目　　　錄

# 主　題　名　稱　：「原」來　如　此　？？

## 摘要：

一、利用簡單的「相似三角形對應邊成比例」的概念得到：不管三角形的形狀是銳角Δ、鈍角Δ或直角Δ，其外接圓半徑 R＝$\dfrac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}$。

二、數學的趣味是：經常在解決了某些簡單的問題之後，就可以利用它們繼續挑戰更深的問題，這也是數學最引人入勝的地方。

三、在解決了正方形的外接圓半徑之後，就可以利用它來解正八邊形的外接圓半徑的問題，然後就可以再利用正八邊形來解正十六邊形和正二十四邊形外接圓半徑的問題；在解決了正五邊形的外接圓半徑之後，就可以利用它來解正十邊形的外接圓半徑的問題，然後就可以再利用正十邊形來解正三十邊形外接圓半徑的問題；在解決了正六邊形的外接圓半徑之後，就可以利用它來解正十二邊形的外接圓半徑的問題。

四、邊長固定時，邊數越多的正多邊形的外接圓半徑越大。

**背景說明：**我們學習過的有關「多邊形外接圓」的內容：

一、　若一多邊形的各頂點都落在一個圓上，此圓即爲此多邊形的外接圓，其圓心爲此多邊形的外心，外心爲此多邊形各邊中垂線的交點。（部編版國中數學第五冊 P83）

二、　三角形必有外心。（部編版國中數學第五冊 P84）

三、　直角三角形的外心爲斜邊的中點。（部編版國中數學第五冊 P85）

四、　銳角三角形的外心在三角形的內部；鈍角三角形的外心在三角形的外部。（部編版國中數學第五冊 P86）

五、　若 O 爲銳角三角形$\Delta ABC$的外心，則$\angle BOC=2\angle A$。（部編版國中數學第五冊 P86）

六、　若 O 爲鈍角三角形$\Delta ABC$的外心（$\angle A$爲鈍角），則$\angle BOC=360°-2\angle A$。（部編版國中數學第五冊 P86）

七、　正多邊形皆有外心。（部編版國中數學第五冊 P95）

八、　若一四邊形「對角互補」，則此四邊形的四個頂點共圓。（部編版國中數學第五冊 P86）

## 壹、　研究動機：

對於任意三角形的內切圓半徑 r，在課本中有一個很簡單的公式（部編版國中數學第五冊 P92），就是利用式子「Δ面積＝$\frac{1}{2}\times s\times r$」，其中 s 爲Δ的周長，r 爲這個Δ的內切圓半徑。當已知三角形的三邊長時，就可以利用「勾股定理」求出這個三角形的高，並求出面積，再利用上面的式子，求出內切圓半徑 r。若是直角Δ，就更簡單了：「若直角Δ的兩股爲 a、b，斜邊爲 c 時，則內切圓半徑$r=\dfrac{a+b-c}{2}$」（部編版國中數學第五冊 P98）。

而對於任意三角形，重心必位於中線上 2：1 的位置。但是對於三角形的外心，或外接圓的半徑，只能針對特殊的三角形（如直角Δ或等腰Δ）來求出外接圓的半徑，至於一般的非特殊三角形就沒有公式了，這也就引起我們想要探討「任意三角形外接圓半徑」的

興趣。因爲對任意三角形來說，外接圓是存在的，理論上，它的半徑應該就可以求出來。

## 貳、　研究目的：

一、探討：給定Δ的三邊長，求出此Δ的外接圓半徑 R 的公式。
二、探討：若多邊形有外接圓，求出其外接圓半徑 R。
三、探討：正多邊形的外接圓半徑、周長和正多邊形邊長、周長四者之間的關係。

