

目 錄

壹、摘要	1
貳、研究動機	1
參、研究目的	2
肆、研究設備及器材	2
伍、研究討論過程	3
一、「七邊形數字謎題」— 研究內容的精簡統整	3
(一) 找尋七邊形數字謎題的解	
(二) 「邊數改變」，在每邊圓圈數為 3 圈的數字謎題中，求得每邊和	
(三) N 邊形 (N 為奇數) 數字謎題，填入數字 1~2N，每邊和 = $\frac{7}{2}N + \frac{3}{2}$ ，	
求得快速的數字填法	
(四) 「填入數字改變」，求得 N 邊形數字謎題的每邊和	
(五) 「改變數字填入的方法」，求得七邊形數字謎題的「每邊和之數值範圍」	
二、分析多邊形數字謎題的變項	7
三、「每邊圓圈數的改變」，在不同的凸多邊形數字謎題中，求每邊和以及謎題解	8
(一) 每邊圓圈數為 4 圈的三邊形、四邊形、...、N 邊形數字謎題	
(二) 每邊圓圈數為 5 圈的三邊形、四邊形、...、N 邊形數字謎題	
(三) 每邊圓圈數為 6 圈的三邊形、四邊形、...、N 邊形數字謎題	
(四) 每邊圓圈數為 k 圈的三邊形、四邊形、...、N 邊形數字謎題	
四、「填入數字改為等差數列」，在不同圓圈數的 N 邊形數字謎題中，求每邊和	31
(一) 每邊圓圈數為 3 圈的 N 邊形數字謎題	
(二) 每邊圓圈數為 4 圈的 N 邊形數字謎題	
(三) 每邊圓圈數為 5 圈的 N 邊形數字謎題	
(四) 每邊圓圈數為 k 圈的 N 邊形數字謎題	
陸、研究結果	35
柒、結論	36
捌、參考資料及其他	36

作品名稱：多邊形數字謎題之推廣

壹、摘要

延續去年科展研究「七邊形之數字謎題」的內容，做進一步的探討分析、推廣討論。

上一份研究報告中，我們不僅找出「七邊形之數字謎題」的多組解，更將之推廣至三邊形數字謎題、四邊形數字謎題、…、N 邊形數字謎題，並從中歸納出每個謎題中「每邊和」的一般式，快速「填入數字」找解的方法的規律性，以及「填入數字的連續性」之變化。

現在我們要加以推廣其他相關數學謎題：(一) 將原本邊上的 3 個圓圈，改成 4 個圓圈、5 個圓圈、6 個圓圈、k 個圓圈，討論「每邊和」的變化和一般式，以及「填入數字的解」的規律性。(二) 將「邊上圓圈改變」的研究，從三邊形推廣至 N 邊形。(三) 把原本「填入數字」做改變，發現：只要填入的數字有規律性，呈現等差數列，謎題就可以找到解。

透過這次研究，我們可以創造出各式的數字謎題並能迅速找出謎題解：

N 邊形的數字謎題，每邊邊上 k 個圓圈，填入數字 $a_0 \sim \{ a_0 + [(k - 1)N - 1]d \}$ (不得重複)，每邊和 $ka_0 + \frac{[(k^2 - 2)N - k]d}{2}$ 。

貳、研究動機

去年科展研究主題—「七邊形之數字謎題」，我們利用不同方式找出謎題的多個解，從中也推導出下列幾項討論：

一、「邊數改變」，在每邊圓圈數為 3 圈的多邊形數字謎題中，求得每邊和的值以及謎題解。

二、N 邊形數字謎題如何利用數字的順序性以及每邊和，快速的填入數字獲得謎題解。

三、「填入數字改變」，在每邊圓圈數為 3 圈的多邊形數字謎題中，求得每邊和的值以及謎題解。

四、「改變數字填入的方法」，在每邊圓圈數為 3 圈的七邊形數字謎題中，求得每邊和的值以及其值的範圍大小。(註：該部份研究討論在「伍、研究討論過程」加以說明)

在去年的研究中，雖然覺得對我們這群第一次著手做數學主題研究的國中生來說，已算是小有成就，完成了一份研究報告，但仍無法滿足我們的求知心，總覺得這個主題尚有許多可以再討論、發展的空間。因此，今年我們將原本的「七邊形之數字謎題」做更深入的延續探討，先審慎檢討之前研究的缺漏，再重新分析影響數字謎題的各項因素，

從不同的變項著手，擴大討論數字謎題的變化型態，並試圖歸納出其解的規律性和一般式。

希望藉由這個研究再次挑戰大家對數字變化的極限，並藉由科學展覽的機會，將我們的研究結果與大家分享，期望引發同好者的共鳴，激發自我的求知慾、挑戰心，更進一步探索不同領域的數學謎題，找出它們的解答，並懂得分享研究結果，藉以拓展數學學習領域，讓學習學無止境。

參、研究目的

- 一、檢討去年科展研究內容，重新分析多邊形數字謎題的變項。
- 二、針對不同的變項，先利用較小的數據做例子，再逐步推廣至以未知數代表變項，歸納出各種狀況下的數字謎題解。
- 三、延伸討論「每邊圓圈數的改變」，在不同的多邊形數字謎題之中，對每邊和以及謎題解的影響。
- 四、延伸討論「填入數字的改變」，在不同的多邊形數字謎題中，對每邊和以及謎題解的影響。
- 五、針對不同狀況下的多邊形數字謎題，試圖尋找、歸納出數字快速填入的規律。

其次，藉由研究討論的過程，培養出面對數學問題時，能更具有剖析、以及歸納整理的能力，培養自我的數學邏輯思考。透過小組討論方式，更了解團隊分工合作精神，珍惜一起做研究的時間，體驗再次發現數學奧妙時，那種特別而又歡樂的感覺。

肆、研究設備及器材

筆、紙、數字卡

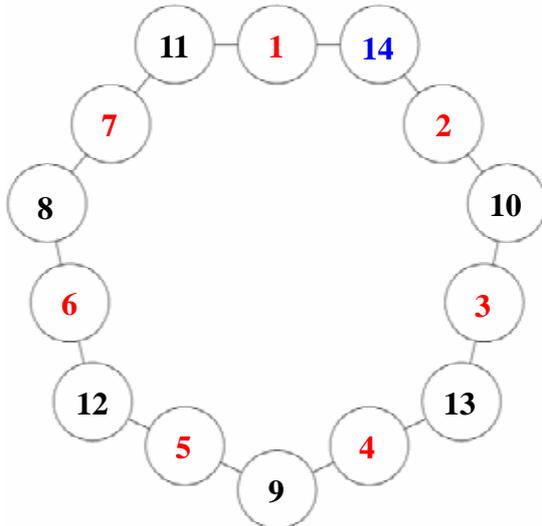


伍、研究討論過程

一、「七邊形數字謎題」— 研究內容的精簡統整

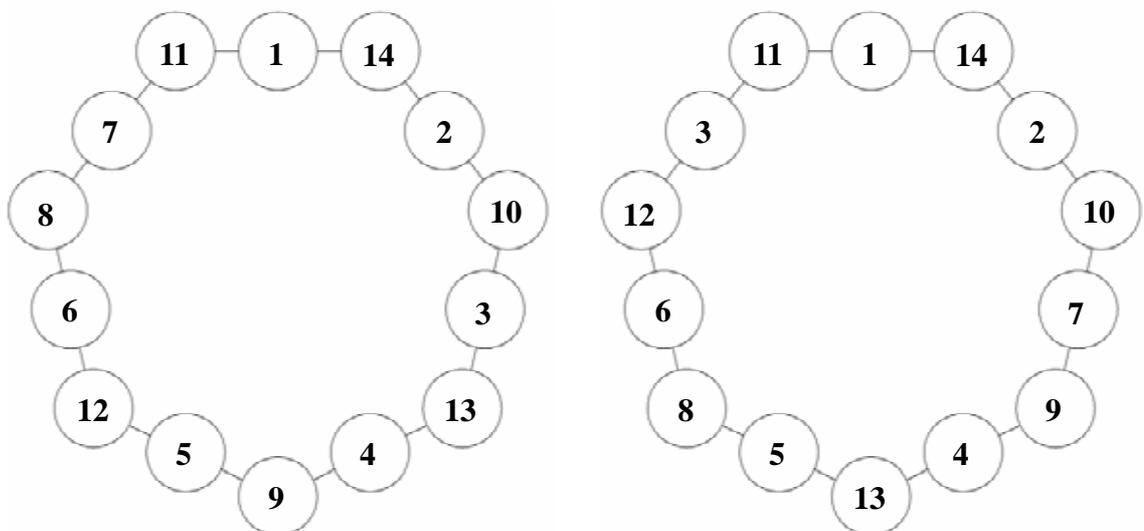
七邊形數字謎題：

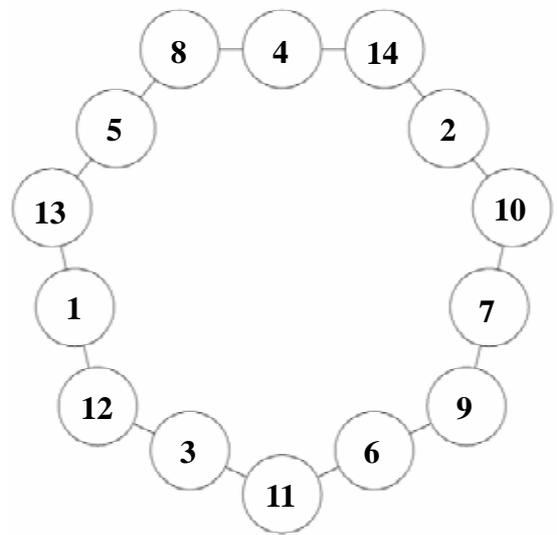
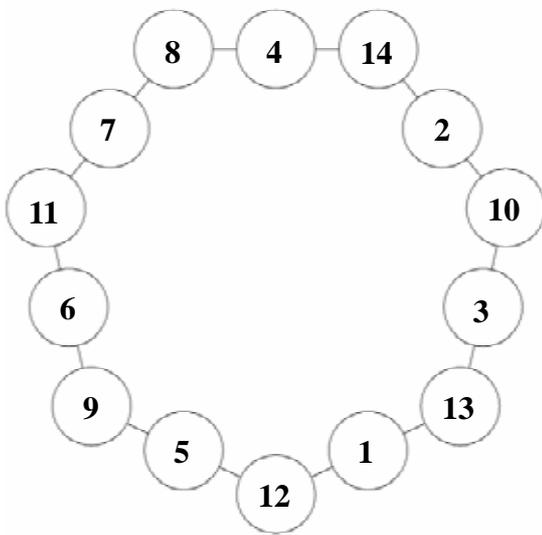
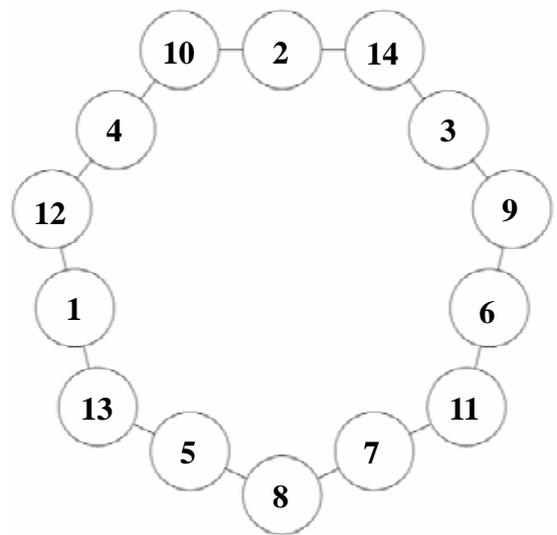
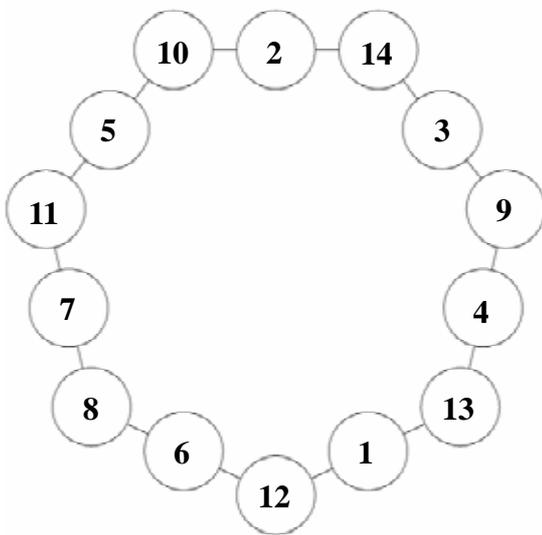
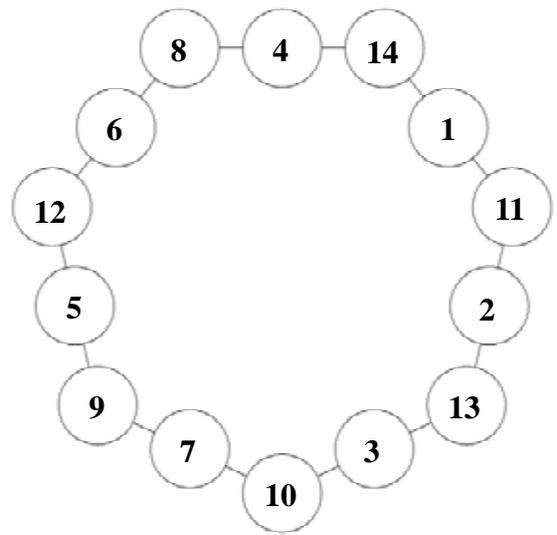
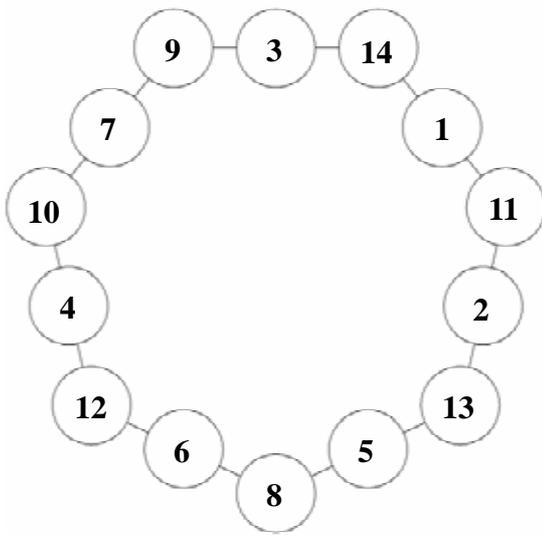
七邊形圖形，每邊邊上 3 個圓圈，試填入 1~14 的數字（不能重複），使得每邊和均等於 26。

