

摘要

本主題使用動態幾何繪圖軟體 GSP，旨在研究蜂窩的形狀，研究出的結果：一、周長固定的正 n 邊形， n 越大，面積越大。二、周長固定時，圓面積大於所有正多邊形。三、正六邊形蜂窩所利用的空間最大。最後依研究結果，對後續研究提出建議。

第一章 緒論

第一節 研究動機

有一天，爸爸跟媽媽帶我去爬山，沿途經過養蜂人家，竟然看到有人在「玩」蜜蜂，忍不住好奇心就走近瞧瞧，那裡有成千上萬隻的蜜蜂繞著蜂窩飛來飛去。一走近才發現，蜂箱裡佈滿蜂窩，其形狀竟然是正六邊形，而且它的開口都還微微向上，問那伯伯為什麼蜜蜂要把他們的房子建成這樣，他也不清楚。於是上網查詢，想不到蜜蜂竟然這麼聰明，因為六邊形的利用空間大，而且它的開口微微向上仰是爲了不讓蜂蜜流出來，不過卻很好奇，爲什麼正六邊形的利用空間大？三邊形不行嗎？四邊形不行嗎？

到了學校，將問題提出與組員討論，大家都覺得是個不錯的題目，於是就決定進行研究。

第二節 研究目的

基於上述的理由，本主題旨在研究蜂窩的空間利用，研究目的爲：

- 一、周長固定的正 n 邊形， n 越大，面積越大。
- 二、周長固定時，圓面積大於所有正多邊形。
- 三、正六邊形蜂窩所利用的空間最大。

第三節 研究範圍

- 一、探討周長固定下（24cm），正三邊形、正四邊形、正五邊形、正六邊形、正八邊形及圓面積的比較
- 二、正三邊形、正四邊形、正五邊形、正六邊形、正八邊形及圓，同圖形連接後的空間利用

第二章 研究過程與方法

第一節 研究設備與器材

紙、筆、直尺、圓規、電腦、動態幾何繪圖軟體 GSP

第二節 研究過程

開始作科展時，大家輪流翻閱數十本與數學有關的書籍，歷經多次討論，卻還是毫無頭緒，直到某位組員在爬山時發現蜂窩的形狀，讓大家產生興趣，才決定了研究的方向。

雖然古希臘數學家 Zenodorus 就已經證明出來「周長固定的 n 邊形，以正 n 邊形的面積最大，而且 n 越大，面積越大」及「周長固定時，圓面積大於所有正多邊形」兩點，但我們嘗試利用更簡單的方式〈所學範圍〉證明出來

在研究過程，我們常常利用週六來上一些尚未學到的課程，如：學習如何利用尺規作圖、三角形的三心。但卻因為某些多邊形無法用現有的知識測量面積，而使研究曾一度陷入困境，後來想到是否可利用電腦軟體？以及要用哪一套軟體呢？請問老師後，在網路上搜尋動態幾何繪圖軟體 GSP，並開始研究如何操作，再利用這套軟體去作線段平分或奇數等分、正多邊形的繪圖、縮放及測量面積，在經由這一大串的研究之後，我們開始討論如何連接，並得到最後的研究結果。

本研究的進度如下表：

| 項目 \ 時間 | 96年 | | | | | 97年 | | | |
|---------|-------|----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 8月 | 9月 | 10月 | 11月 | 12月 | 1月 | 2月 | 3月 | 4月 |
| 閱讀數學書籍 | ————— | | | | | | | | |
| 擬定研究主題 | | | | | ————— | | | | |
| 蒐集相關資料 | | | | | | ————— | ————— | | |
| 繪圖及比較面積 | | | | | | | | ————— | |
| 編寫研究報告 | | | | | | | | | ————— |

