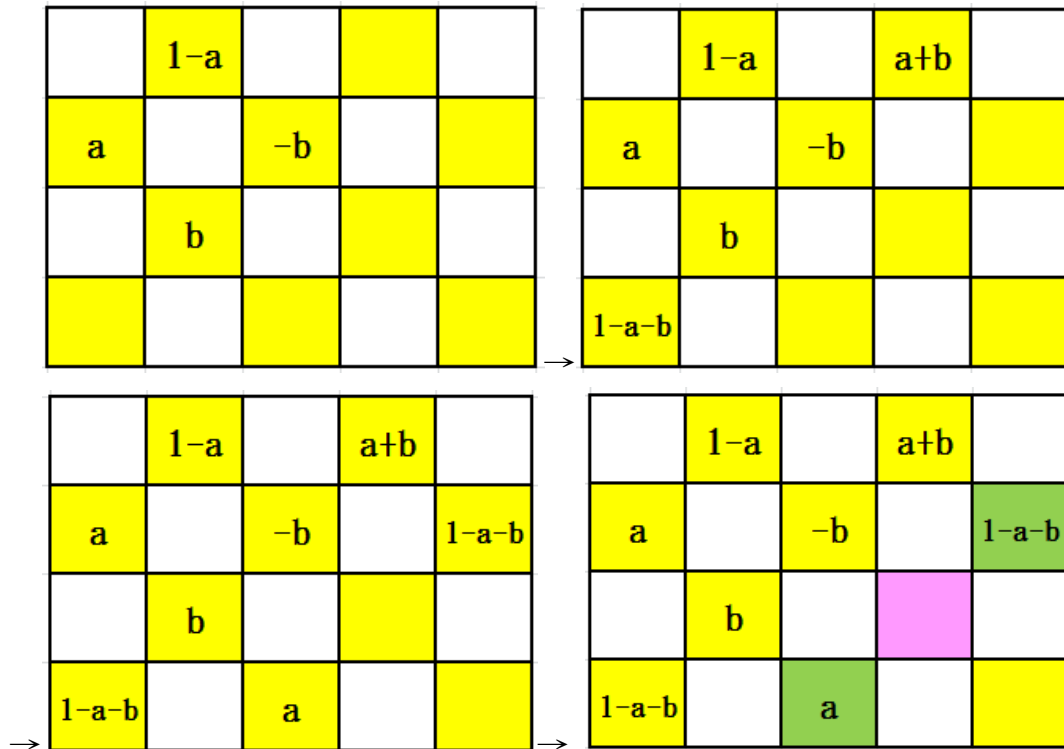
	1		1		0		0
0		-1		0		1	
	1		1		0		0

同樣的方法推得另外 12 格的答案，最後獲得完整的表如下：（唯一解）

0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	-1	0	0	-1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0

表中所有數的和為 8。

2. 4×5 方格表：



紅色格中應填 b 或 $1-a$ ；且綠色兩格中的數要相等，故

$$\begin{cases} b=1-a \\ a=1-a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ 唯一解}$$

代入得

	1		1	
0		-1		0
	1		1	
0		0		0

同理，我們一樣可得另外 10 格的答案，最後得到一個解如下表，且此解是**唯一解**

0	1	0	1	0
0	1	-1	1	0
0	1	-1	1	0
0	1	0	1	0

表中所有數的和為 6。

3. 5×6 方格表：

	a				
1-a		-b			
	b				

→

	a		1-a+b		1
1-a		-b		a-b-1	
	b		1+b		1-a+b
a-b		-b			
	1-a+b		a		

紅色格中應填 $-b$ 或 $-a$ ；且綠色兩格中的數相等，故

$$\begin{cases} -b = -a \\ a = 1 - a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 唯一解}$$