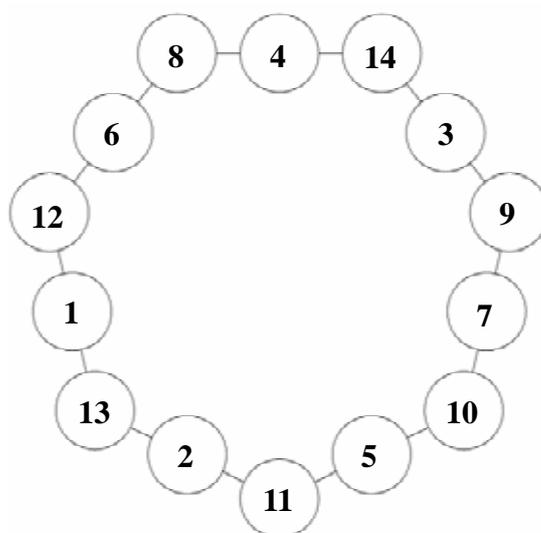


(一) 找尋七邊形數字謎題的解：

1. 固定數字 1~7 填入邊中圓圈的位置，數字 8~14 填入頂點圓圈的位置。
2. 七邊形數字謎題解並非唯一，找到九組解：







(二)「邊數改變」，在每邊圓圈數為 3 圈的數字謎題中，求得每邊和：

N 邊形的數字謎題：(N 為變數)

填入數字：1 ~ 2N

固定填入邊中圓圈位置的數字為 1 ~ N

頂點圓圈位置的數字為 (N+1) ~ 2N

$$\text{邊中圓圈的數字總和： } 1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{(1 + N) \times N}{2}$$

$$\text{頂點圓圈的數字總和： } (N+1) + (N+2) + (N+3) + \dots + 2N = \frac{[(N+1) + 2N] \times N}{2}$$

$$\text{每邊和： } \left\{ \frac{(1 + N) \times N}{2} + \frac{[(N + 1) + 2N] \times N}{2} \times 2 \right\} \div N = \frac{7}{2}N + \frac{3}{2}$$

1. 當 N 為奇數，設 $N=2a+1$ ($a=1、2、3、\dots$)

$$\frac{7}{2} \times (2a + 1) + \frac{3}{2} = 7a + \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \right) = 7a + 5 \quad \text{謎題有解！}$$

2. 當 N 為偶數，設 $N=2a$ ($a=2、3、4、\dots$)

$$\frac{7}{2} \times 2a + \frac{3}{2} = 7a + \frac{3}{2} \quad \text{因為填入的數字均為正整數，各邊和必為正整數，但由此式子推得其值並非整數，故不合！謎題無解！}$$

【結論】

(1) N 邊形的數字謎題，若邊數 N 為“奇數”，則依題型可求得每邊和

$$= \frac{7}{2}N + \frac{3}{2}，其數字謎題有解。$$

(2) N 邊形的數字謎題，若邊數 N 為“偶數”，並不能求得合題型的每邊和，其數字謎題無解。

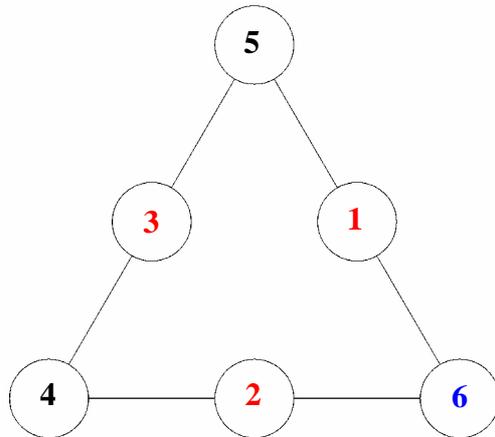
(三) N 邊形 (N 為奇數) 數字謎題，填入數字 $1 \sim 2N$ ，每邊和 = $\frac{7}{2}N + \frac{3}{2}$ ，求得快

速的數字填法：

1. 將 **數字 1** ~ **數字 N** 依序填入 邊中圓圈 位置 (順時鐘或逆時鐘方向皆可)
 2. 再將 **數字 $2N$** 填入 **數字 1** 和 **數字 2** 所夾的 頂點圓圈 位置
 3. 再利用固定的每邊和，依序求出每邊第三個圓圈的值
- 即可快速求得數字謎題之解！

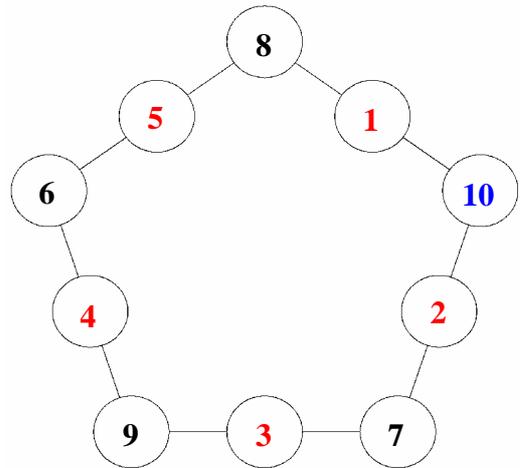
例：三邊形的數字謎題

填入數字 $1 \sim 6$ ，每邊和 = 12



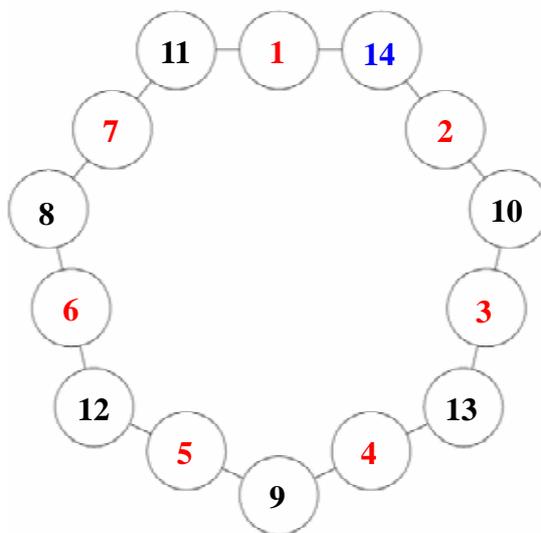
例：五邊形的數字謎題

填入數字 $1 \sim 10$ ，每邊和 = 19



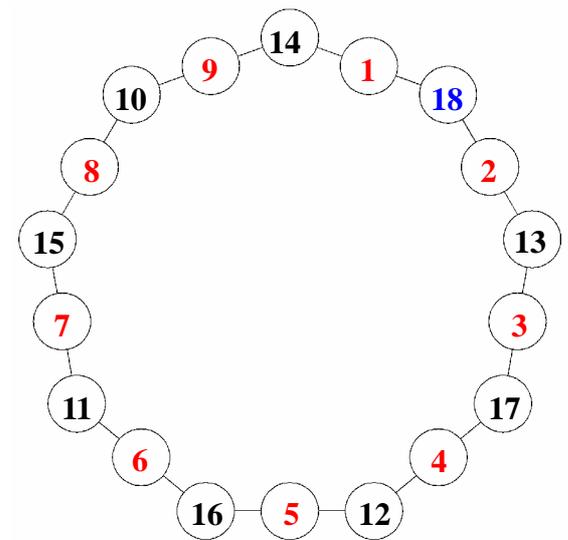
例：七邊形的數字謎題

填入數字 $1 \sim 14$ ，每邊和 = 26



例：九邊形的數字謎題

填入數字 $1 \sim 18$ ，每邊和 = 33



(四)「填入數字改變」，求得 N 邊形數字謎題的每邊和：

N 邊形的數字謎題，將填入數字 1~2N 改為 (1+m) ~ (2N+m)

$$\text{邊中圓圈的數字總和：} (1+m) + (2+m) + \dots + (N+m) = \frac{N(N+1)}{2} + Nm$$

$$\text{頂點圓圈的數字總和：} [(N+1)+m] + [(N+2)+m] + \dots + (2N+m) = \frac{N(3N+1)}{2} + Nm$$

$$\text{每邊和：} \left[\left(\frac{N(N+1)}{2} + Nm \right) + \left(\frac{N(3N+1)}{2} + Nm \right) \times 2 \right] \div N = \frac{(7N+3)}{2} + 3m$$

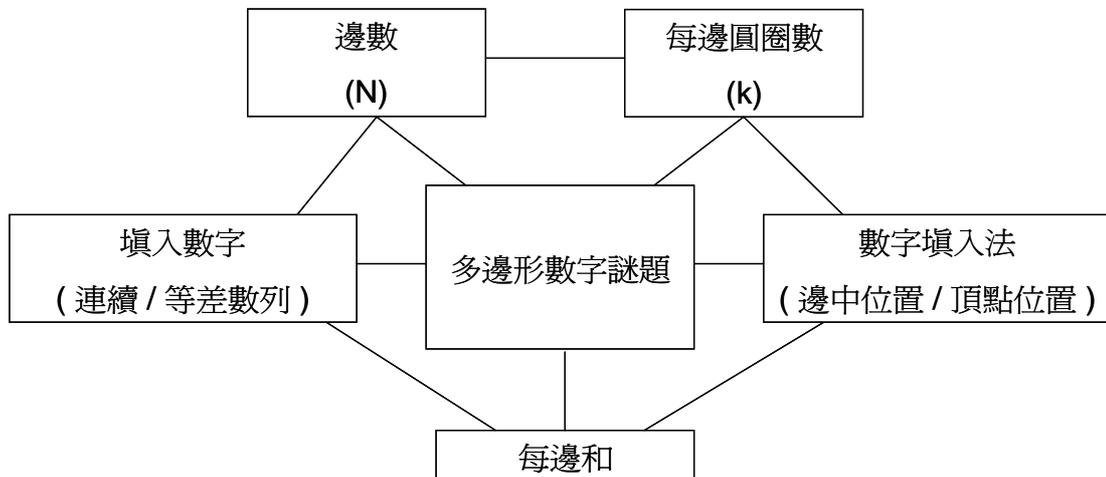
【結論】

- (1) N 邊形數字謎題，將填入數字由 1 ~ 2N 改為 (1+m) ~ (2N+m)，每邊和等於 $\left(\frac{7N+3}{2} + 3m \right)$ 。
- (2) 換句話說，只要填入的 2N 個數字是連續的，則能求得每邊和的固定值，也就能利用之前的快速數字填法，迅速找到數字謎題的解。