第三章 繪圖方法

第一節 奇數等分的繪製

壹、線段平分三等分

作圖步驟：

1. 畫一條 24 公分的 \overline{AB}
2. 以 A 為端點，取一適當長畫 \overline{AC}

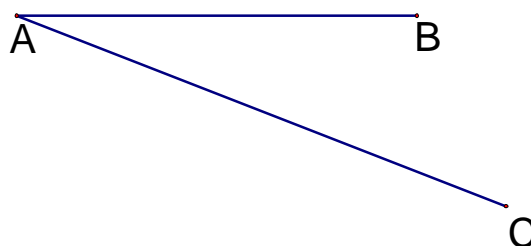
步驟一

線段 $AB=24\text{CM}$



步驟二

線段 $AB=24\text{CM}$

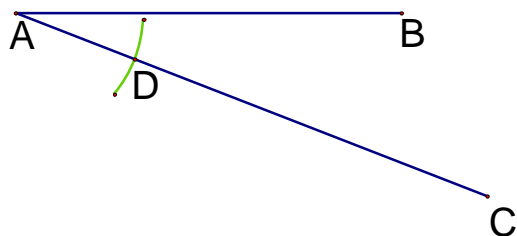


3. 以 A 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 \overline{AC} 於 D 點

4. 以 D 點為圓心， \overline{AD} 為半徑畫弧，交 \overline{AC} 於 E 點

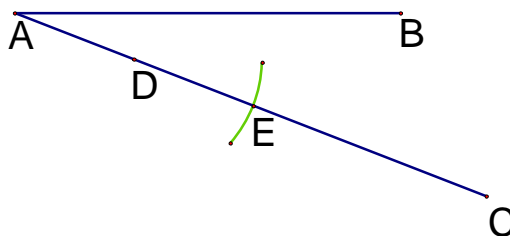
步驟三

線段 $AB=24\text{CM}$



步驟四

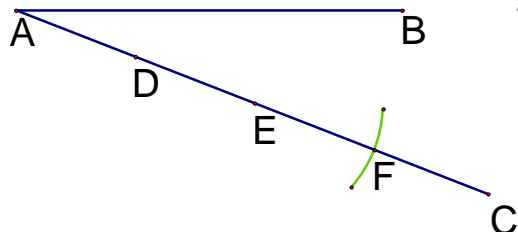
線段 $AB=24\text{CM}$



- 以 E 點為圓心， \overline{AD} 為半徑畫弧，交 \overline{AC} 於 F 點
- 連接 B、F 兩點

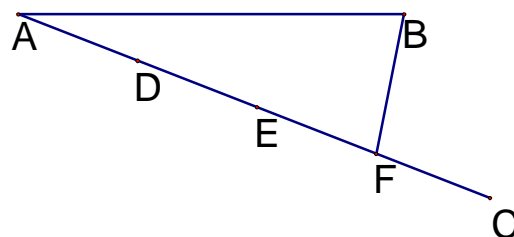
步驟五

線段 $AB=24\text{CM}$



步驟六

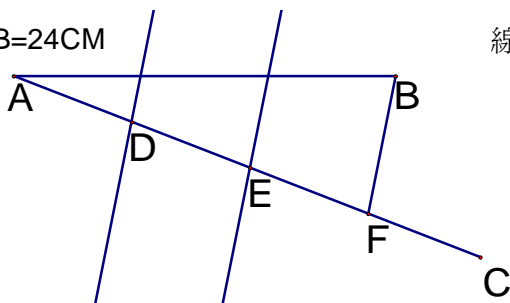
線段 $AB=24\text{CM}$



- 分別以 D、E 兩點作平行線，使兩線段平行 \overline{BF}
- 兩線段分別交 \overline{AB} 於 G、H 兩點

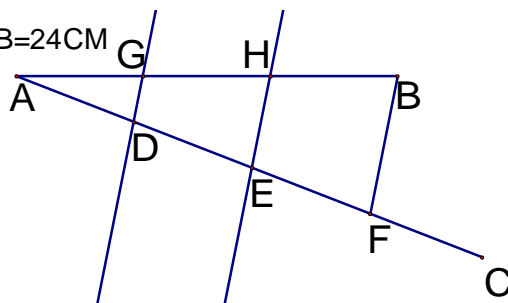
步驟七

線段 $AB=24\text{CM}$



步驟八

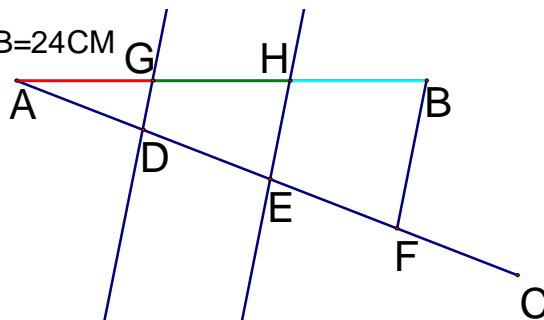
線段 $AB=24\text{CM}$



- \overline{AG} 、 \overline{GH} 、 \overline{HB} 即為所求

步驟九

線段 $AB=24\text{CM}$



貳、線段平分五等分

作圖步驟：

1. 畫一條 24 公分的 \overline{AB}
2. 以 A 為端點，取一適當長畫 \overline{AC}

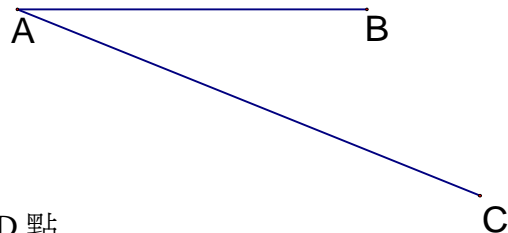
步驟一

線段 $AB=24\text{CM}$



步驟二

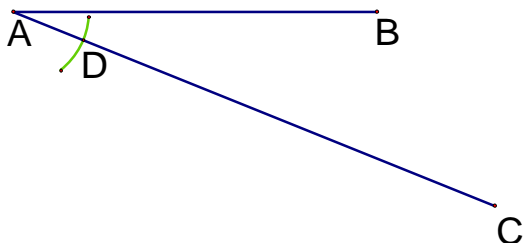
線段 $AB=24\text{CM}$



3. 以 A 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 \overline{AC} 於 D 點
4. 以 D 點為圓心， \overline{AD} 為半徑畫弧，交 \overline{AC} 於 E 點

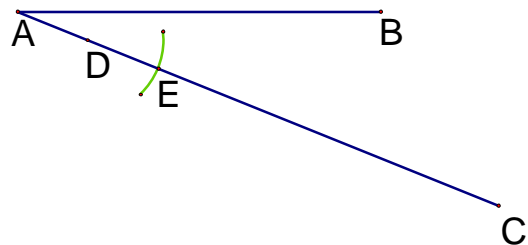
步驟三

線段 $AB=24\text{CM}$



步驟四

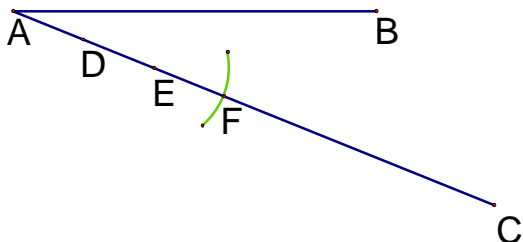
線段 $AB=24\text{CM}$



5. 以 E 點為圓心， \overline{AD} 為半徑畫弧，交 \overline{AC} 於 F 點
6. 以 F 點為圓心， \overline{AD} 為半徑畫弧，交 \overline{AC} 於 G 點