代入得

	1		1		1
0		-1		-1	
	1		2		1
0		-1		-1	
	1		1		1

同理，我們一樣可得另外 15 格的答案，最後得到一個解如下表，且此解是**唯一解**

1	1	1	1	1	1
0	-1	-1	-1	-1	0
1	1	2	2	1	1
0	-1	-1	-1	-1	0
1	1	1	1	1	1

表中所有數的和為 12。

4. 5×9 方格表

	1-a		a+b		1		1-a-b	
a		-b		-a-b		a+b-1		
	b		1+b		1		1-b	
1-a-b		-b		a-1		-a		
	a+b		1-a		1		a	

紅色格中應填 b 或 $a+b$ ；且藍色格中應填 b 或 $1-a$ ，故

$$\begin{cases} b = a+b \\ b = 1-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 唯一一組解}$$

代入得

	1		1		1		0	
0		-1		-1		0		1
	1		2		1		0	
0		-1		-1		0		1
	1		1		1		0	

(矛盾) 所以 5×9 方格表確定無解

5. 6×7 方格表

	$1-a$		$a+b$		$1-c$	
a		$-b$		$c-a-b$		0
	b		$1+b-c$		$a+b$	
$1-a-b$		$c-b$		$-b$		0
	$a+b-c$		b		$1-a$	
c		$1-a-b$		a		0

黃色格的和應為 1；且綠色兩格應相等，故

$$\begin{cases} 1-c=1 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases} \text{ 唯一一組解}$$

代入得

	1		b		1	
0		$-b$		$-b$		0
	b		$1+b$		b	
$1-b$		$-b$		$-b$		0
	b		b		1	
0		$1-b$		0		0

由橘色格可推得 $b=1$ (唯一解)

所以得到 6×7 方格表的解(唯一解)

0	1	0	1	0	1	0
0	1	-1	1	-1	1	0
0	1	-1	2	-1	1	0
0	1	-1	2	-1	1	0
0	1	-1	1	-1	1	0
0	1	0	1	0	1	0

表中所有數的和為 12。

另外再列出一些可解的方格表：

3×5 方格表：

-1	1	2	1	-1
0	0	-1	0	0
2	1	-1	1	2

(非唯一解)

一般解如下：

$1-t$	1	t	1	$1-t$
0	0	-1	0	0
t	1	$1-t$	1	t

表中所有數的和為 6

3×9 方格表

0.5	0	0.5	1	0.5	1	0.5	0	0.5
1	0	0	0	-1	0	0	0	1
0.5	0	0.5	1	0.5	1	0.5	0	0.5

(非唯一解)

一般解：

b	0	a	1	1-a	1	1-b	0	b
1	1-a-b	0	0	-1	a+b-1	0	0	1
a	0	b	1	1-b	1	1-a	0	a

(其中 $a+b=1$)

表中所有數的和為 10

3×10 方格表

0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

表中所有數的和為 10。(唯一解)

4×7 方格表

1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1

表中所有數的和為 10。(唯一解)

5×8 方格表

0.5	0.5	1	0.5	0.5	1	0.5	0.5
0.5	-0.5	0	-0.5	-0.5	0	-0.5	0.5
1	0	1	1	1	1	0	1
0.5	-0.5	0	-0.5	-0.5	0	-0.5	0.5
0.5	0.5	1	0.5	0.5	1	0.5	0.5

(非唯一解)

一般解：

r	$1-t$	1	t	$1-r$	1	r	$1-t$
t	$-r$	0	$r-1$	$-t$	0	$t-1$	$1-r$
1	0	1	1	1	1	0	1
$1-t$	$r-1$	0	$-r$	$t-1$	0	$-t$	r
$1-r$	t	1	$1-t$	r	1	$1-r$	t

表中所有數的和為 14。

5×10 方格表

1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1
1	-1	2	0	1	1	0	2	-1	1
1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1

表中所有數的和為 18。

以下列出修正後的結果：

列\行	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	4	4	4	6	6	6	8
3		確定 無解	6	6	8	8	8	10	10
4			6	6	8	10	12	12	12
5				確定 無解	12	12	14	確定 無解	18
6					12	12			
7						確定 無解			
8							20		
9								確定 無解	
10									30

柒、參考資料：

一、International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽 2000 秋季賽 國中組 初級卷 2000/10/22