## 參、　研究設備及器材：

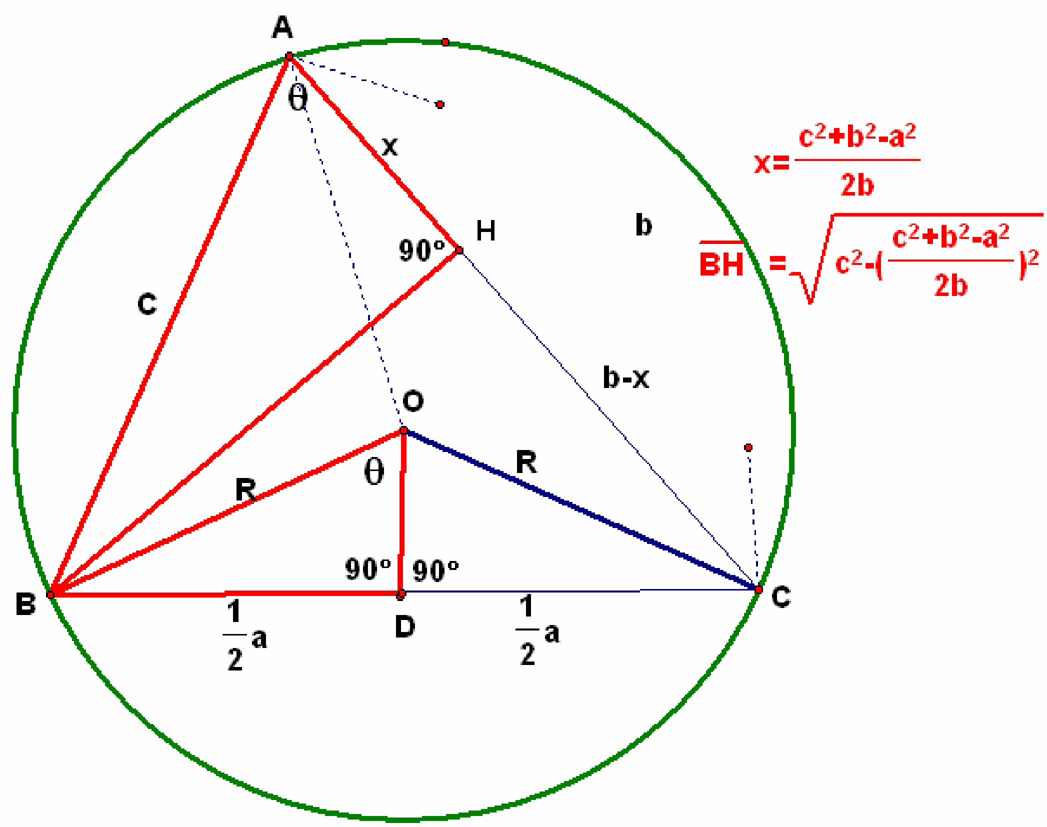
筆、計算紙（機）、GSP 繪圖軟體。

## 肆、　研究過程與方法：

### 一、　給定Δ的三邊長，求出此Δ的外接圓半徑：

**規定我們所使用的符號：**給定 $\Delta ABC$，$\angle A$ 的對邊長爲 a、$\angle B$ 的對邊長爲 b、$\angle C$ 的對邊長爲 c，$\overline{BC}$ 邊的中點爲 D、$\overline{AC}$ 邊的中點爲 E、$\overline{AB}$ 邊的中點爲 F。而 $\Delta ABC$的外接圓的圓心爲 O、半徑爲 R。爲了方便研究，**我們規定** $a \geq b \geq c$ 。

（一）當 a>b>c、且 $a^2 < b^2 + c^2$ 時：（此時 $\Delta ABC$爲銳角Δ）如圖一




圖一

$\because \angle BOC = 2\angle BAC$ 且 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 、D 爲 $\overline{BC}$ 的中點 ，

$\therefore \angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$ ，我們想到利用「相似形對應邊成比例」來求 R

作 $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ，設 $\overline{AH} = x$ ，則 $\overline{CH} = b - x$ ，利用直角 $\Delta ABH$、$\Delta BCH$ 和「勾股定理」

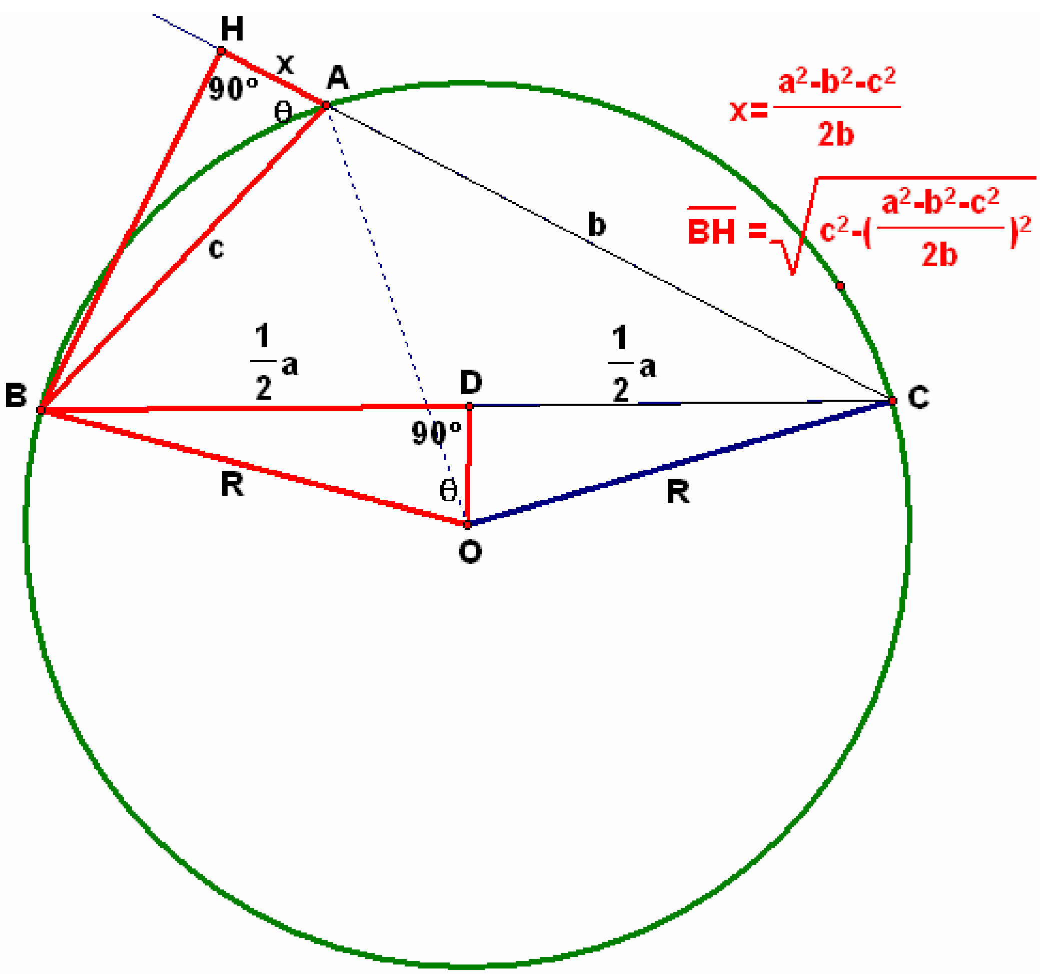
可得 $c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2 \to c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2$

$\to 2bx = c^2 + b^2 - a^2 \to x = \frac{c^2+b^2-a^2}{2b} \to \overline{BH} = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - (\frac{c^2+b^2-a^2}{2b})^2}$

$\because \Delta OBD \sim \Delta ABH$ $\therefore R : c = \frac{1}{2}a : \sqrt{c^2 - (\frac{c^2+b^2-a^2}{2b})^2}$

$$R = \frac{\frac{1}{2}ac}{\sqrt{c^2 - (\frac{c^2+b^2-a^2}{2b})^2}} = \frac{ac}{2\sqrt{c^2 - (\frac{c^2+b^2-a^2}{2b})^2}}$$ ………第（1）式