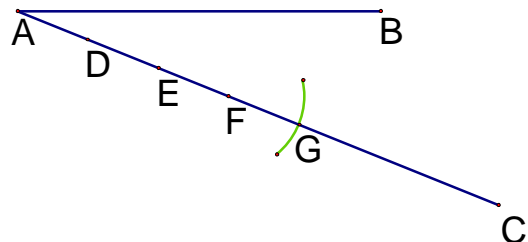
步驟五

線段 $AB=24\text{CM}$

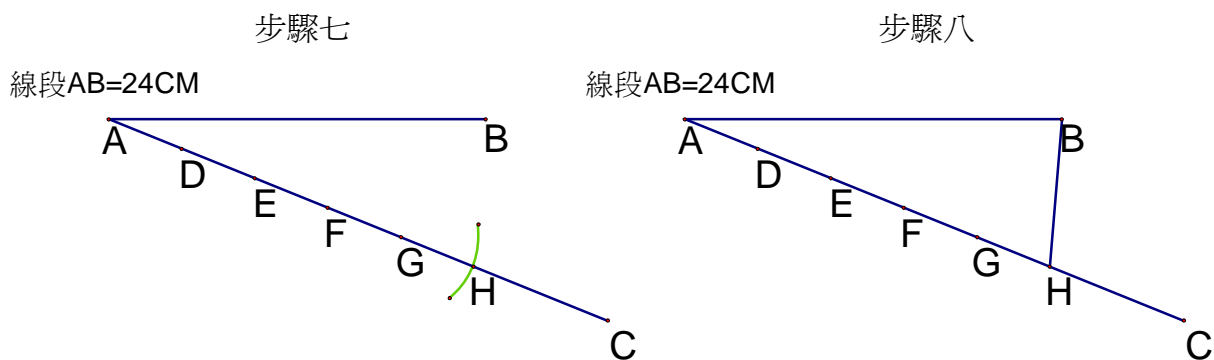


步驟六

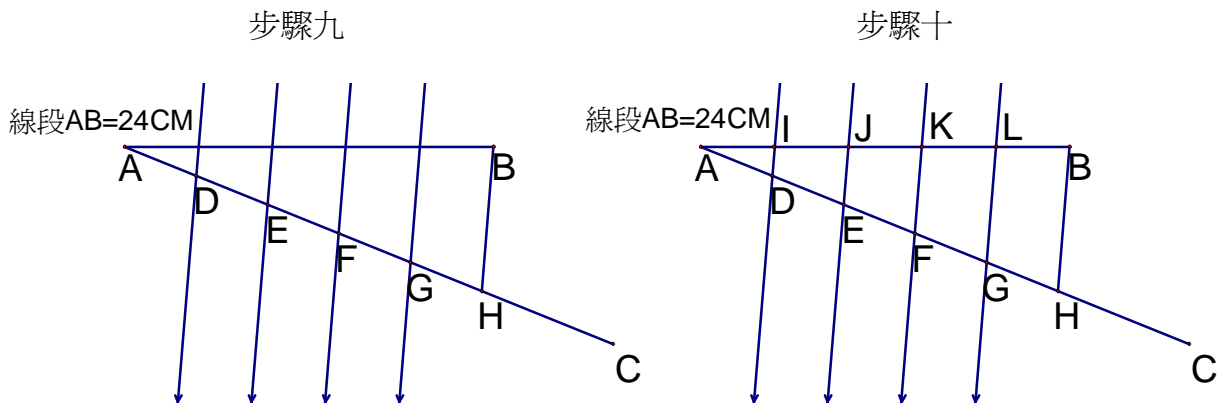
線段 $AB=24\text{CM}$



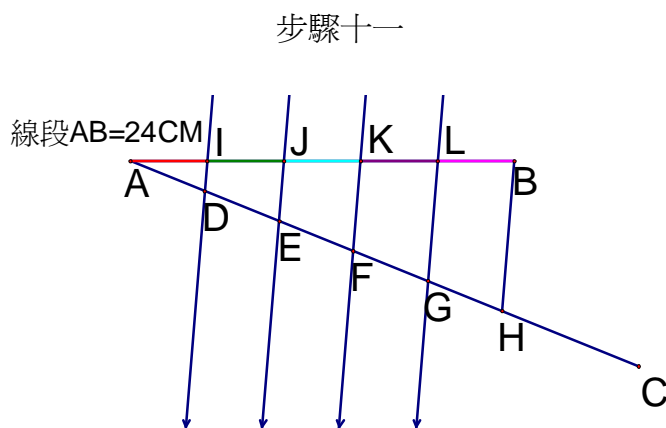
7. 以 G 點為圓心， \overline{AD} 為半徑畫弧，交 \overline{AC} 於 H 點
8. 連接 B、H 兩點



9. 分別以 D、E、F、G 四點作平行線，使四條線段平行 \overline{BH}
10. 四條線段分別交 \overline{AB} 於 I、J、K、L 四點



11. \overline{AI} 、 \overline{IJ} 、 \overline{JK} 、 \overline{KL} 、 \overline{LB} 即為所求



第二節 正多邊形的繪製

壹、正三邊形

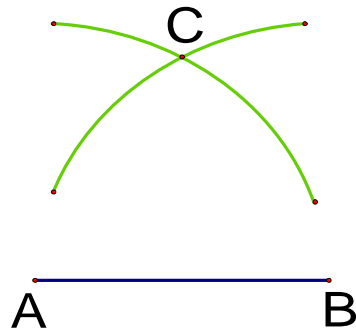
作圖步驟：

1. 畫一 \overline{AB}
2. 分別以 A、B 為圓心， \overline{AB} 為半徑畫弧，兩弧交 \overline{AB} 上方於一點 C
3. 連接點 A、B、C
4. 三邊形 ABC 即為正三邊形

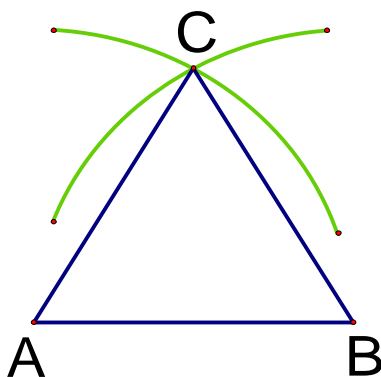
步驟一



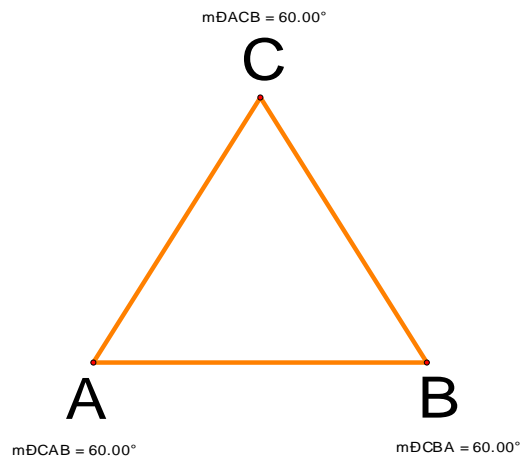
步驟二



步驟三



步驟四



縮放

1. 固定 24 公分長的線段，作三等分的切割，測量出每等分的長度
2. 利用 GSP 軟體的「變換」進行「標定比值」後，再回至「變換」進行「放縮」，使三邊形每邊的長度與所測量之長度相同
3. 所得之圖形即為周長 24 公分的正三邊形

貳、正四邊形

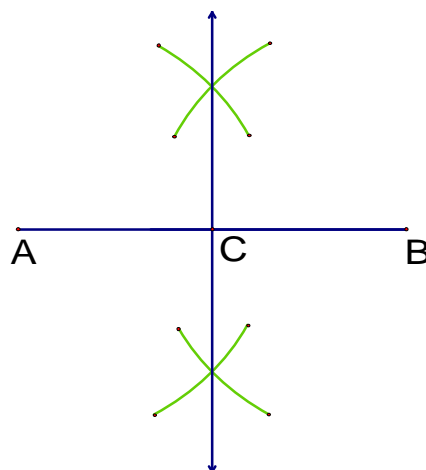
作圖步驟：

1. 畫一 \overline{AB}
2. 作 \overline{AB} 的中垂線，得到中點 C

步驟一

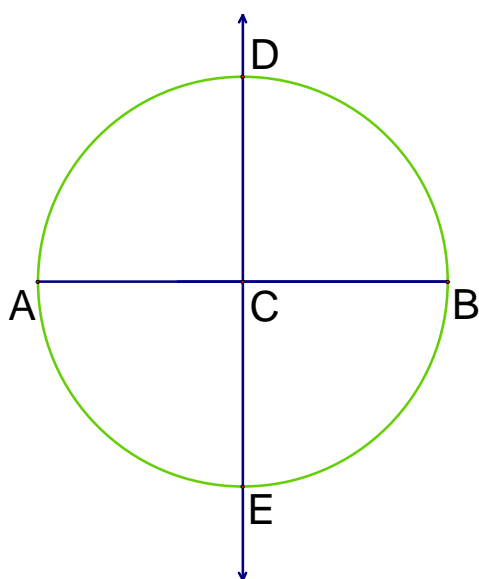


步驟二

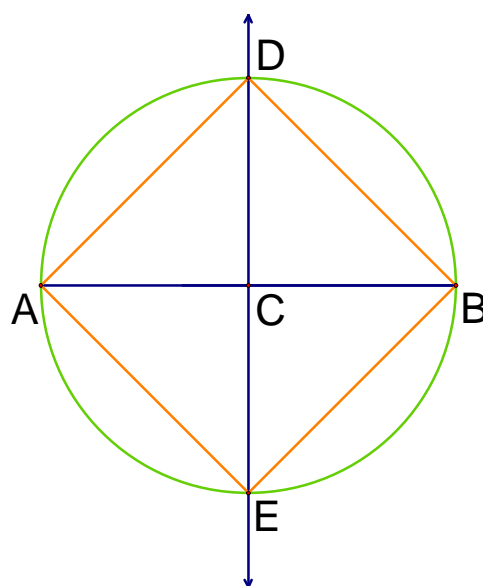


3. 以 C 點為圓心， \overline{AC} 為半徑畫圓，交 \overline{AB} 的中垂線於 D 、 E 兩點
4. 連接點 A 、 D 、 B 、 E