(五)「改變數字填入的方法」，求得七邊形數字謎題的「每邊和之數值範圍」：

1. 若改變數字填入方法，則其謎題解及各邊和均隨之改變。
2. 計算數字和時，頂點圓圈位置的數字會重複計算，因此，原固定數字 8 ~ 14(數列中最大的 7 個數)填入頂點圓圈位置，數字 1 ~ 7 填入邊中圓圈位置，經計算會得到最大的總和，除以邊數後，所得每邊和為最大值。
3. 改變數字填入方法，將數字 1 ~ 7(數列中最小的 7 個數)填入頂點圓圈位置，數字 8 ~ 14 填入邊中圓圈位置，經計算會得到最小的總和，除以邊數後，所得每邊和為最小值。
4. 七邊形數字謎題，每邊邊上三個圓圈，填入數字 1 ~ 14(不得重複)，得到每邊和的數值範圍為 19 ~ 26。

二、分析多邊形數字謎題的變項



去年的研究先從找「七邊形數字謎題之解」著手，進一步考慮到「邊數的改變」會如何影響「每邊和」、「謎題解」，也考慮了「數字的填入方法」不同，會造成「每邊和」值的變動，「謎題解」也就不唯一。另外，「填入數字的改變」由從 1 開始的連續數字，改為由(1+m)開始的連續數字，會如何影響「每邊和」、「謎題解」。

重新分析「杜登尼的七邊形數字謎題」：

七邊形圖形，每邊邊上 3 個圓圈，試填入 1~14 的數字（不能重複），使得每邊和均等於 26。

由此可見其影響因素有：

1.邊數：三邊形、四邊形、五邊形、…、十邊形、N 邊形

2.每邊邊上圓圈數：3 圈、4 圈、5 圈、6 圈、…、k 圈

3.填入數字：從 1 開始的連續數字、從(1+m)開始的連續數字、從 a_0 開始，
公差為 d 的等差數列

4.每邊和

5.謎題解的數字填入方法

三、「每邊圓圈數的改變」，在不同的凸多邊形數字謎題中，求每邊和以及謎題解

(一) 每邊圓圈數為 4 圈的數字謎題：

1、三邊形的數字謎題

<p>填入數字：1 ~ 9</p> <p>填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 6</p> <p>頂點圓圈的數字為 7 ~ 9</p>	$1 + 2 + 3 + \dots + 6 = \frac{(1+6) \times 6}{2} = 21$ $7 + 8 + 9 = 24$ $(21 + 24 \times 2) \div 3 = 23 \Rightarrow \text{每邊和}$
---	--

2、四邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 12

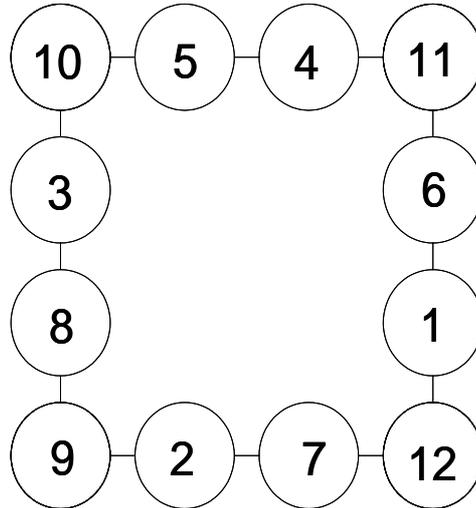
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 8

頂點圓圈的數字為 9 ~ 12

$$1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{(1+8) \times 8}{2} = 36$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = \frac{(9+12) \times 4}{2} = 42$$

$$(36 + 42 \times 2) \div 4 = 30 \Rightarrow \text{每邊和}$$



3、五邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 15

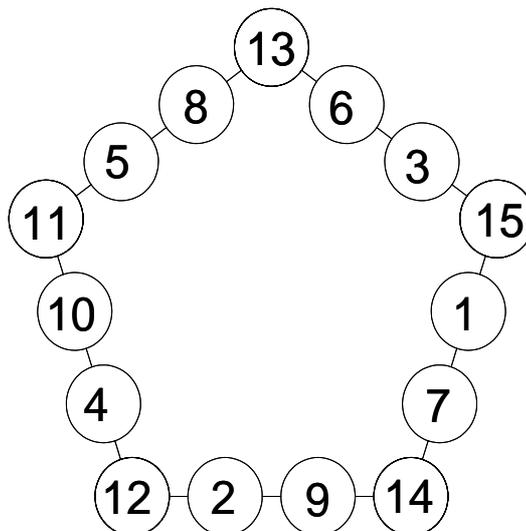
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 10

頂點圓圈的數字為 11 ~ 15

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{(1+10) \times 10}{2} = 55$$

$$11 + 12 + \dots + 15 = \frac{(11+15) \times 5}{2} = 65$$

$$(55 + 65 \times 2) \div 5 = 37 \Rightarrow \text{每邊和}$$



4、六邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 18

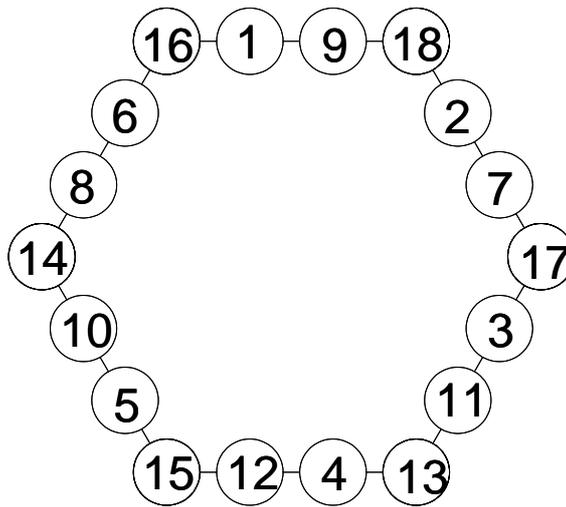
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 12

頂點圓圈的數字為 13 ~ 18

$$1+2+3+\dots+12=\frac{(1+12)\times 12}{2}=78$$

$$13+14+\dots+18=\frac{(13+18)\times 6}{2}=93$$

$$(78+93\times 2)\div 6=44\Rightarrow \text{每邊和}$$



5、七邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 21

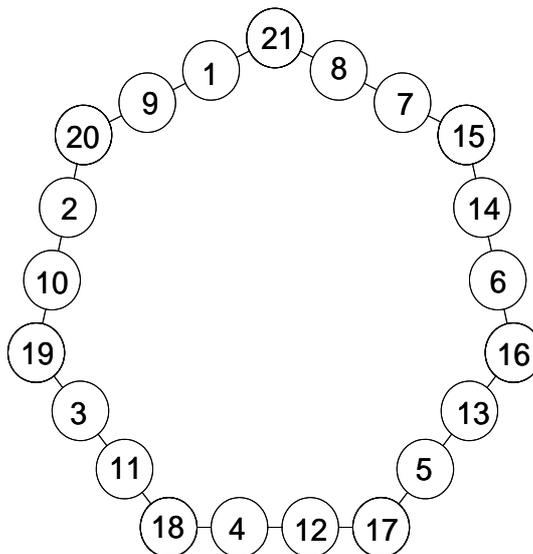
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 14

頂點圓圈的數字為 15 ~ 21

$$1+2+3+\dots+14=\frac{(1+14)\times 14}{2}=105$$

$$15+16+\dots+21=\frac{(15+21)\times 7}{2}=126$$

$$(105+126\times 2)\div 7=51\Rightarrow \text{每邊和}$$



6、八邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 24

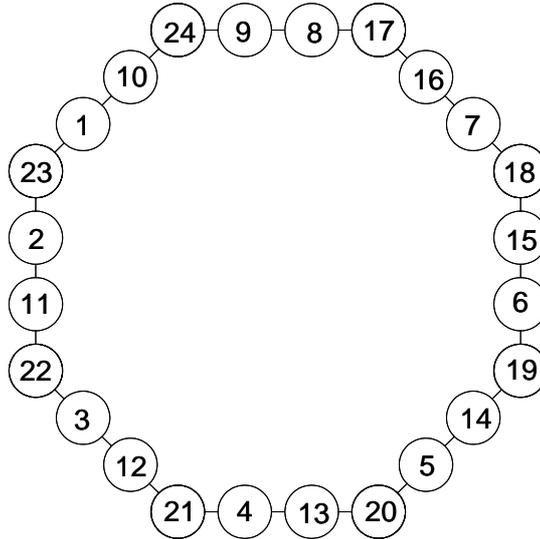
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 16

頂點圓圈的數字為 17 ~ 24

$$1+2+3+\dots+16 = \frac{(1+16) \times 16}{2} = 136$$

$$17+18+\dots+24 = \frac{(17+24) \times 8}{2} = 164$$

$$(136+164 \times 2) \div 8 = 58 \Rightarrow \text{每邊和}$$



7、九邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 27

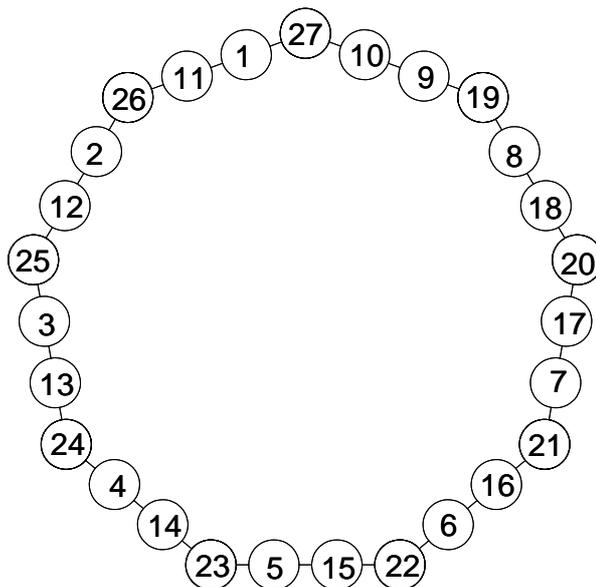
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 18

頂點圓圈的數字為 19 ~ 27

$$1+2+3+\dots+18 = \frac{(1+18) \times 18}{2} = 171$$

$$19+20+\dots+27 = \frac{(19+27) \times 9}{2} = 207$$

$$(171+207 \times 2) \div 9 = 65 \Rightarrow \text{每邊和}$$



8、十邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 30

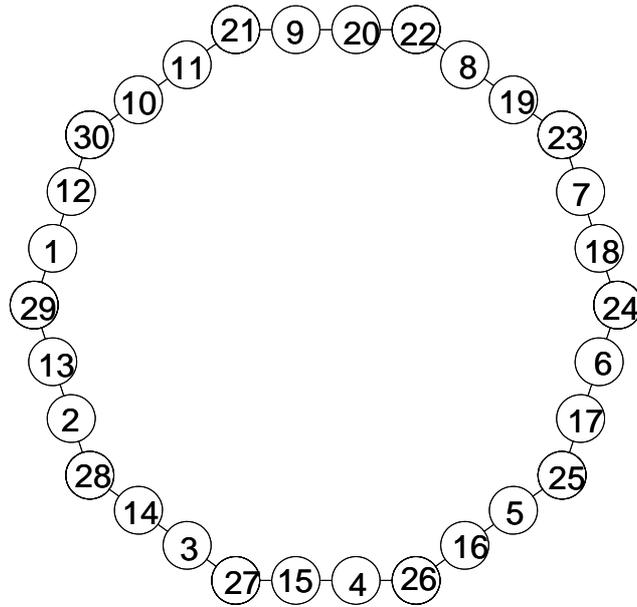
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 20