（二）當 a>b>c、且 $a^2 > b^2 + c^2$ 時：（此時 $\Delta ABC$ 為鈍角 Δ）如圖二




圖二

$\because \angle BOC = 360° - 2\angle BAC$ 且 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 、D 為 $\overline{BC}$ 的中點 ，

$\therefore \angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOC = 180° - \angle BAC = \angle BAC$ 的補角，**利用「相似形對應邊成比例」**

來求 R 。 作 $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ 的延長線，設 $\overline{AH} = x$ ，則 $\overline{CH} = b + x$ ，

利用直角 $\Delta ABH$、$\Delta BCH$ 和「勾股定理」，可得

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b + x)^2 \to c^2 - x^2 = a^2 - b^2 - 2bx - x^2$$

$$\to 2bx = a^2 - b^2 - c^2 \to x = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b} \to \overline{BH} = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - (\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b})^2}$$

$$\because \Delta OBD \sim \Delta ABH \qquad \therefore R : c = \frac{1}{2}a : \sqrt{c^2 - (\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b})^2}$$

$$R = \frac{\frac{1}{2}ac}{\sqrt{c^2 - (\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b})^2}} = \frac{ac}{2\sqrt{c^2 - (\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b})^2}} \cdots\cdots\cdots \text{第（2）式}$$

【觀察】: 原先我們以為銳角Δ和鈍角Δ所求出的公式會不一樣，可是在比較第（1）式和第（2）式後，我們驚訝地發現：因為 $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}$ 和 $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b}$ 互為相反數

所以 $(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b})^2 = (\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b})^2$

**因此第（1）式和第（2）式的結果是相同的**

也就是：**不管是銳角Δ或鈍角Δ，公式是一樣的**。

（三）再回到圖一（銳角Δ），用另一個直角Δ（ΔBCH）來求高 $\overline{BH}$ ：

$$b - x = b - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \quad , \overline{BH} = \sqrt{a^2 - (b - x)^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b})^2}$$

$$R : c = \frac{1}{2}a : \sqrt{a^2 - (\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b})^2}$$

$$R = \frac{\frac{1}{2}ac}{\sqrt{a^2 - (\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b})^2}} = \frac{ac}{2\sqrt{a^2 - (\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b})^2}} \cdots\cdots\cdots \text{第（3）式}$$

（四）再回到圖二（鈍角$\Delta$），用另一個直角$\Delta$（$\Delta$BCH）來求高$\overline{BH}$：

$$b+x=b+\frac{a^2-b^2-c^2}{2b}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\quad,\ \overline{BH}=\sqrt{a^2-(b+x)^2}=\sqrt{a^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})^2}$$

$$R:c=\frac{1}{2}a:\sqrt{a^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})^2}$$

$$\mathrm{R}=\frac{\frac{1}{2}ac}{\sqrt{a^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})^2}}=\frac{ac}{2\sqrt{a^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})^2}}$$ ………第（4）式

**第（3）式和第（4）式很顯然是相同的**

（五）困惑：我們得到四個求 R 的式子

1. 不過這四個式子看起來都很麻煩，就算要背，也要先搞清楚代號 a、b、c 到底要擺在公式的哪個地方？
2. 前面我們已經知道第（1）式＝第（2）式；第（3）式＝第（4）式。
3. 第（1）式和第（3）式是由同一個三角形所得到的結果，理論上應該相同，是嗎？第（2）式和第（4）式是由同一個三角形所得到的結果，理論上應該相同，是嗎？如果我們可以得到第（1）式＝第（3）式；第（2）式＝第（4）式，那麼這四個式子就都相同了。
4. 我們試圖找出答案。

（六）銳角$\Delta$：第（1）式和第（3）式

第（1）式的化簡：$\mathrm{R}=\dfrac{ac}{2\sqrt{c^2-(\frac{c^2+b^2-a^2}{2b})^2}}$（根號內用平方差公式分解）

$$=\frac{ac}{2\sqrt{(c+\frac{c^2+b^2-a^2}{2b})\times(c-\frac{c^2+b^2-a^2}{2b})}}$$

$$=\frac{ac}{2\sqrt{(\frac{c^2+2bc+b^2-a^2}{2b})\times(\frac{a^2-c^2+2bc-b^2}{2b})}}$$

$$=\frac{ac}{2\sqrt{\frac{(c+b)^2-a^2}{2b}\times\frac{a^2-(c-b)^2}{2b}}}$$（根號內用平方差公式分解）

$$=\frac{ac}{2\times\frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+c-b)(a-c+b)}}{2b}}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+c-b)(a-c+b)}}$$

第（3）式的化簡：R＝ $\frac{ac}{2\sqrt{a^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})^2}}$ （根號內用平方差公式分解）

$$=\frac{ac}{2\sqrt{(a+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})\times(a-\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})}}$$

$$=\frac{ac}{2\sqrt{(\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{2b})\times(\frac{c^2-a^2+2ab-b^2}{2b})}}$$

$=\frac{ac}{2\sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{2b}\times\frac{c^2-(a-b)^2}{2b}}}$ （根號內用平方差公式分解）

$$=\frac{ac}{2\times\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}{2b}}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}$$

『果然』第（1）式和第（3）式的結果相同

（七）鈍角Δ：第（2）式和第（4）式

第（2）式的化簡：R＝ $\frac{ac}{2\sqrt{c^2-(\frac{a^2-b^2-c^2}{2b})^2}}$ （根號內用平方差公式分解）

$$=\frac{ac}{2\sqrt{(c+\frac{a^2-b^2-c^2}{2b})\times(c-\frac{a^2-b^2-c^2}{2b})}}$$

$$=\frac{ac}{2\sqrt{(\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{2b})\times(\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2b})}}$$