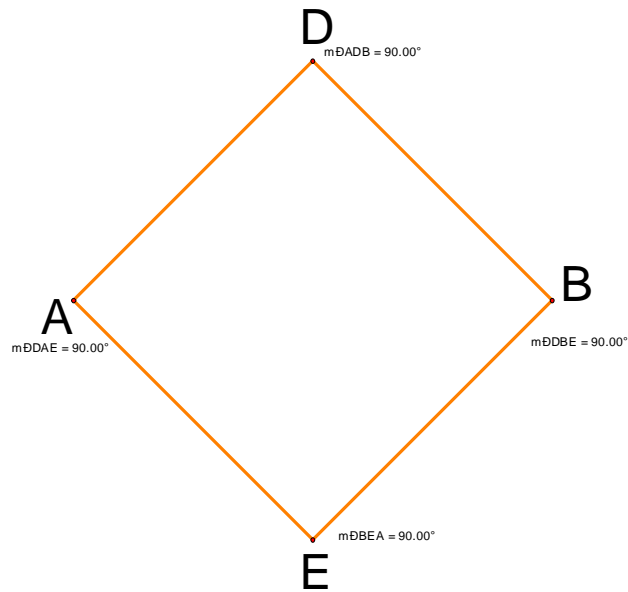
步驟三



步驟四



5. 四邊形 ADBE 即為正四邊形



縮放

1. 固定 24 公分長的線段，作四等分的切割，測量出每等分的長度
2. 利用 GSP 軟體的「變換」進行「標定比值」後，再回至「變換」進行「放縮」，使四邊形每邊的長度與所測量之長度相同
3. 所得之圖形即為周長 24 公分的正四邊形

參、正五邊形

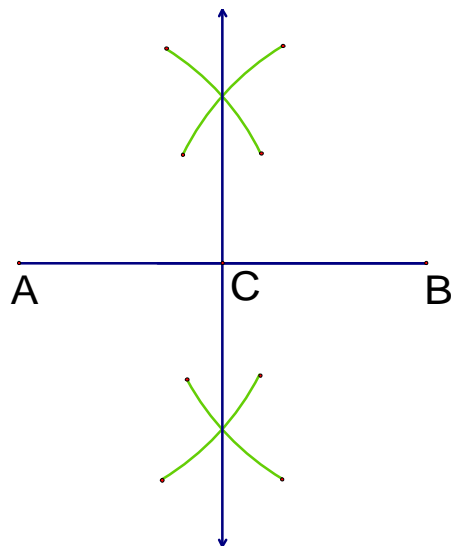
作圖步驟：

1. 畫一 \overline{AB}
2. 作 \overline{AB} 的中垂線，得到中點 C

步驟一

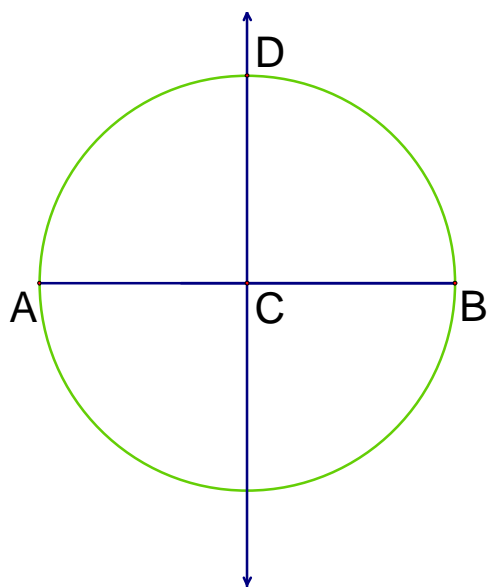


步驟二

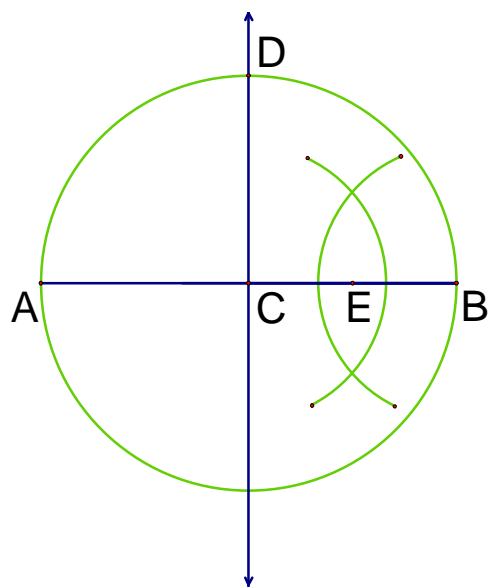


3. 以 C 點為圓心， \overline{AC} 為半徑畫圓，交 \overline{AB} 的中垂線於 D 點
4. 作 \overline{BC} 的中點 E

步驟三

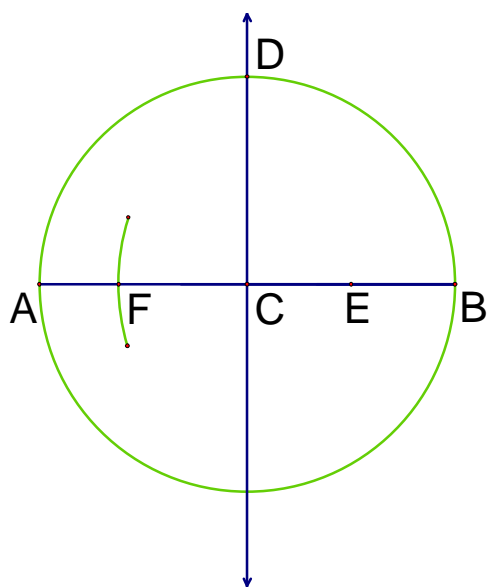


步驟四

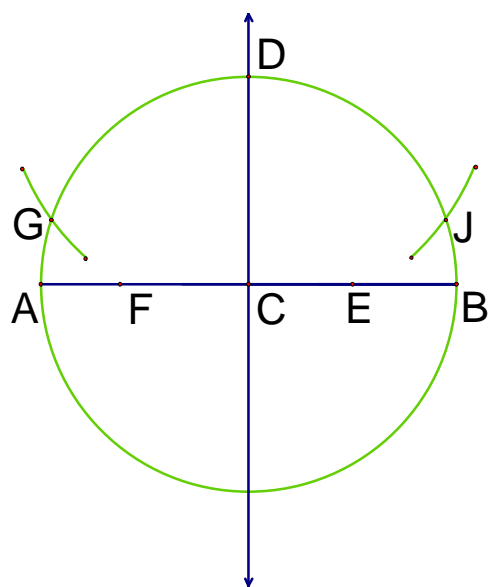


5. 以 E 點為圓心， \overline{DE} 為半徑畫弧，交 \overline{AB} 於 F 點
6. 再以 D 點為圓心， \overline{DF} 為半徑畫兩弧，交圓於 G、J 兩點