頂點圓圈的數字為 21 ~ 30

$$1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{(1 + 20) \times 20}{2} = 210$$

$$21 + 22 + \dots + 30 = \frac{(21 + 30) \times 10}{2} = 255$$

$$(210 + 255 \times 2) \div 10 = 72 \Rightarrow \text{每邊和}$$



9、N 邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 3N

填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 2N

頂點圓圈的數字為 (2N+1) ~ 3N

填入邊上圓圈位置的數字總和：

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2N$$

$$= \frac{(1 + 2N) \times 2N}{2}$$

$$= 2N^2 + N$$

填入頂點圓圈位置的數字總和：

$$(2N + 1) + (2N + 2) + (2N + 3) + \dots + 3N$$

$$= \frac{[(2N + 1) + 3N] \times N}{2}$$

$$= \frac{(5N + 1) \times N}{2}$$

$$= \frac{5N^2 + N}{2}$$

每邊和：(因填入頂點圓圈位置的數字，加總時具重複性，所以要 $\times 2$)

$$\left[(2N^2 + N) + \left(\frac{5N^2 + N}{2} \right) \times 2 \right] \div N$$

$$= (7N^2 + 2N) \div N$$

$$= 7N + 2$$

◎ 數字謎題圖解的數字填法：

1. 將 **數字 1** ~ **數字 N** 依序填入各邊邊中圓圈位置，順時鐘方向填入一圈 (或逆時鐘方向亦可)。
 2. 將 **數字 N+1** ~ **數字 2N** 依序填入各邊邊中圓圈位置，從第 1 步驟中填入的最後一邊開始，同方向的再填入一圈。
 3. 將 **數字 2N+1** ~ **數字 3N** 依序填入各邊頂點圓圈位置，從第 1 步驟中填入的最後一邊開始，反方向的填入一圈。
- 即可快速求得數字謎題之解！

(二) 每邊圓圈數為 **5 圈** 的數字謎題：

1、三邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 12

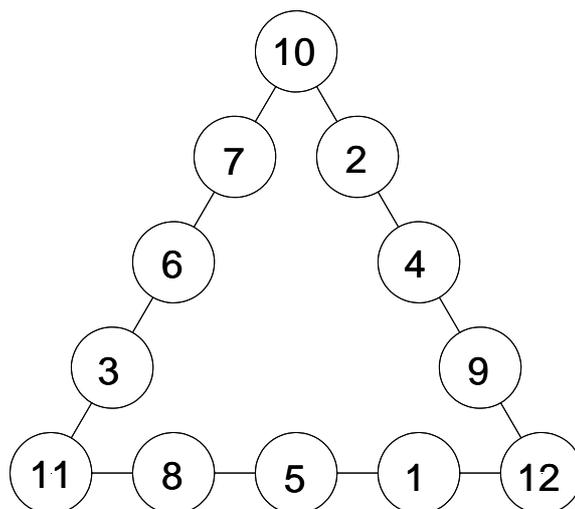
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 9

頂點圓圈的數字為 10 ~ 12

$$1+2+3+\dots+9 = \frac{(1+9) \times 9}{2} = 45$$

$$10+11+12 = 33$$

$$(45+33 \times 2) \div 3 = 37 \Rightarrow \text{每邊和}$$



2、四邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 16

填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 12

頂點圓圈的數字為 13 ~ 16

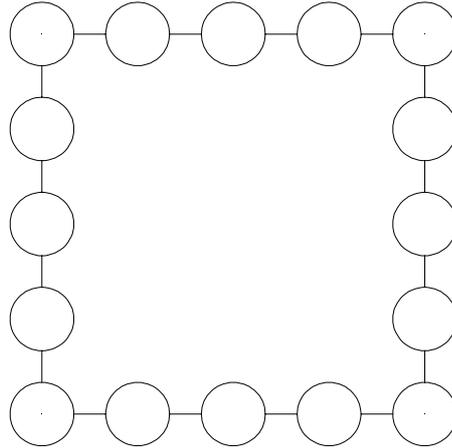
$$1+2+3+\dots+12 = \frac{(1+12) \times 12}{2} = 78$$

$$13+14+15+16 = \frac{(13+16) \times 4}{2} = 58$$

$$(78+58 \times 2) \div 4 = 48.5$$

其值並非正整數

偶數邊形的數字謎題無解！



3、五邊形的數字謎題

填入的數字：1~20

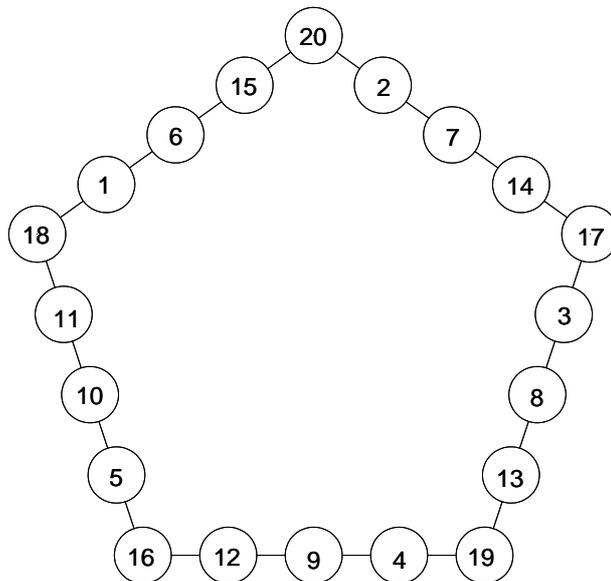
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 15

頂點圓圈的數字為 16 ~ 20

$$1+2+3+\dots+15 = \frac{(1+15) \times 15}{2} = 120$$

$$16+17+\dots+20 = \frac{(16+20) \times 5}{2} = 90$$

$$(120+90 \times 2) \div 5 = 60 \Rightarrow \text{每邊和}$$



4、六邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 24

填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 18

頂點圓圈的數字為 19 ~ 24

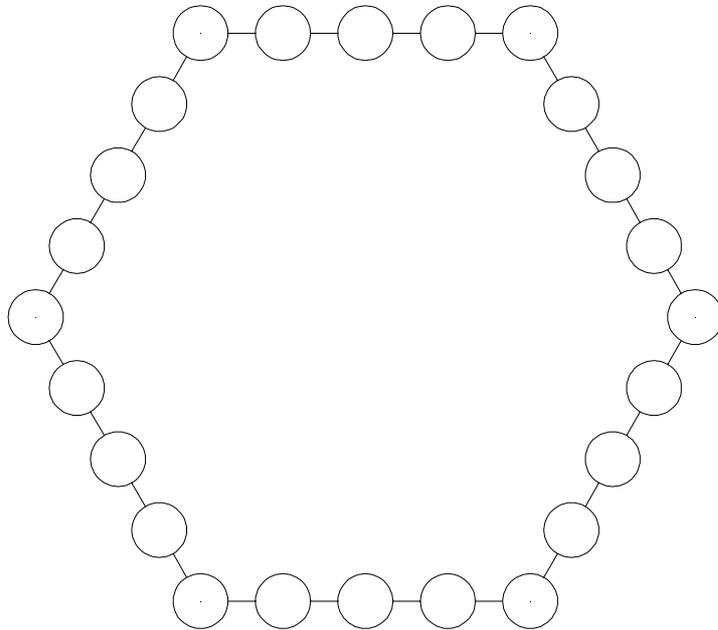
$$1 + 2 + 3 + \dots + 18 = \frac{(1 + 18) \times 18}{2} = 171$$

$$19 + 20 + \dots + 24 = \frac{(19 + 24) \times 6}{2} = 129$$

$$(171 + 129 \times 2) \div 6 = 71.5$$

其值並非正整數

偶數邊形的數字謎題無解！



5、七邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 28

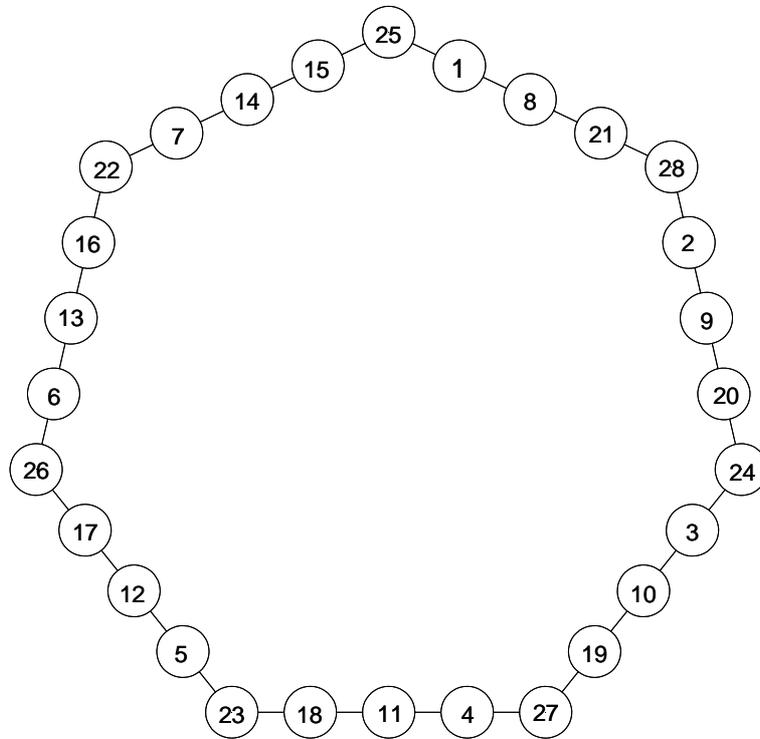
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 21

頂點圓圈的數字為 22 ~ 28

$$1 + 2 + 3 + \dots + 21 = \frac{(1 + 21) \times 21}{2} = 231$$

$$22 + 23 + \dots + 28 = \frac{(22 + 28) \times 7}{2} = 175$$

$$(231 + 175 \times 2) \div 7 = 83 \Rightarrow \text{每邊和}$$



6、八邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 32

填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 24

頂點圓圈的數字為 25 ~ 32

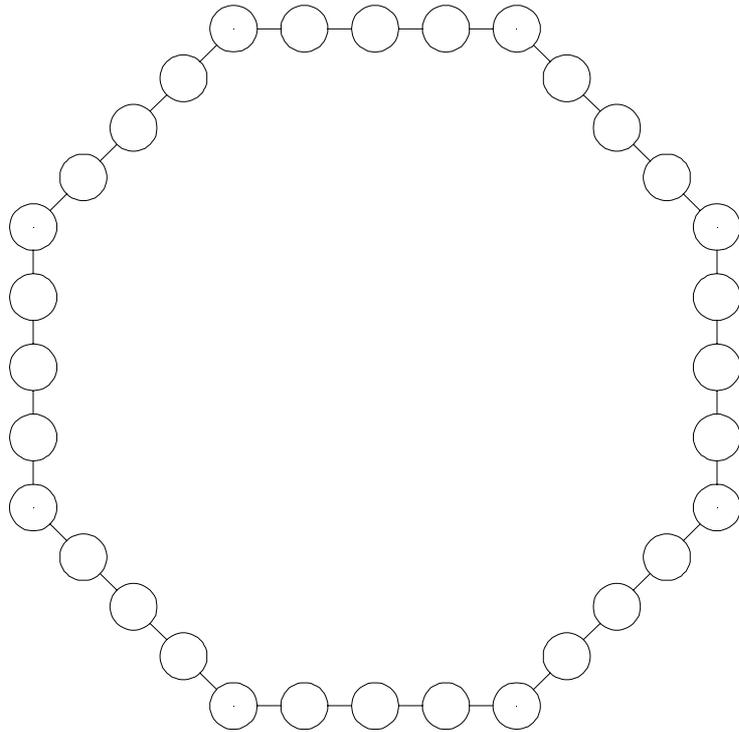
$$1 + 2 + 3 + \dots + 24 = \frac{(1 + 24) \times 24}{2} = 300$$