$=\frac{ac}{2\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{2b}\times\frac{(b+c)^2-a^2}{2b}}}$ （根號內用平方差公式分解）

$$=\frac{ac}{2\times\frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}}{2b}}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}}$$

第（4）式的化簡：$R=\dfrac{ac}{2\sqrt{a^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})^2}}$（根號內用平方差公式分解）

$$=\frac{ac}{2\sqrt{(a+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})\times(a-\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})}}$$

$$=\frac{ac}{2\sqrt{(\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{2b})\times(\frac{c^2-a^2+2ab-b^2}{2b})}}$$

$$=\frac{ac}{2\sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{2b}\times\frac{c^2-(a-b)^2}{2b}}}$$（根號內用平方差公式分解）

$$=\frac{ac}{2\times\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}{2b}}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}$$

『果然』第（2）式和第（4）式的結果也相同

（八）**【驗證】**：試試這把寶劍的威力

1、例子 1： 當 $a^2=b^2+c^2$ 時（此時 $\Delta ABC$ 爲直角 $\Delta$）：

$$\because a^2=b^2+c^2\text{，}\therefore a^2\pm 2bc=b^2+c^2\pm 2bc=(b\pm c)^2$$

$$\rightarrow (b+c)^2-a^2=2bc \text{ 或 } a^2-(b-c)^2=2bc$$

$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{[(b+c)+a][(b+c)-a)][a+(b-c)][a-(b-c)]}}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}}=\frac{abc}{\sqrt{2bc\times 2bc}}=\frac{abc}{2bc}=\frac{a}{2}$$

也就是：外接圓半徑 $R=\dfrac{1}{2}\times$斜邊，與課本說的完全一致

所以**此**公式對直角 $\Delta$ 也適用

2、例子 2： 當 $a = b = c$ 時（此時 $\Delta ABC$ 爲正 $\Delta$），

（1）此時 $\Delta ABC$ 的外心＝重心，重心在高的 2:1 的位置

$$R = \frac{2}{3} \times \text{正}\Delta\text{的高} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

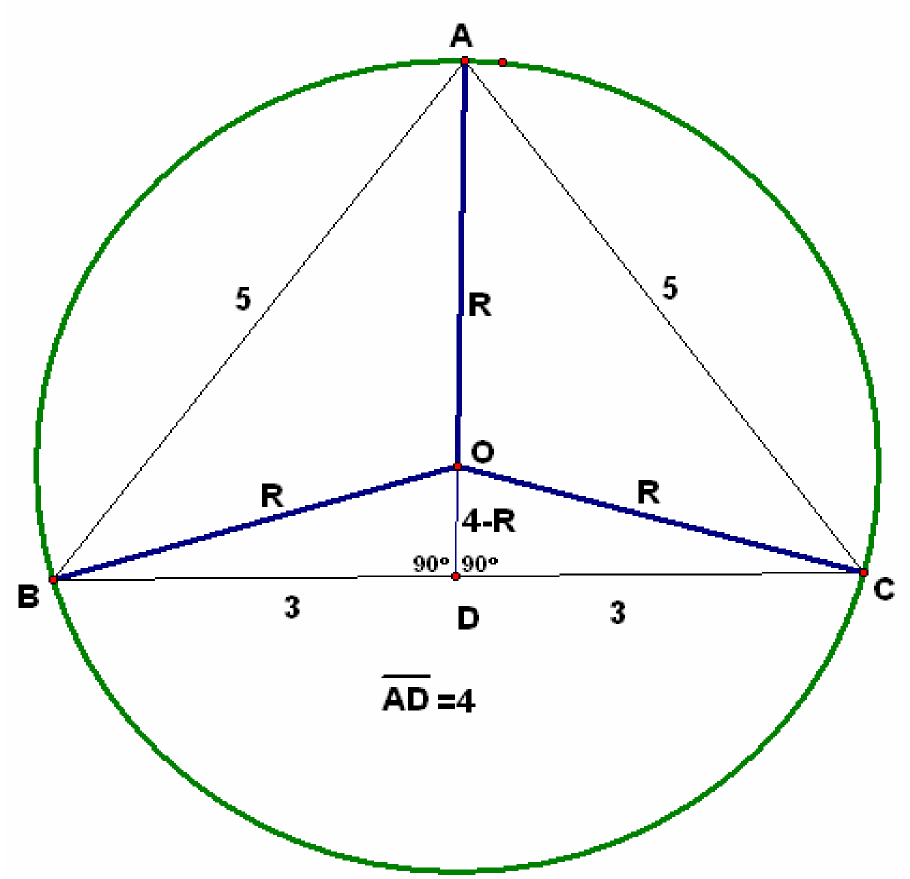
（2）直接代入公式

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}$$

$$= \frac{a^3}{\sqrt{(3a)(a)(a)(a)}} = \frac{a^3}{\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