步驟五

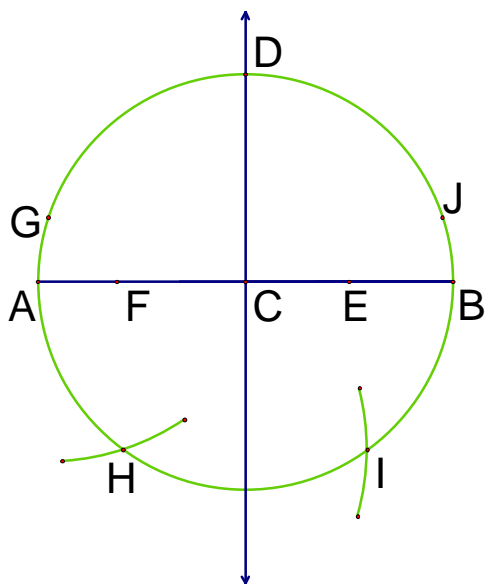


步驟六

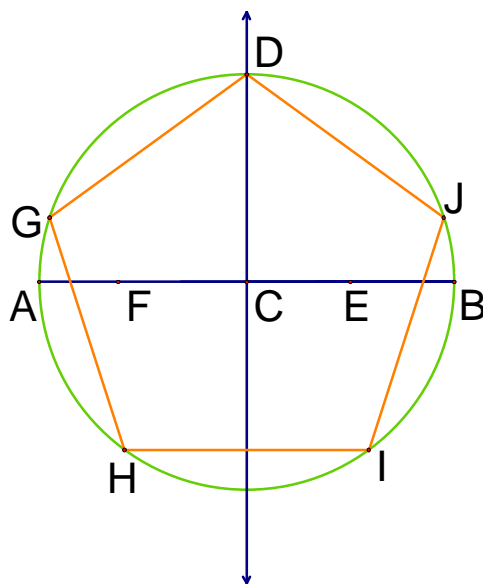


- 以 G 點為圓心， \overline{DG} 為半徑畫弧，交圓於 H 點，再以 H 點為圓心，同樣長度為半徑畫弧，交圓於 I 點，
- 連接點 D、J、I、H、G

步驟七

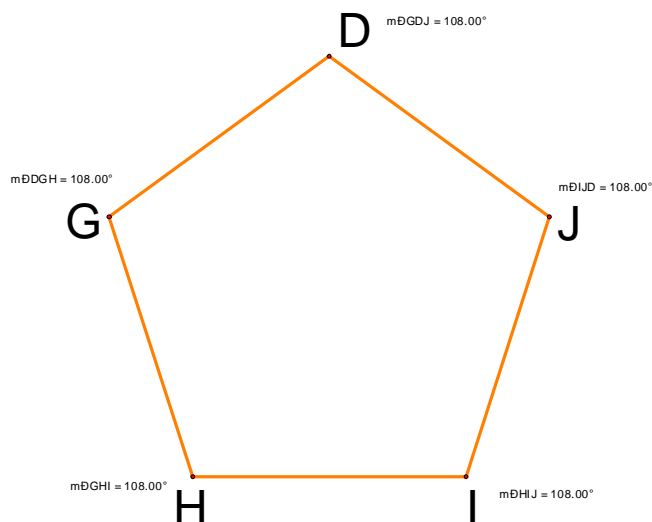


步驟八



- 五邊形 DJIHG 即為正五邊形

步驟九



縮放

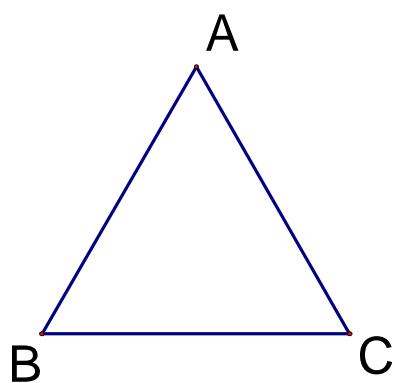
- 固定 24 公分長的線段，作五等分的切割，測量出每等分的長度
- 利用 GSP 軟體的「變換」進行「標定比值」後，再回至「變換」進行「放縮」，使五邊形每邊的長度與所測量之長度相同
- 所得之圖形即為周長 24 公分的正五邊形