$$25 + 26 + \dots + 32 = \frac{(25 + 32) \times 8}{2} = 248$$

$$(300 + 248 \times 2) \div 8 = 94.5$$

其值並非正整數

偶數邊形的數字謎題無解！



7、九邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 36

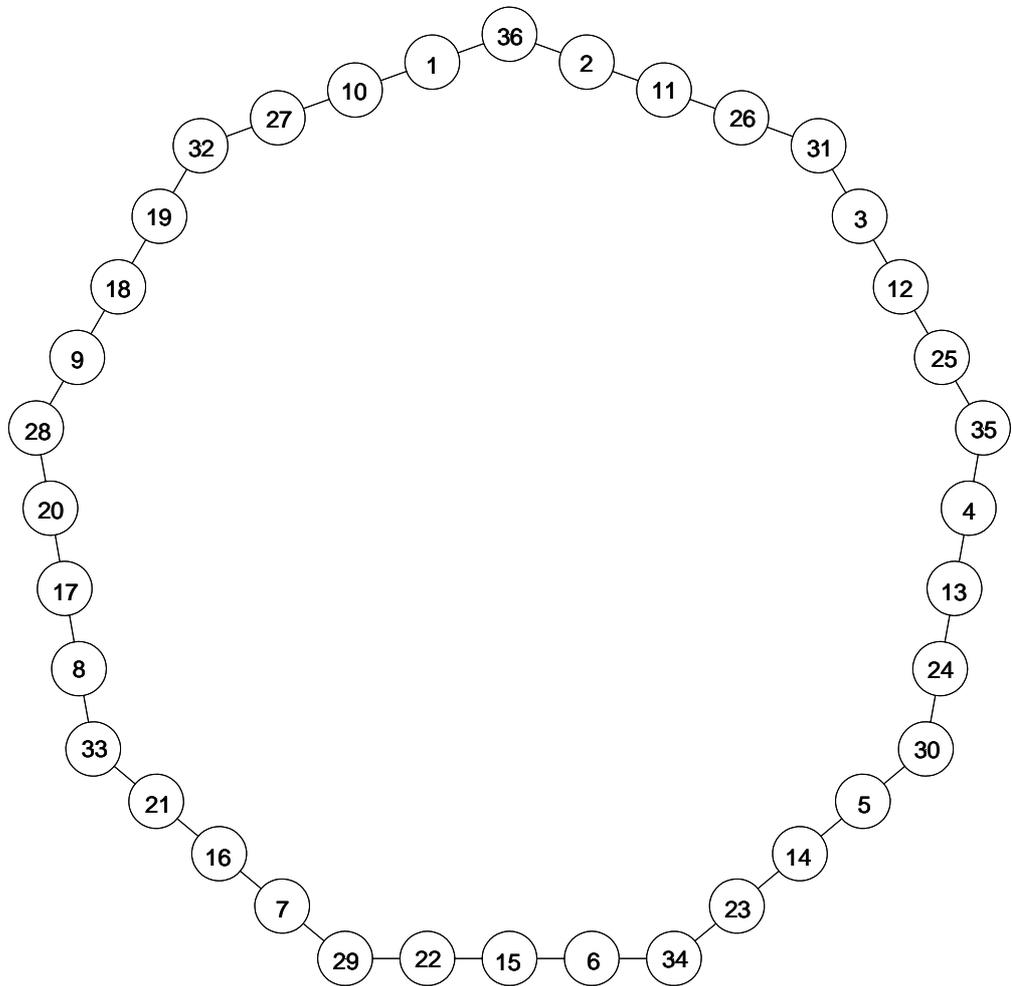
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 27

頂點圓圈的數字為 28 ~ 36

$$1 + 2 + 3 + \dots + 27 = \frac{(1 + 27) \times 27}{2} = 378$$

$$28 + 29 + \dots + 36 = \frac{(28 + 36) \times 9}{2} = 288$$

$$(378 + 288 \times 2) \div 9 = 106 \Rightarrow \text{每邊和}$$



8、十邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 40

填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 30

頂點圓圈的數字為 31 ~ 40

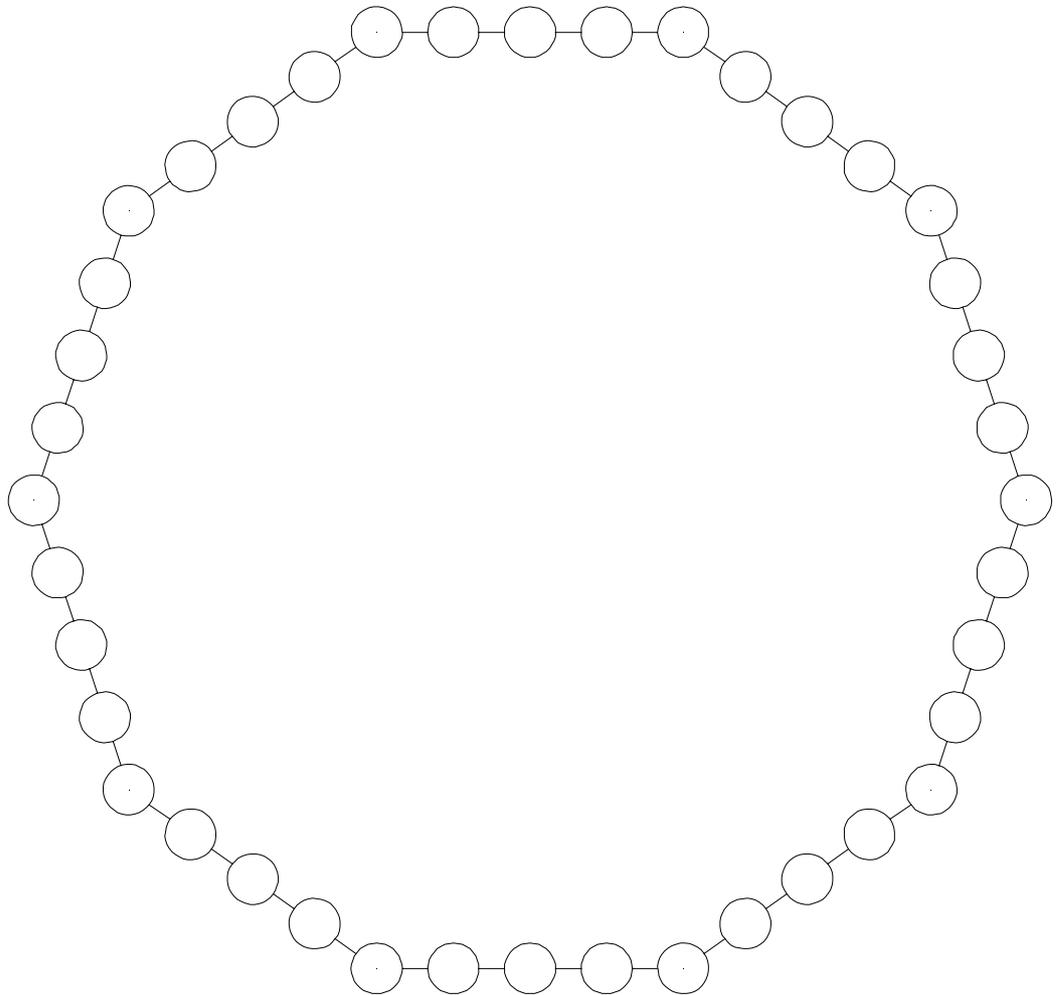
$$1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \frac{(1 + 30) \times 30}{2} = 465$$

$$31 + 32 + \dots + 40 = \frac{(31 + 40) \times 10}{2} = 355$$

$$(465 + 355 \times 2) \div 10 = 117.5$$

其值並非正整數

偶數邊形的數字謎題無解！



9、N 邊形的數字謎題

填入的數字為 $1 \sim 4N$

填入邊上圓圈的數字為 $1 \sim 3N$

頂點圓圈的數字為 $(3N+1) \sim 4N$

填入邊上圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & 1+2+3+4+\dots+3N \\ &= \frac{(1+3N) \times 3N}{2} \\ &= \frac{9N^2 + 3N}{2} \end{aligned}$$

填入頂點圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & (3N+1)+(3N+2)+(3N+3)+\dots+4N \\ &= \frac{[(3N+1)+4N] \times N}{2} \\ &= \frac{(7N+1) \times N}{2} \end{aligned}$$

每邊和：（因填入頂點圓圈位置的數字，加總時具重複性，所以要 $\times 2$ ）

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{9N^2 + 3N}{2} \right) + \left(\frac{(7N+1) \times N}{2} \right) \times 2 \right] \div N \\ &= \left(\frac{9N^2 + 3N}{2} + 7N^2 + N \right) \div N \\ &= \frac{23N + 5}{2} \end{aligned}$$

當 N 為奇數，設 $N = 2a + 1$ ($a = 1, 2, 3, \dots$)

則每邊和：

$$\begin{aligned} & \frac{23}{2}(2a+1) + \frac{5}{2} \\ &= 23a + \frac{23}{2} + \frac{5}{2} \\ &= 23a + 14 \end{aligned}$$

當圖形為奇數邊的凸多邊形時，謎題有解！

當 N 為偶數，設 $N = 2a$ ($a = 2, 3, 4, \dots$)

則每邊和：

$$\begin{aligned} & \frac{23}{2}(2a) + \frac{5}{2} \\ &= 23a + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

其值並非正整數

當圖形為偶數邊的凸多邊形時，謎題無解！

◎ 數字謎題圖解的數字填法：

1. 將 **數字 1** ~ **數字 N** 依序填入各邊邊中圓圈位置，順時鐘方向填入一圈 (或逆時鐘方向亦可)。
2. 將 **數字 N+1** ~ **數字 2N** 依序填入各邊邊中圓圈位置，從第 1 步驟中填入的第一邊開始，同方向的再填入一圈。
3. 將 **數字 2N+1** ~ **數字 3N** 依序填入各邊邊中圓圈位置，從第 1 步驟中填入的最後一邊開始，反方向的填入一圈。
4. 將 **數字 4N** 填入 **數字 1** 的所在邊 和 **數字 2** 的所在邊 所夾的頂點圓圈位置。
5. 再利用一般式求得的每邊和，依序求出各邊頂點圓圈位置的數值。
即可快速求得數字謎題之解！

(三) 每邊圓圈數為 **6** 圈的數字謎題：

1、三邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 15

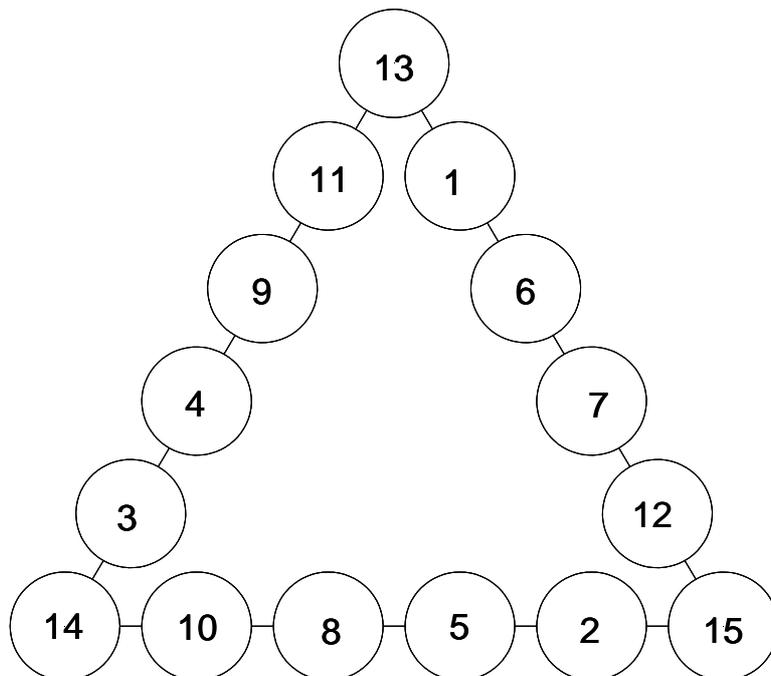
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 12