與上面的結果相同

3、例子 3：當 $\Delta$ 的三邊長爲 5、5、6（等腰銳角三角形）：課本中的例題

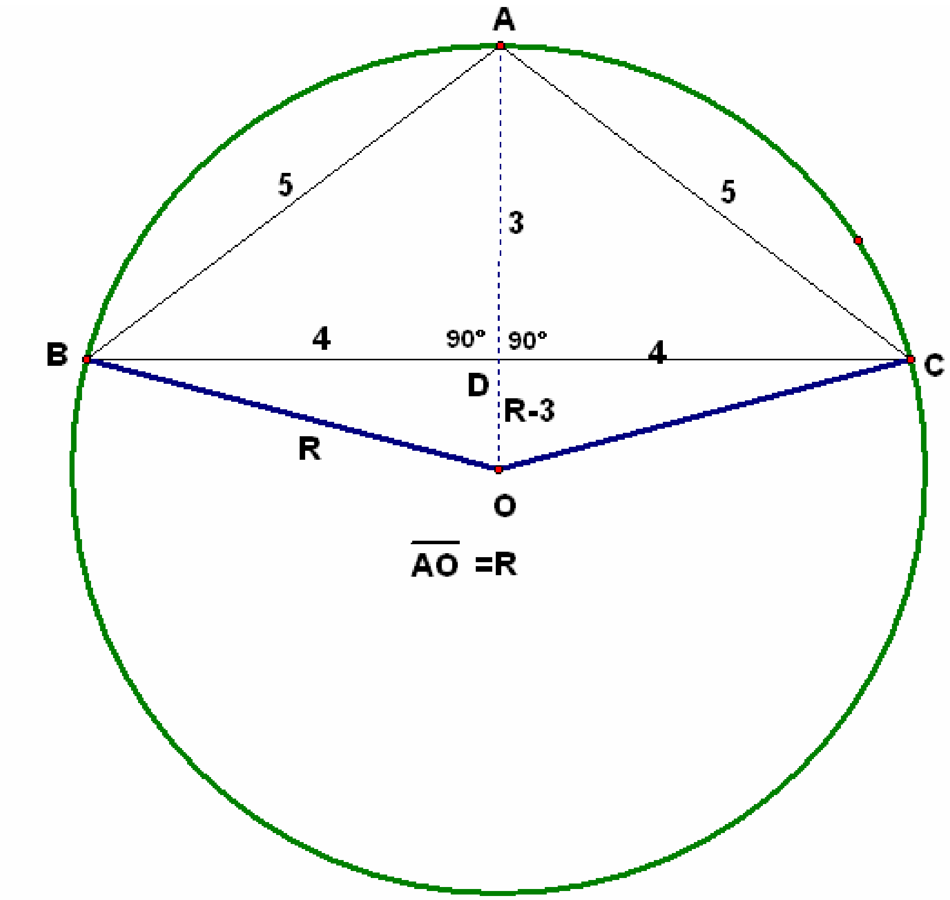



【方法一】畫圖並利用「勾股定理」：$\Delta OBD$ 中 $R^2 = 3^2 + (4-R)^2 \quad \therefore R = \frac{25}{8}$

【方法二】直接代入公式 $R = \frac{5\times5\times6}{\sqrt{16\times4\times6\times6}} = \frac{5\times5\times6}{4\times2\times6} = \frac{25}{8}$

答案與上面結果相同

4、例子 4：當Δ的三邊長為 5、5、8（等腰鈍角三角形）：考卷上的題目




【方法一】畫圖並利用「勾股定理」：$\Delta OBD$ 中 $R^2 = 4^2 + (R-3)^2 \quad \therefore R = \dfrac{25}{6}$

【方法二】直接代入公式 $$R = \frac{5\times5\times8}{\sqrt{18\times2\times8\times8}} = \frac{5\times5\times8}{6\times8} = \frac{25}{6}$$

答案與上面結果相同

（九）小結：

1、不管三角形的形狀為何，當 $\Delta$ 的三邊長分別為 a、b、c 時，其外接圓半徑 R 都可以用 $R = \dfrac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}$ 來求得，而且這個公式蠻好記的。

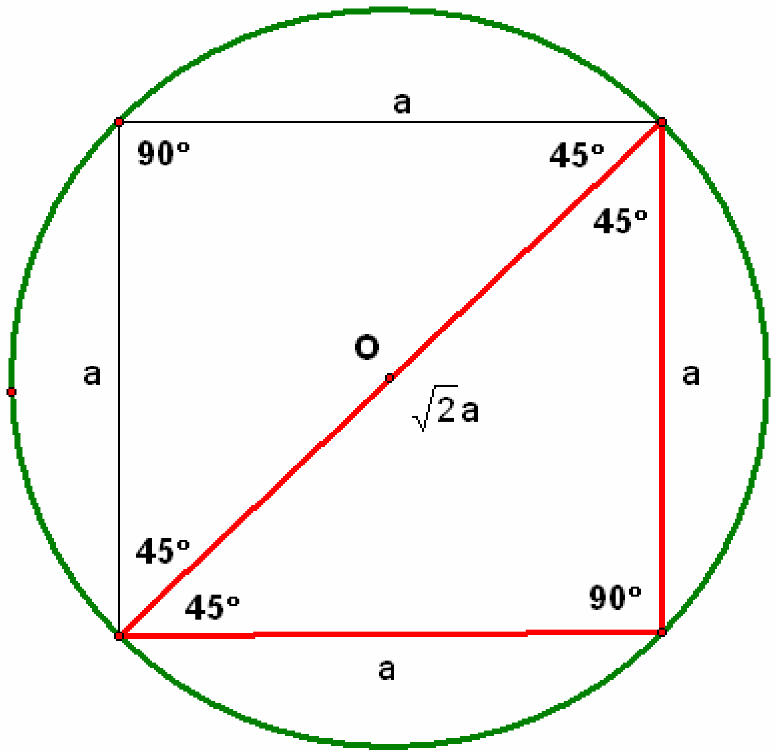
2、『心得』：在代公式時，如果 a、b、c 中，有兩個數相等，這時分母中的某些部分會互相抵消，計算會比較簡單，也就是利用正 $\Delta$ 或等腰 $\Delta$ 計算會比較方便，這一點對後面 $\Delta$ 的選擇非常有幫助。