肆、正六邊形

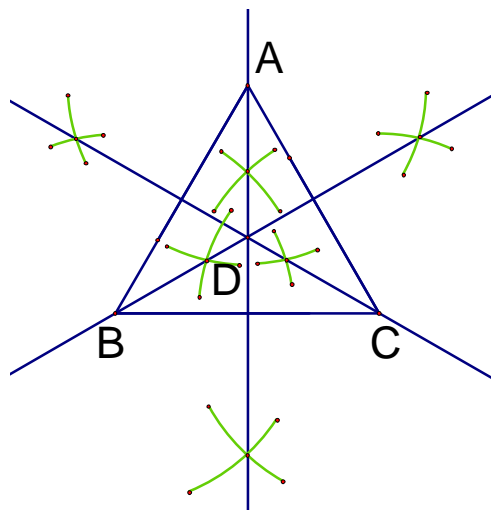
作圖步驟：

1. 利用上述步驟作一個正三邊形
2. 作三邊之中垂線，分別交於 D 點

步驟一

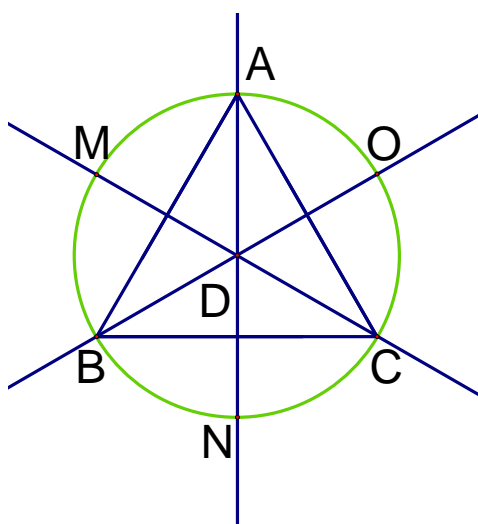


步驟二

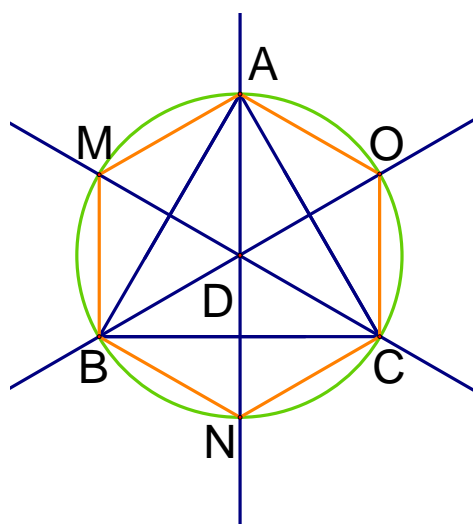


3. 以 D 點為圓心， \overline{AD} 為半徑畫圓，三條中垂線交圓於 M、N、O 三點
4. 連接點 A、O、C、N、B、M

步驟三

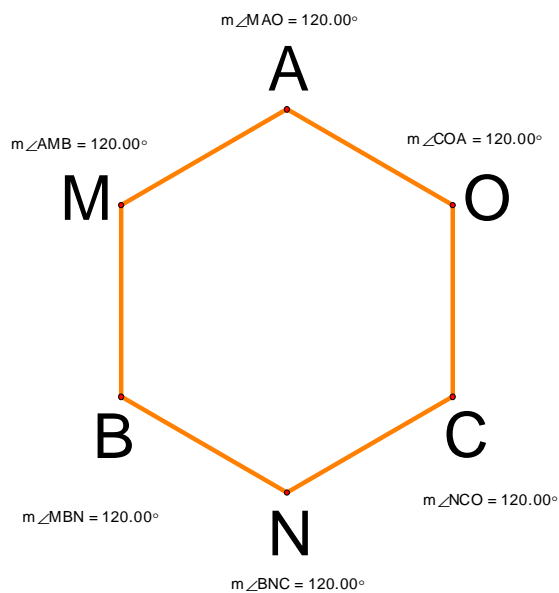


步驟四



5. 六邊形 AOCNBM 即為正六邊形

步驟五



縮放

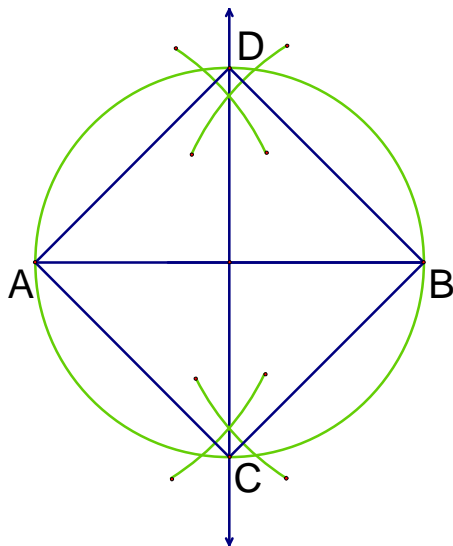
1. 固定 24 公分長的線段，作六等分的切割，測量出每等分的長度
2. 利用 GSP 軟體的「變換」進行「標定比值」後，再回至「變換」進行「放縮」，使六邊形每邊的長度與所測量之長度相同
3. 所得之圖形即為周長 24 公分的正六邊形

伍、正八邊形

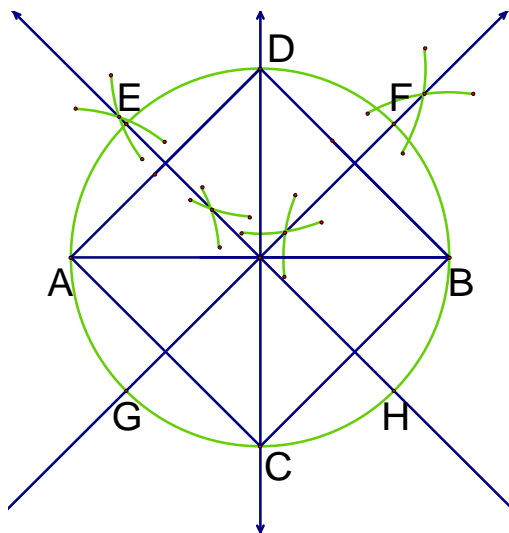
作圖步驟：

1. 利用上述步驟作一個正四邊形
2. 分別作 \overline{BD} 和 \overline{AD} 的中垂線，交圓於 E、F、H、G 點

步驟一

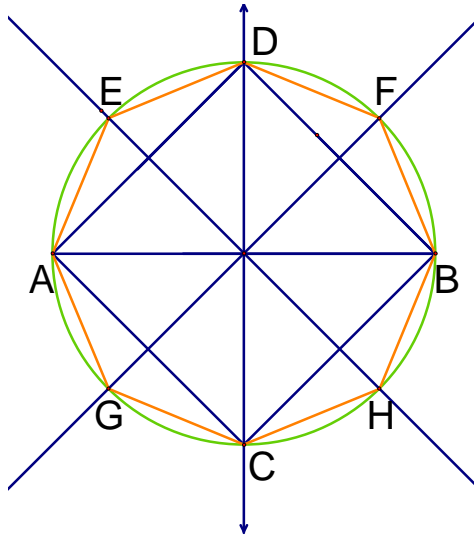


步驟二

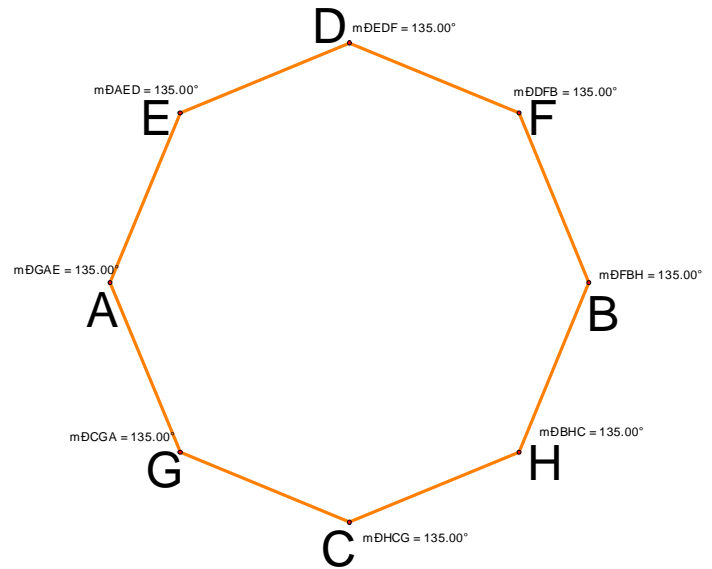


3. 連接點 D、F、B、H、C、G、A、E
4. 八邊形 DFBHCGAE 即為正八邊形

步驟三



步驟四



縮放

1. 固定 24 公分長的線段，作八等分的切割，測量出每等分的長度
2. 利用 GSP 軟體的「變換」進行「標定比值」後，再回至「變換」進行「放縮」，使八邊形每邊的長度與所測量之長度相同
3. 所得之圖形即為周長 24 公分的正八邊形

第四章 研究結果

第一節 面積的比較

一、以正三邊形而言

周長 24cm 可平分成各邊長 8cm 的正三邊形，經 GSP 軟體計算結果面積 27.69 c m²，是本研究範圍中面積最小的。

二、以正四邊形而言

周長 24cm 可平分成各邊長 6cm 的正四邊形，經 GSP 軟體計算結果面積 36 c m²。

三、以正五邊形而言

周長 24cm 可平分成各邊長 4.8cm 的正五邊形，經 GSP 軟體計算結果面積 36.69 c m²

四、以正六邊形而言

周長 24cm 可平分成各邊長 4cm 的正六邊形，經 GSP 軟體計算結果面積 41.57 c m²。

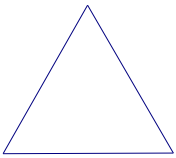
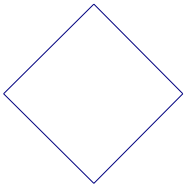
五、以正八邊形而言