頂點圓圈的數字為 13 ~ 15

$$1+2+3+\dots+12 = \frac{(1+12) \times 12}{2} = 78$$

$$13+14+15 = 42$$

$$(78+42 \times 2) \div 3 = 54 \Rightarrow \text{每邊和}$$



2、四邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 20

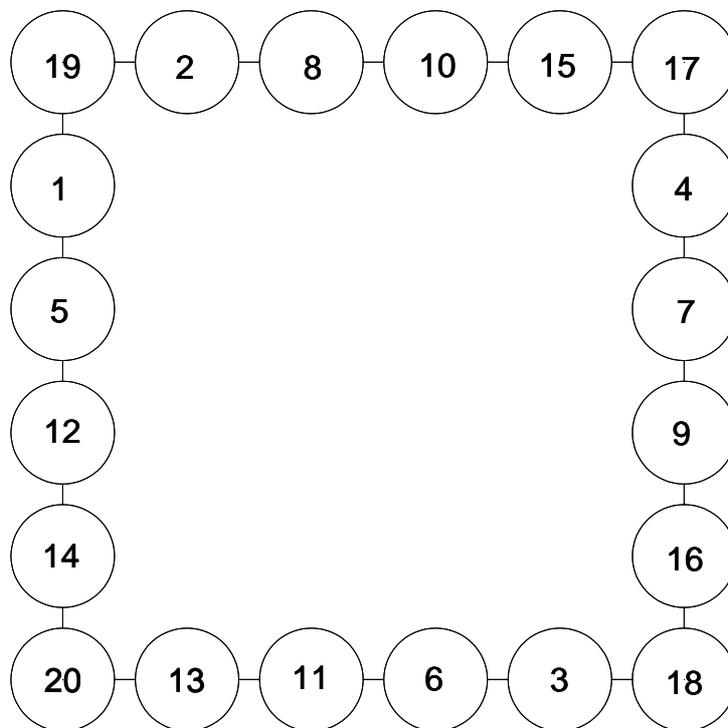
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 16

頂點圓圈的數字為 17 ~ 20

$$1+2+3+\dots+16 = \frac{(1+16)\times 16}{2} = 136$$

$$17+18+19+20 = \frac{(17+20)\times 4}{2} = 74$$

$$(136+74\times 2)\div 4 = 71 \Rightarrow \text{每邊和}$$



3、五邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 25

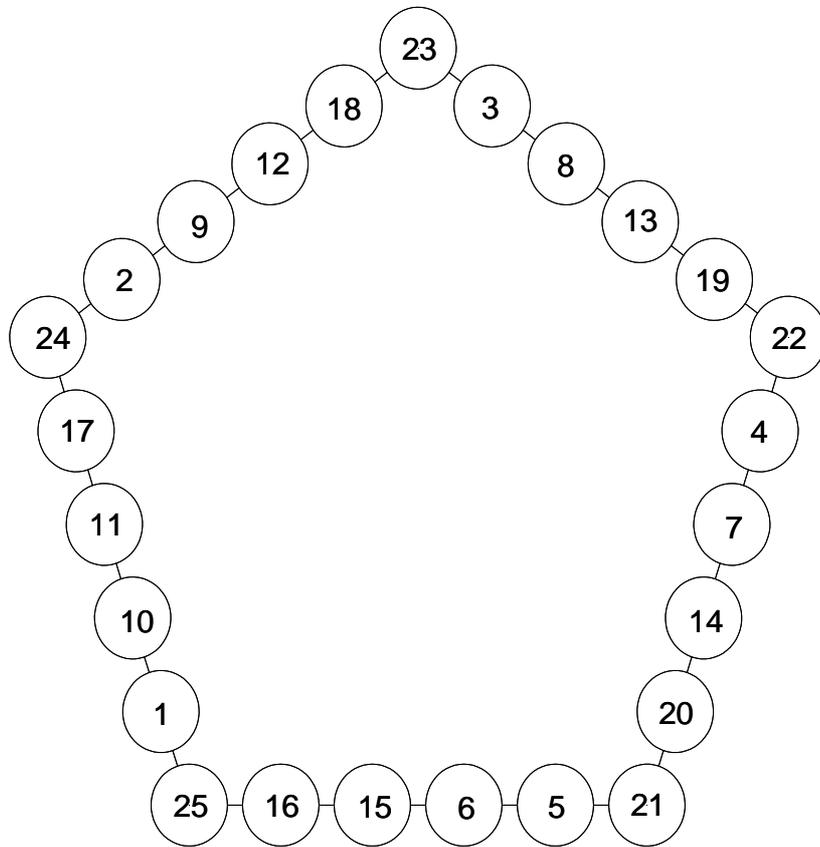
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 20

頂點圓圈的數字為 21 ~ 25

$$1+2+3+\dots+20=\frac{(1+20)\times 20}{2}=210$$

$$21+22+\dots+25=\frac{(21+25)\times 5}{2}=115$$

$$(210+115\times 2)\div 5=88\Rightarrow \text{每邊和}$$



4、六邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 30

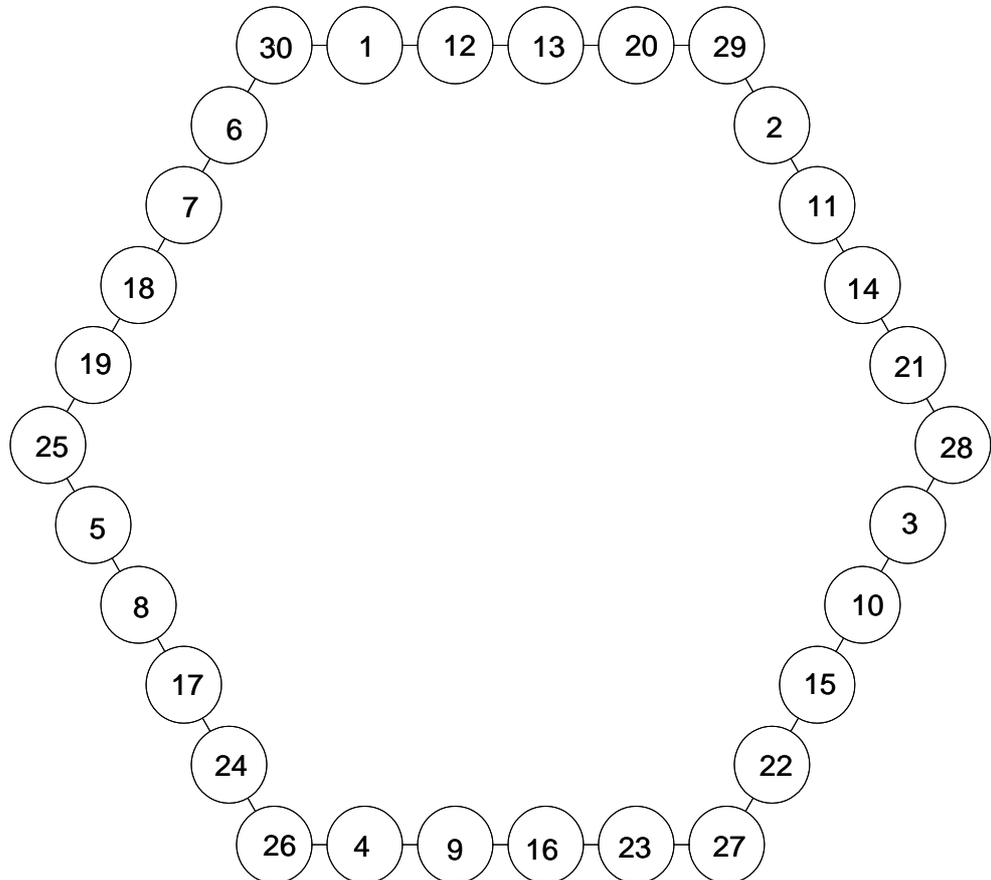
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 24

頂點圓圈的數字為 25 ~ 30

$$1 + 2 + 3 + \dots + 24 = \frac{(1 + 24) \times 24}{2} = 300$$

$$25 + 26 + \dots + 30 = \frac{(25 + 30) \times 6}{2} = 165$$

$$(300 + 165 \times 2) \div 6 = 105 \Rightarrow \text{每邊和}$$



5、七邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 35

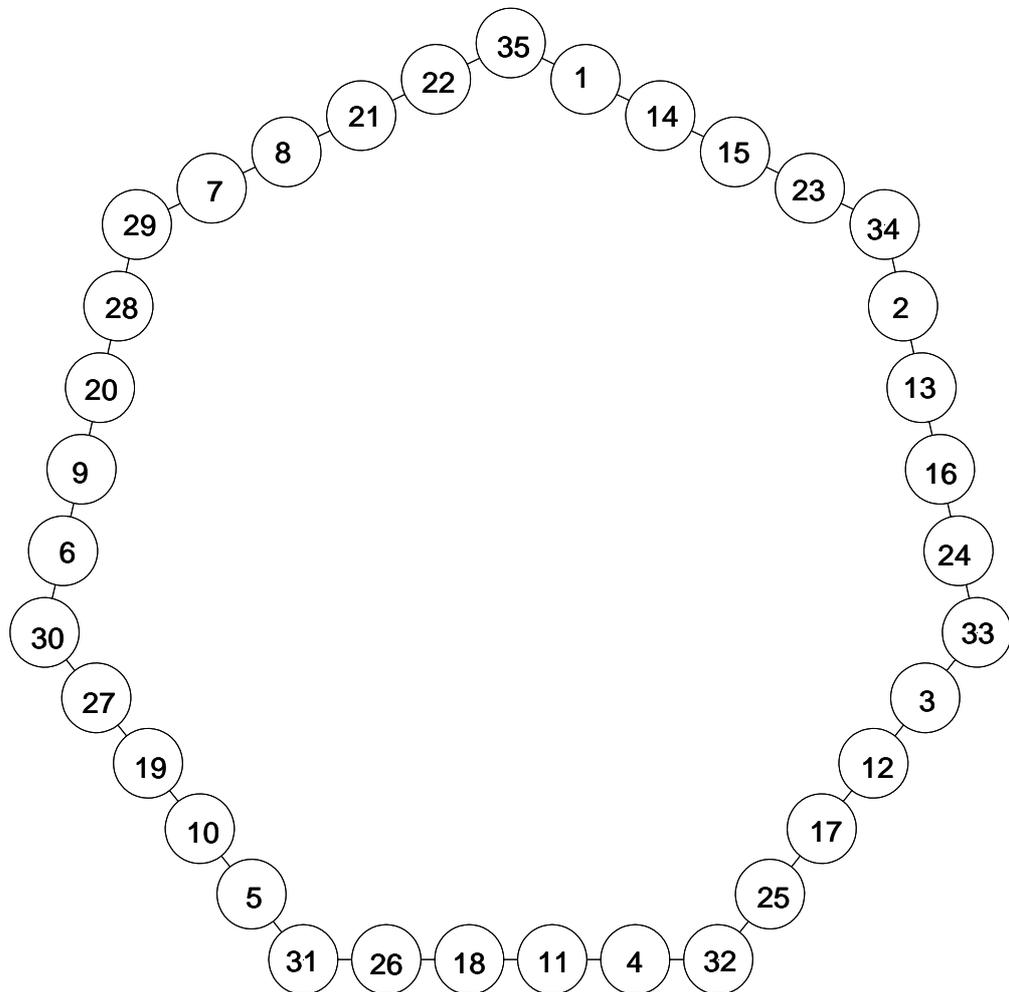
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 28