二、多邊形的外接圓半徑：原則上可以任選多邊形的三個頂點，不過，最好使選取的三個頂點可以變成等腰三角形或正三角形，計算會比較簡單。

（一）邊長為 a 的正三角形：（參考上面的例子 2）

$$R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

（二）邊長為 a 的正方形：如圖



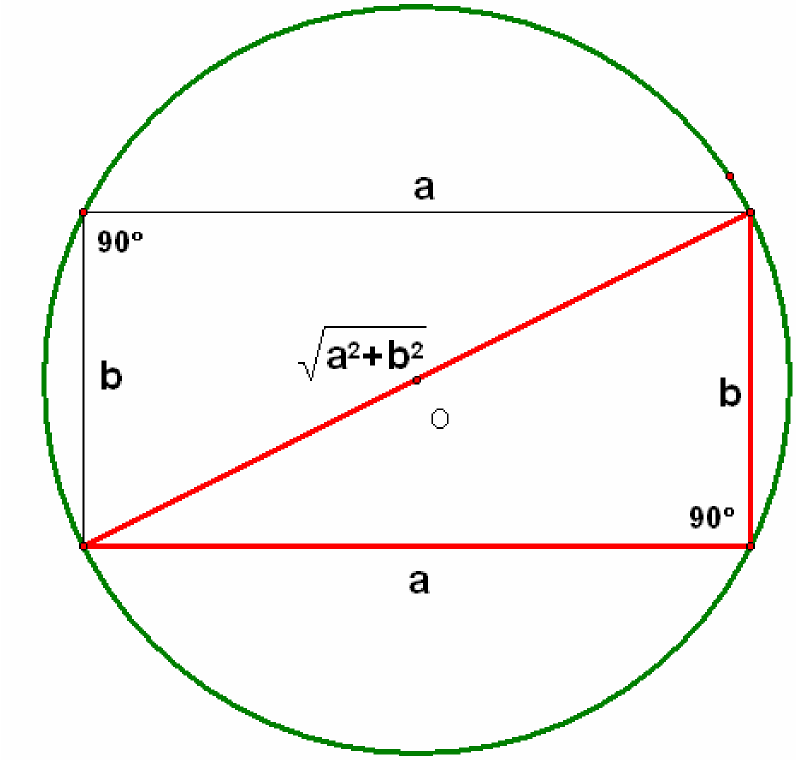

正方形

任選此正方形之三頂點，則此三角形的三邊長必定是 a、a、$\sqrt{2}a$，代入公式得

$$R=\frac{a\times a\times\sqrt{2}a}{\sqrt{(2a+\sqrt{2}a)(2a-\sqrt{2}a)\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}a}}=\frac{\sqrt{2}a^{3}}{\sqrt{4a^{4}}}=\frac{\sqrt{2}a^{3}}{2a^{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

（從圖形上觀察得知：正方形的外接圓半徑為對角線的$\frac{1}{2}$，與上面的結果完全相同）

（三）長、寬分別為 a、b 的矩形：如圖




矩形

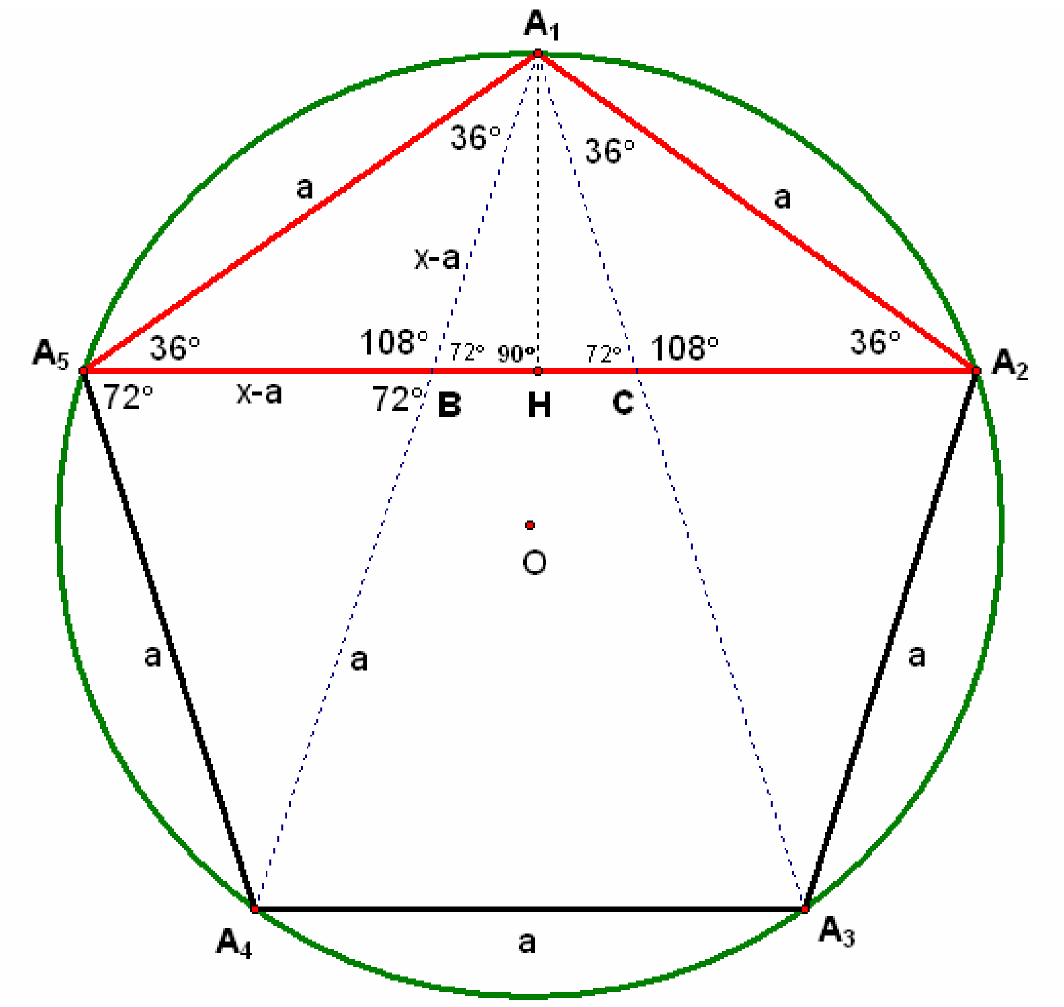
任選此矩形之三頂點，則此三角形的三邊長必定是 a、b、$\sqrt{a^2+b^2}$，代入公式得

$$R=\frac{a\times b\times\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(a+b+\sqrt{a^2+b^2})(a+b-\sqrt{a^2+b^2})(\sqrt{a^2+b^2}+a-b)(\sqrt{a^2+b^2}-a+b)}}$$

$$=\frac{a\times b\times\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(2ab)(2ab)}}=\frac{a\times b\times\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