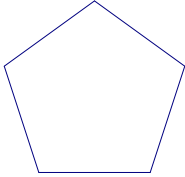
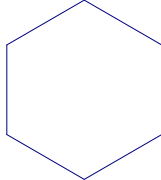
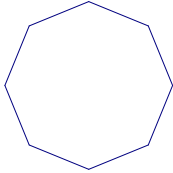
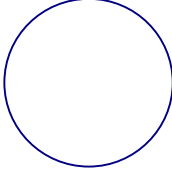
周長 24cm 可平分成各邊長 3cm 的正八邊形，經 GSP 軟體計算結果面積 43.5 c m²。

六、以圓形而言

周長 24cm 圓形，經 GSP 軟體計算結果面積 45.83 c m²，是本研究範圍中面積最大的。

將我們研究的結果，整理成下表

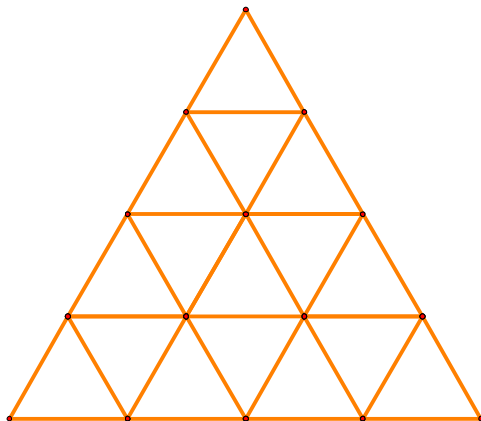
| | 圖 形 | 周 長 | 邊 長 | 每個內角 | 利用 GSP 計算 面 積 |
|------------------|---|-------------|------------|------------|------------------------------|
| 正 三 邊 形 |  | 24cm | 8cm | 60° | 27.69 c m² |
| 正 四 邊 形 |  | 24cm | 6cm | 90° | 36 c m² |

| | 圖 形 | 周 長 | 邊 長 | 每個內角 | 利用 GSP 計算 面 積 |
|------|--|-------------|--------------|-------------|------------------------------|
| 正五邊形 |  | 24cm | 4.8cm | 108° | 36.69 c m² |
| 正六邊形 |  | 24cm | 4cm | 120° | 41.57 c m² |
| 正八邊形 |  | 24cm | 3cm | 135° | 43.5 c m² |
| 圓形 |  | 24cm | 24cm | 360° | 45.83 c m² |

第二節 正多邊形的連接

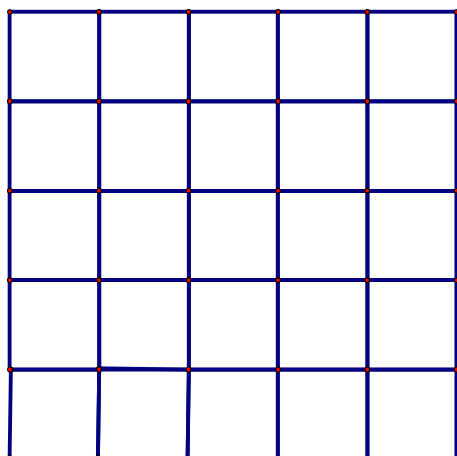
當我們知道正 n 邊形周長固定時， n 越大面積越大，可是卻還有一個疑問，撇除面積問題外，為什麼不把蜂窩改成其他正多邊形？於是我們再利用 GSP 軟體，繪出研究範圍的圖形，固定住欲向外連接的邊，再選「變換」功能裡的「鏡射」，針對進行同圖形連接的研究。