頂點圓圈的數字為 29 ~ 35

$$1 + 2 + 3 + \dots + 28 = \frac{(1 + 28) \times 28}{2} = 406$$

$$29 + 30 + \dots + 35 = \frac{(29 + 35) \times 7}{2} = 224$$

$$(406 + 224 \times 2) \div 7 = 122 \Rightarrow \text{每邊和}$$



6、八邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 40

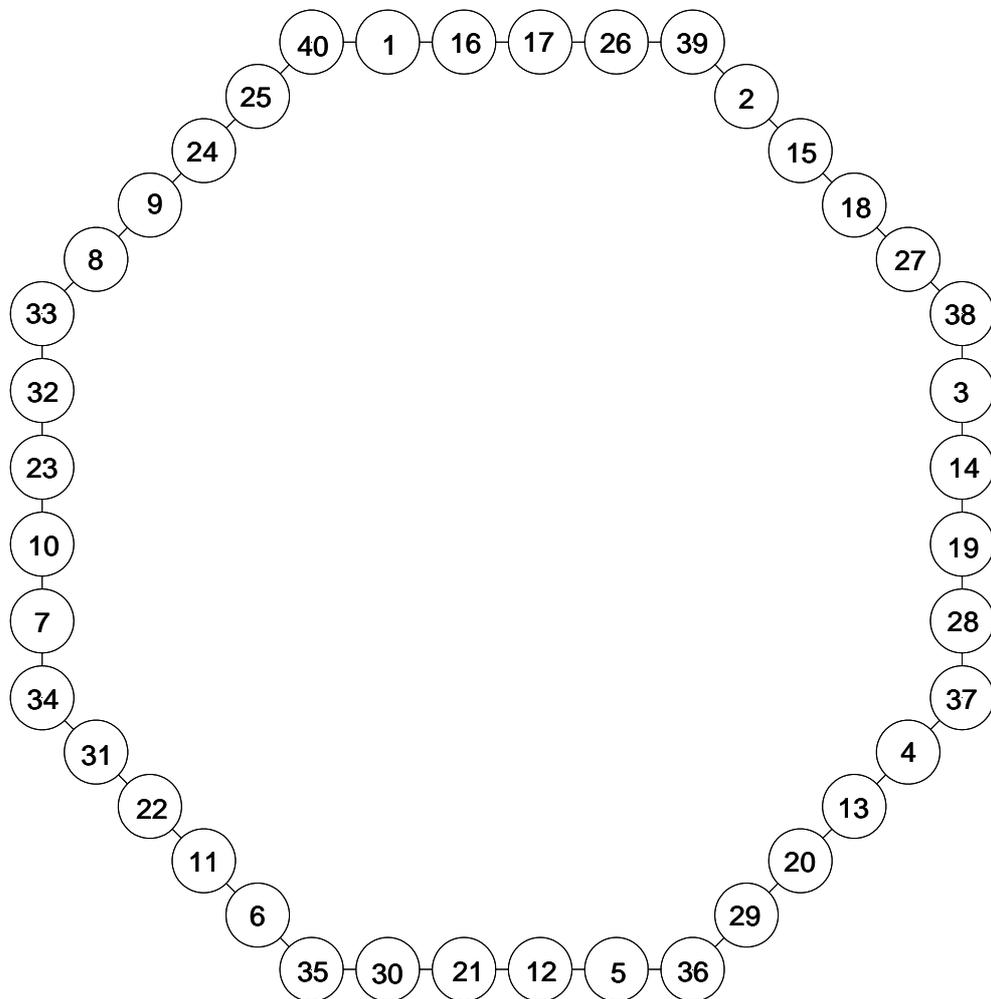
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 32

頂點圓圈的數字為 33 ~ 40

$$1+2+3+\dots+32 = \frac{(1+32)\times 32}{2} = 528$$

$$33+34+\dots+40 = \frac{(33+40)\times 8}{2} = 292$$

$$(528+292)\div 8 = 139 \Rightarrow \text{每邊和}$$



7、九邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 45

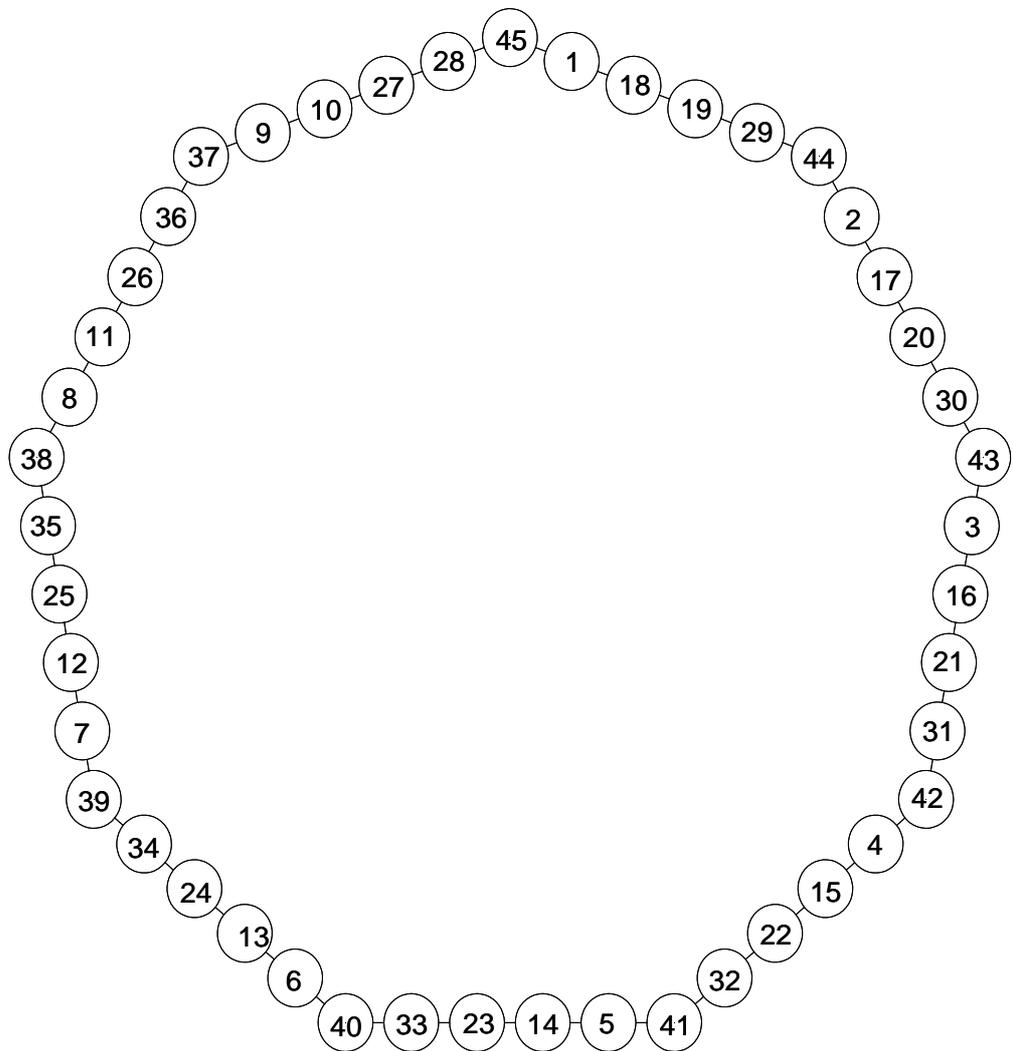
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 36

頂點圓圈的數字為 37 ~ 45

$$1+2+3+\dots+36 = \frac{(1+36)\times 36}{2} = 666$$

$$37+38+\dots+45 = \frac{(37+45)\times 9}{2} = 369$$

$$(666+369\times 2)\div 9 = 156 \Rightarrow \text{每邊和}$$



8、十邊形的數字謎題

填入的數字：1 ~ 50

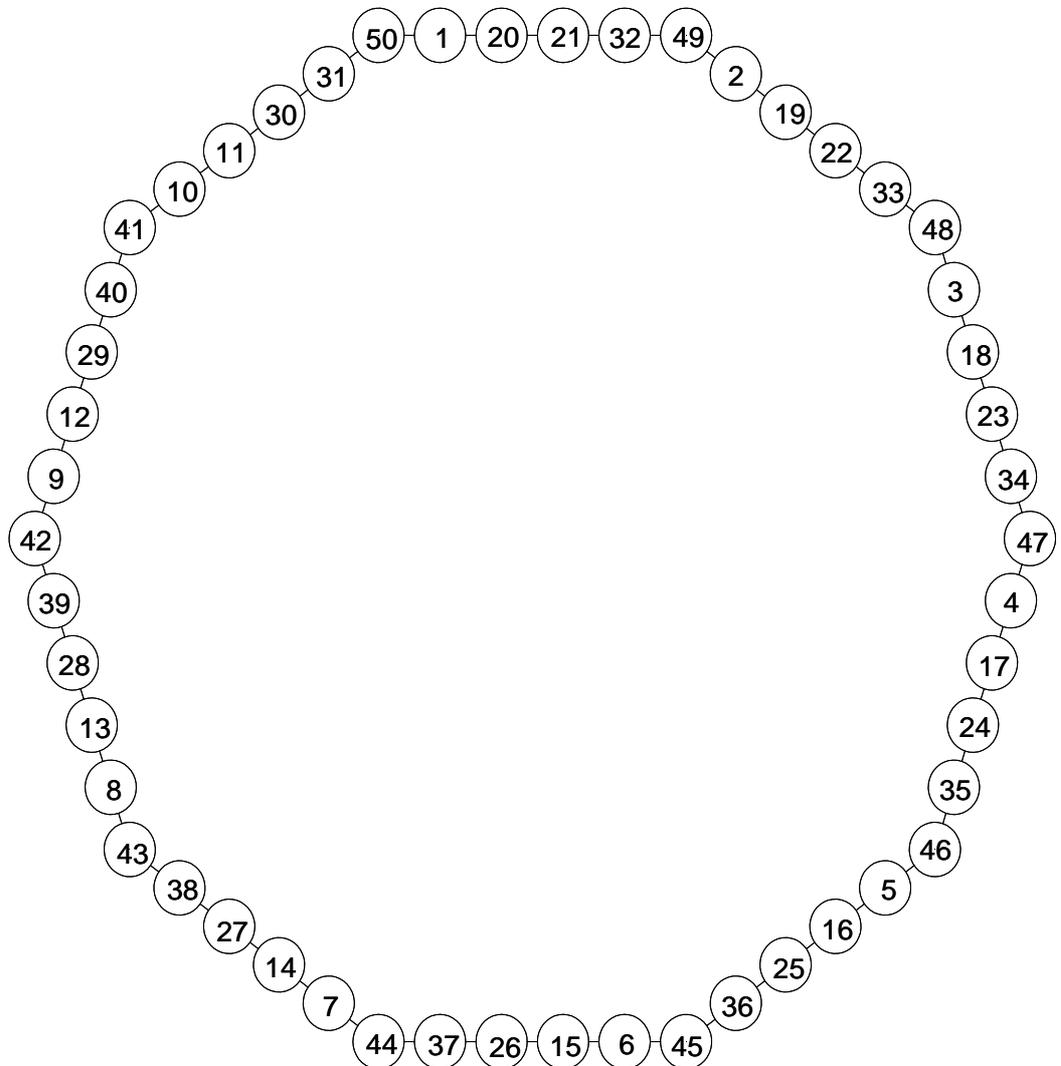
填入邊上圓圈的數字為 1 ~ 40

頂點圓圈的數字為 41 ~ 50

$$1 + 2 + 3 + \dots + 40 = \frac{(1+40) \times 40}{2} = 820$$

$$41 + 42 + \dots + 50 = \frac{(41+50) \times 10}{2} = 455$$

$$(820 + 455 \times 2) \div 10 = 173 \Rightarrow \text{每邊和}$$



9、N 邊形的數字謎題

填入的數字為 1~5N

填入邊上圓圈的數字為 1~4N

頂點圓圈的數字為 (4N+1) ~5N

填入邊上圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & 1+2+3+4+\dots+4N \\ &= \frac{(1+4N)\times 4N}{2} \\ &= 8N^2 + 2N \end{aligned}$$

填入頂點圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & (4N+1)+(4N+2)+(4N+3)+\dots+5N \\ &= \frac{[(4N+1)+5N]\times N}{2} \\ &= \frac{(9N+1)\times N}{2} \\ &= \frac{9N^2 + N}{2} \end{aligned}$$

每邊和：（因填入頂點圓圈位置的數字，加總時具重複性，所以要 $\times 2$ ）

$$\begin{aligned} & \left\{ (8N^2 + 2N) + \frac{9N^2 + N}{2} \times 2 \right\} \div N \\ &= (17N^2 + 3N) \div N \\ &= 17N + 3 \end{aligned}$$