（從圖形上觀察得知：矩形的外接圓半徑為對角線的 $\frac{1}{2}$，與上面的結果完全相同）

（四）邊長爲 a 的正五邊形：如圖




正五邊形

正五邊形的對角線只有一種長度，假設其長度爲 x

由圖中角度可知，$\Delta BA_1A_5 \sim \Delta A_1A_2A_5$（根據 AAA 相似定理）

所以 $a : x = (x-a) : a \to x^2 - ax = a^2 \to x^2 - ax - a^2 = 0$（a 看成已知數）

$$x = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2}\text{（取正）} \to x = \frac{a + \sqrt{5}a}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

取 $\Delta A_1A_2A_5$ 之三邊長 a、a、$\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ 來求 R，代入公式得

$$R = \frac{a \times a \times \frac{\sqrt{5}+1}{2}a}{\sqrt{(2a + \frac{\sqrt{5}+1}{2}a)(2a - \frac{\sqrt{5}+1}{2}a)(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a)(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a)}}$$

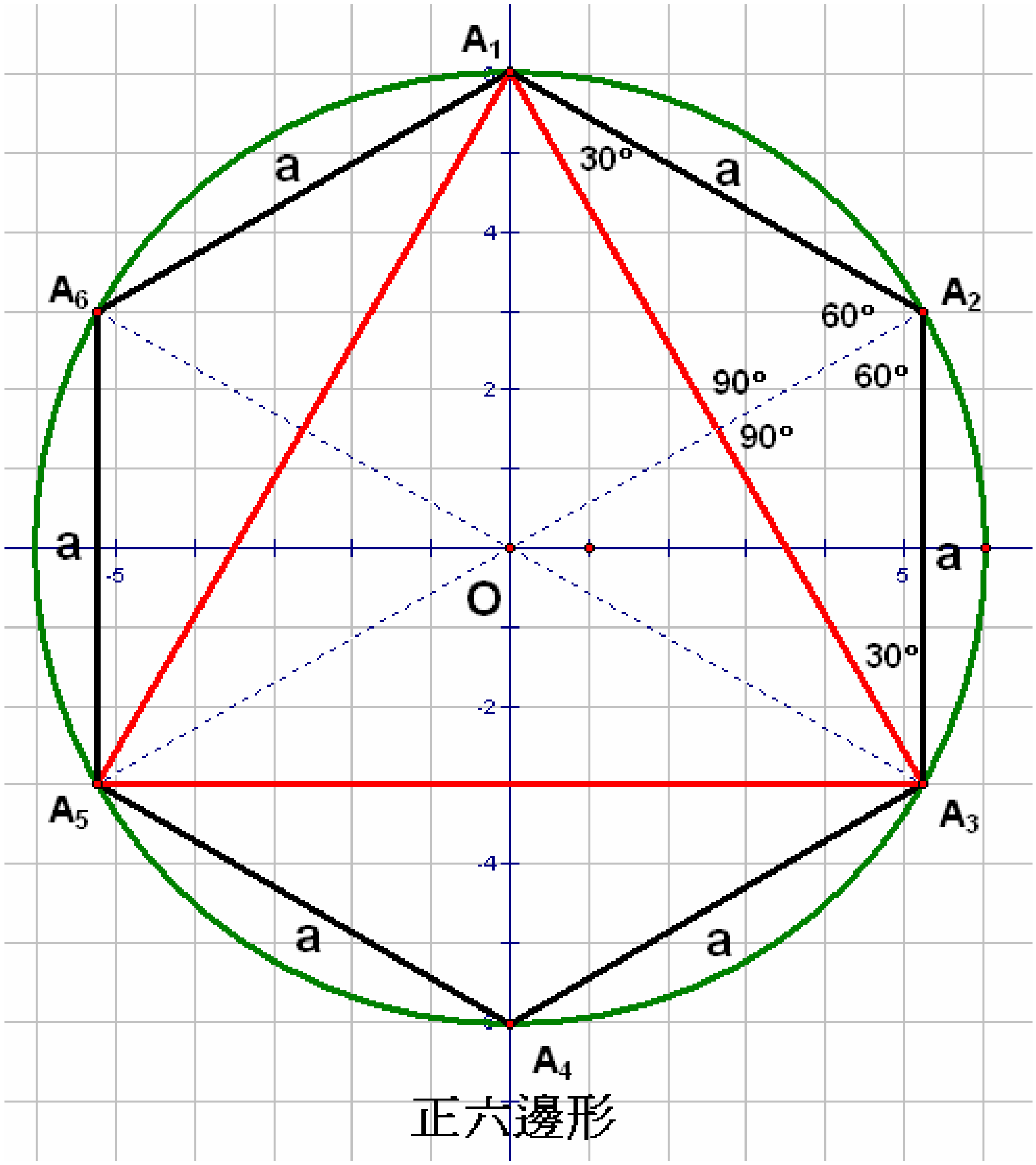
$$
=\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^{3}}{\sqrt{(\frac{5+\sqrt{5}}{2})(\frac{3-\sqrt{5}}{2})(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{2}a^{4}}}=\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^{3}}{\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{5}+1}{2})\times a^{2}\times\sqrt{10-2\sqrt{5}}}
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}a=\frac{2\times\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10-2\sqrt{5}}a=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}}a=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})\times(5+\sqrt{5})}a
$$

$$
=\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^{2}}}{(5-\sqrt{5})\times(5+\sqrt{5})}a=\frac{\sqrt{40(5+\sqrt{5})}}{20}=\frac{\sqrt{200+40\sqrt{5}}}{20}a
$$

$$
=\frac{2\times\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20}a=\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a
$$