壹、繪出許多個正三邊形然後連接



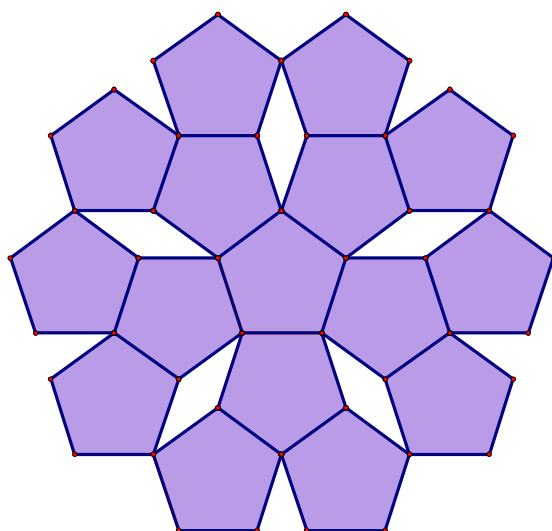
如圖所示，正三邊形雖然可以連接，可是正三邊形利用空間小

貳、繪出許多個正四邊形然後連接



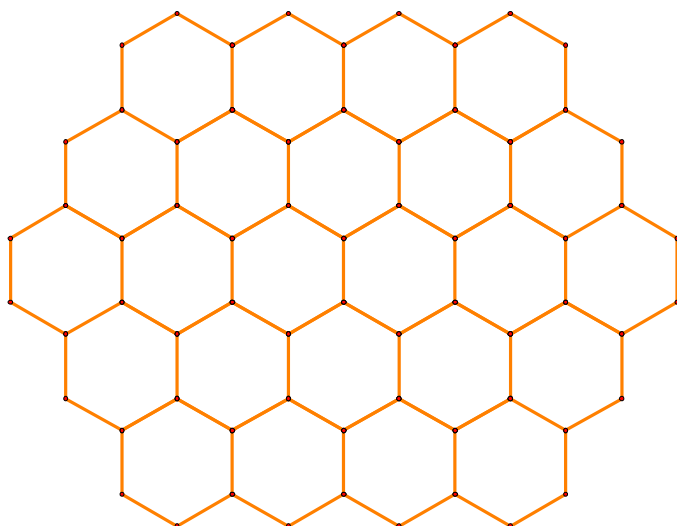
如圖所示，正四邊形雖然可以連接，可是正四邊形利用空間小

參、繪出許多的正五邊形然後連接



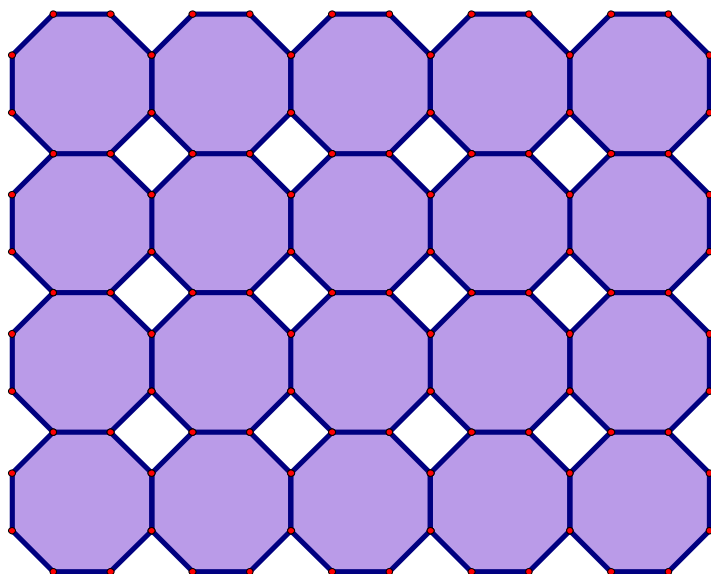
正五邊形要連接成球狀中間必有空隙，所以相對的利用空間就變少了

肆、繪出許多的正六邊形然後連接



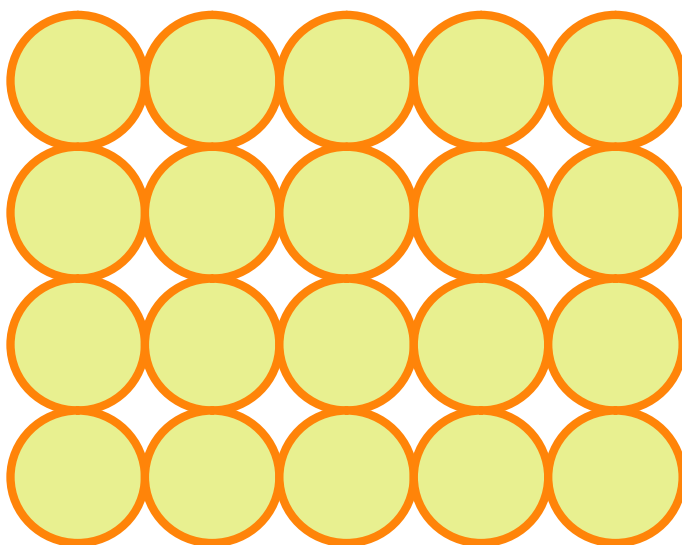
如圖所示，正六邊形輕輕鬆鬆就可以連接成球狀，而且沒有浪費掉空間

伍、繪出許多正八邊形然後連接



正八邊形要連接成球狀中間必有空隙，所以相對的利用空間就變少了

陸、繪出許多圓形然後連接



圓形連接成球狀中間必有空隙，所以相對的利用空間就變少了

因為古希臘數學家早已知道，六角形是最有效率的正多邊形，貝波司更提出，蜂窩的優美形狀，是自然界最有效經濟的建築代表。

事實上，蜜蜂也知道，將蜂窩蓋成正六邊形，就不會浪費蜂蠟去補齊連接時產生的空隙，如此也才能以最少的蜂蠟裝盛最多量的蜂蜜，故其不採取圓形來做為蜂窩的形狀。

第五章 總 結

第一節 結 論

壹、周長固定的正 n 邊形， n 越大，面積越大

經由 GSP 軟體進行繪圖及計算面積，並互相比較後，可清楚地得知當周長固定時（以 24cm 固定），正三邊形、正四邊形、正五邊形、正六邊形及正八邊形的面積，以正八邊形的面積最大。故由此推論得知，周長固定時，當 n 越大，正 n 邊形的面積也會跟著變大。

貳、周長固定時，圓面積大於所有正多邊形

經由 GSP 軟體進行測量，當周長固定在 24 cm 時，圓面積會大於正三邊形、正四邊形、正五邊形、正六邊形及正八邊形。所以推論出周長固定時，圓面積大於所有正多邊形的面積。

參、正六邊形蜂窩所利用的空間最大

爲什麼蜜蜂會選擇用正六邊形呢？！因爲聰明的蜜蜂知道，當正五邊形、正八邊形、圓，做同圖形連接時，中間有空隙，不僅造成蜂蠟的浪費，更產生了空間的浪費。只有正三邊形、正四邊形以及正六邊形，同圖形連接時，彼此間可以緊密的貼合，不會造成空間的浪費。

而正三邊形、正四邊形和正六邊形的面積相互比較，正六邊形的面積比其他兩者來的大，相對的可利用空間更大，所以牠們才會把蜂窩建成正六邊形。

第二節 建 議

依據研究發現與結論，提出對本主題提出後續研究的建議：

1. 周長固定，但邊長不一樣時，相同形狀的面積比較
2. 同樣長度，所圍成的面積，與平分數段後，分別圍成相同圖形之面積總和的比較
3. 比較同圖形（正五邊形、正八邊形、圓形.....）連接時，扣除中間所產生的空隙後，哪個的面積最大

參考資料

面積與周長的比較（頁 177—180），參考自波沙曼提爾著，葉偉文譯「神奇數學 117」。

爲什麼蜂窩都是六角形的？

參考自 <http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1305090503178>

蜂窩--自然界最經濟有效的建築

參考自 <http://www.mathland.idv.tw/life/bee.html>

數字的生命秘密，

參考自 <http://tech.chinatimes.com/2007Cti/2007Cti-News/Inc/2007cti-news-Tech-inc/Tech-Content/0,4703,171706+172007060500989,00.html>

動態幾何繪圖 GSP 的免費試用版軟體

取自 <http://teach.ymhs.tyc.edu.tw/t1086/prog/progs.htm>

正多邊形的繪圖，參考自 <http://www.mathland.idv.tw/fun/rn.htm>

GSP3.0 中文操作手冊，參考自

<http://home.educities.edu.tw/wu6143/mathcamp/gsp%A4J%AA%F9%A4%E2%A5U.doc>

GSP 動態幾何教學，

參考自 <http://140.127.47.6/DLMathEd/home/Garden/GSP/index.htm>

個人心得

作者 1：

完成了這次科展，我學到了許多東西。如何用尺規作畫出正多邊形、三角形的三心以及這套動態幾何軟體 GSP，更重要的是，我們那遇到困難，秉持不放棄的決心，一一的去克服所遇到的問題。還有那並肩作戰的團隊合作精神，使我們的研究報告能如期的完成。這次的科展，可說是獲益良多。

作者 2：

經過這次科展後，我學到了不少的東西，尤其是學會了這套 GSP 軟體，不僅是在做正多邊形外，相信在數學或其他方面的問題，我都能從這套軟體中，去解決一些困難的題目。過程中雖遇到些瓶頸，但我們秉持著團結合作的精神，不管有多少的問題，都能一一的去克服、去解決，因為這樣，才会有今天的成果。我很享受作科展的過程，雖說相聚是一種緣份，但能跟大家一起討論、一起解決問題，我真的感到很慶幸，所以我，非常感謝指導我們的老師，及與我齊奮鬥的夥伴。

作者 3：

在這九個月，從決定題目一直到打完報告，都讓我學習很多，那些是從課本上學習不到的，其中包括著如何和組員們的分工合作、及如何有規律的打完一篇報告。看著一步步完成的報告心中不免雀躍不已，再經過那麼久的研究，及一次次不斷修改報告內容，終於一份屬於我們自己的研究報告就這麼出爐了！！這背後最大的功勞非老師莫屬！