◎ 數字謎題圖解的數字填法：

1. 將 $\boxed{\text{數字 } 4N+1}$ ~ $\boxed{\text{數字 } 5N}$ 依序填入頂點圓圈位置，順時鐘方向填入一圈（或逆時鐘方向亦可）。
2. 將 $\boxed{\text{數字 } 1}$ ~ $\boxed{\text{數字 } N}$ 依序填入各邊邊中圓圈位置，從第 1 步驟中 $\boxed{\text{數字 } 5N}$ 和 $\boxed{\text{數字 } 5N-1}$ 所夾的邊開始，同方向的填入一圈。
3. 將 $\boxed{\text{數字 } N+1}$ ~ $\boxed{\text{數字 } 2N}$ 依序填入各邊邊中圓圈位置，從第 2 步驟中填入的最後一邊開始，反方向的填入一圈。
4. 將 $\boxed{\text{數字 } 2N+1}$ ~ $\boxed{\text{數字 } 3N}$ 依序填入各邊邊中圓圈位置，從第 3 步驟中填入的最後一邊開始，再反方向(輪回原方向)的填入一圈。
5. 將 $\boxed{\text{數字 } 3N+1}$ ~ $\boxed{\text{數字 } 4N}$ 依序填入各邊邊中圓圈位置，從第 4 步驟中填入的最後一邊開始，同方向的填入一圈。

即可快速求得數字謎題之解！

(四) 每邊圓圈數為 k 圈的 N 邊形數字謎題

填入的數字：1 ~ $(k-1)N$ ，共 $(k-1)N$ 個數字

填入邊上圓圈的數字為 1 ~ $(k-2)N$ ，共 $(k-2)N$ 個數字

頂點圓圈的數字為 $(k-2)N+1$ ~ $(k-1)N$ ，共 N 個數字

填入邊上圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & \frac{[1 + (k-2)N] \times (k-2)N}{2} \\ &= \frac{(k-2)N + (k-2)^2 N^2}{2} \\ &= \frac{kN - 2N + k^2 N^2 - 4kN^2 + 4N^2}{2} \end{aligned}$$

填入頂點圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & \frac{\{ [(k-2)N + 1] + (k-1)N \} \times N}{2} \\ &= \frac{(kN - 2N + 1 + kN - N) \times N}{2} \\ &= \frac{(2kN - 3N + 1) \times N}{2} \\ &= \frac{2kN^2 - 3N^2 + N}{2} \end{aligned}$$

每邊和：（因填入頂點圓圈位置的數字，加總時具重複性，所以要 $\times 2$ ）

$$\begin{aligned} & \left[\frac{kN - 2N + k^2 N^2 - 4kN^2 + 4N^2}{2} + \left(\frac{2kN^2 - 3N^2 + N}{2} \right) \times 2 \right] \div N \\ &= \left(\frac{kN - 2N + k^2 N^2 - 4kN^2 + 4N^2 + 4kN^2 - 6N^2 + 2N}{2} \right) \div N \\ &= \left(\frac{k^2 N^2 - 2N^2 + kN}{2} \right) \div N \\ &= \frac{(k^2 - 2)N + k}{2} \end{aligned}$$

四、「填入數字改為等差數列」，在不同圓圈數的 N 邊形數字謎題中，求每邊和

(一) 每邊圓圈數為 3 圈時的 N 邊形數字謎題，求每邊和：

填入 $2N$ 個數字（數字不一定連續，但取其為等差數列）

取第一個數字 a_0 ，公差為 d

則填入數字為 $a_0 \sim [a_0 + (2N - 1)d]$

填入邊上圓圈位置的數字為 $a_0 \sim [a_0 + (N - 1)d]$

共 N 個數字

頂點圓圈位置的數字為 $(a_0 + Nd) \sim [a_0 + (2N - 1)d]$

共 N 個數字

填入邊上圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d) + \dots + [a_0 + (N - 1)d] \\ &= \frac{[a_0 + a_0 + (N - 1)d] \times N}{2} \\ &= \frac{[2a_0 + (N - 1)d] \times N}{2} \end{aligned}$$

填入頂點圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & (a_0 + Nd) + [a_0 + (N + 1)d] + \dots + [a_0 + (2N - 1)d] \\ &= \frac{\{ (a_0 + Nd) + [a_0 + (2N - 1)d] \} \times N}{2} \\ &= \frac{[2a_0 + (3N - 1)d] \times N}{2} \end{aligned}$$

每邊和：

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{[2a_0 + (N - 1)d] \times N}{2} + \frac{[2a_0 + (3N - 1)d] \times N}{2} \times 2 \right\} \div N \\ &= \left[a_0 + \frac{(N - 1)d}{2} \right] + [2a_0 + (3N - 1)d] \\ &= 3a_0 + \frac{(7N - 3)d}{2} \end{aligned}$$

(二) 每邊圓圈數為 4 圈時的 N 邊形數字謎題，求每邊和：

填入 $3N$ 個數字（數字不一定連續，但取其為等差數列）

取第一個數字 a_0 ，公差為 d

則填入數字為 $a_0 \sim [a_0 + (3N - 1)d]$

填入邊上圓圈位置的數字為 $a_0 \sim [a_0 + (2N - 1)d]$

共 $2N$ 個數字

頂點圓圈位置的數字為 $(a_0 + 2Nd) \sim [a_0 + (3N - 1)d]$

共 N 個數字

填入邊上圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d) + \dots + [a_0 + (2N - 1)d] \\ &= \frac{[a_0 + a_0 + (2N - 1)d] \times 2N}{2} \\ &= [2a_0 + (2N - 1)d] \times N \end{aligned}$$

填入頂點圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & (a_0 + 2Nd) + [a_0 + (2N - 1)d] + \dots + [a_0 + (3N - 1)d] \\ &= \frac{\{(a_0 + 2Nd) + [a_0 + (3N - 1)d]\} \times N}{2} \\ &= \frac{[2a_0 + (5N - 1)d] \times N}{2} \end{aligned}$$

每邊和：

$$\begin{aligned} & \left\{ [2a_0 + (2N - 1)d] \times N + \frac{[2a_0 + (5N - 1)d] \times N}{2} \times 2 \right\} \div N \\ &= [2a_0 + (2N - 1)d] + [2a_0 + (5N - 1)d] \\ &= 4a_0 + (7N - 2)d \end{aligned}$$

(三) 每邊圓圈數為 5 圈時的 N 邊形數字謎題，求每邊和：

填入 $4N$ 個數字（數字不一定連續，但取其為等差數列）

取第一個數字 a_0 ，公差為 d

則填入數字為 $a_0 \sim [a_0 + (4N - 1)d]$

填入邊上圓圈位置的數字為 $a_0 \sim [a_0 + (3N - 1)d]$

共 $3N$ 個數字

頂點圓圈位置的數字為 $(a_0 + 3Nd) \sim [a_0 + (4N - 1)d]$

共 N 個數字

填入邊上圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d) + \dots + [a_0 + (3N - 1)d] \\ &= \frac{[a_0 + a_0 + (3N - 1)d] \times 3N}{2} \\ &= \frac{[2a_0 + (3N - 1)d] \times 3N}{2} \end{aligned}$$

填入頂點圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & (a_0 + 3Nd) + [a_0 + (3N + 1)d] + \dots + [a_0 + (4N - 1)d] \\ &= \frac{\{(a_0 + 3Nd) + [a_0 + (4N - 1)d]\} \times N}{2} \\ &= \frac{[2a_0 + (7N - 1)d] \times N}{2} \end{aligned}$$

每邊和：

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{[2a_0 + (3N - 1)d] \times 3N}{2} + \frac{[2a_0 + (7N - 1)d] \times N}{2} \times 2 \right\} \div N \\ &= \left[3a_0 + \frac{(9N - 3)d}{2} \right] + [2a_0 + (7N - 1)d] \\ &= 5a_0 + \frac{(23N - 5)d}{2} \end{aligned}$$

(四) 每邊圓圈數為 k 圈時的 N 邊形數字謎題，求每邊和：

填入 $(k-1)N$ 個數字（數字不一定連續，但取其為等差數列）

取第一個數字 a_0 ，公差為 d

則填入數字為 $a_0 \sim \{ a_0 + [(k-1)N - 1]d \}$

填入邊上圓圈位置的數字為 $a_0 \sim \{ a_0 + [(k-2)N - 1]d \}$

共 $(k-2)N$ 個數字

頂點圓圈位置的數字為 $[a_0 + (k-2)Nd] \sim \{ a_0 + [(k-1)N - 1]d \}$

共 N 個數字

填入邊上圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d) + \dots + \{ a_0 + [(k-2)N - 1]d \} \\ &= \frac{\{ a_0 + a_0 + [(k-2)N - 1]d \} \times (k-2)N}{2} \\ &= \frac{(2a_0 + kNd - 2Nd - d) \times (k-2)N}{2} \end{aligned}$$

填入頂點圓圈位置的數字總和：

$$\begin{aligned} & \{ a_0 + (k-2)Nd \} + \{ a_0 + [(k-2)N + 1]d \} + \dots + \{ a_0 + [(k-1)N - 1]d \} \\ &= \frac{\{ \{ a_0 + (k-2)Nd \} + \{ a_0 + [(k-1)N - 1]d \} \} \times N}{2} \\ &= \frac{(2a_0 + 2kNd - 3Nd - d) \times N}{2} \end{aligned}$$

每邊和：

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{(2a_0 + kNd - 2Nd - d) \times (k-2)N}{2} + \frac{(2a_0 + 2kNd - 3Nd - d) \times N}{2} \times 2 \right\} \div N \\ &= \frac{k(2a_0 + kNd - 2Nd - d) - 2(2a_0 + kNd - 2Nd - d) + 2(2a_0 + 2kNd - 3Nd - d)}{2} \\ &= \frac{k(2a_0 + kNd - 2Nd - d) + 2kNd - 2Nd}{2} \\ &= \frac{2ka_0 + k^2Nd - kd - 2Nd}{2} \\ &= ka_0 + \frac{[(k^2 - 2)N - k]d}{2} \end{aligned}$$

陸、研究結果

一、「每邊邊上圓圈數的改變」，在不同的 N 邊形數字謎題中，每邊和之一般式：

(一) 每邊圓圈數為 4 圈：每邊和= $7N+2$

(二) 每邊圓圈數為 5 圈：每邊和= $\frac{23N+5}{2}$

(N 為奇數時謎題有解，偶數時謎題無解)

(三) 每邊圓圈數為 6 圈：每邊和= $17N+5$

(四) 每邊圓圈數為 k 圈：每邊和= $\frac{(k^2-2)N+k}{2}$

k 為奇數：N 為奇數時，謎題有解

N 為偶數時，謎題無解

K 為偶數：謎題均有解

二、「填入數字改爲等差數列」，在不同圓圈數的 N 邊形數字謎題中，每邊和之一般式：

(一) 每邊圓圈數為 3 圈：每邊和= $3a_0 + \frac{(7N-3)d}{2}$

(N、d 同時為奇數，謎題無解)

(二) 每邊圓圈數為 4 圈：每邊和= $4a_0 + (7N-2)d$

(三) 每邊圓圈數為 5 圈：每邊和= $5a_0 + \frac{(23N-5)d}{2}$

(N、d 同時為奇數，謎題無解)

(四) 每邊圓圈數為 k 圈：每邊和= $ka_0 + \frac{[(k^2-2)N-k]d}{2}$

k 為奇數：N、d 同時為奇數，謎題無解

k 為偶數：謎題均有解

三、「填入數字的方法」：

快速求得謎題解的填入數字方法，可由多個謎題例子中得知，其中含有規律性，以順時鐘或逆時鐘方向依序填入數字，同時搭配每邊和，即可獲得謎題解。

柒、結論

從未想過「杜登尼的七邊形數字謎題」，能引發我們去找到這麼多不同型式的多邊形數字謎題，去年研究這個主題時，未能仔細剖析問題的影響因素，以致發展性受到限制，今年再次研究該主題，在老師的引導下，重新思考數字謎題的變項，並針對變項一一求得謎題解，推導出一般式，真的讓人為之一振。

現在，我們可以創造屬於自己的數字謎題，考考爸媽、同學，讓大家一起來玩玩找數字謎題的解囉！

捌、參考書目及其他

理查·菲立普(Richard Phillips)著，洪萬生等譯。數字邏輯 101。初版。臺北市。究竟出版社。第 50 頁。2004[民 93]。