（五）邊長爲 a 的正六邊形：如圖




正六邊形的對角線有兩種不同的長度，由特殊三角形的邊角關係可知

正六邊形的對角線的兩種不同的長度分別爲 $\sqrt{3}a$ 和 2a

若連 $\overline{A_1A_4}$ 、$\overline{A_2A_5}$ 、$\overline{A_3A_6}$ 可將正六邊形分割成 6 個正三角形

從圖形中也可以知道：$\Delta A_1A_3A_5$ 是正三角形且邊長爲 $\sqrt{3}a$

利用前面（一）的結論：正三角形的外接圓半徑＝$\frac{\sqrt{3}}{3}$×正 $\Delta$ 的邊長

所以正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的外接圓半徑 R

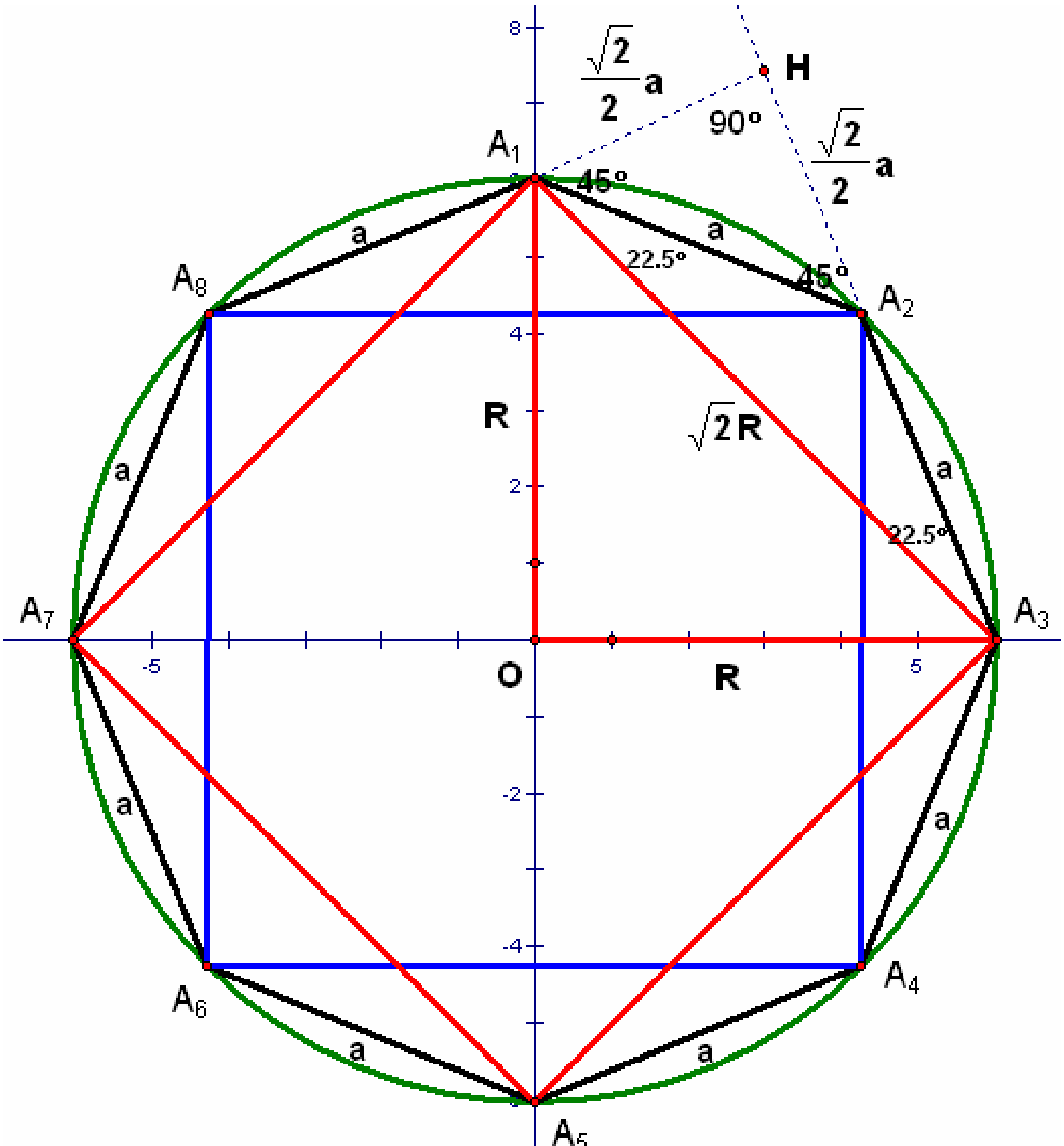
＝正三角形 $\Delta A_1A_3A_5$ 的外接圓半徑

$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times$ 正三角形 $\Delta A_1 A_3 A_5$ 的邊長

$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times (\sqrt{3}a) = a$，所以 $R = a$

（從圖形上觀察得知：正六邊形的外接圓半徑 R 等於其邊長 a，與上面的計算結果完全相同）

（六）邊長爲 a 的正八邊形：如圖



正八邊形

正八邊形的對角線共有三種不同的長度，在八個頂點中，任取三個頂點形成三角形的方法有很多種，嘗試用不同的三角形來計算，過程雖然很有趣，但有時實際計算很複雜，於是我們想到利用前面(二)正方形的結果。

【方法一】從圖中觀察，很容易得到四邊形 $A_1A_3A_5A_7$ 和 $A_2A_4A_6A_8$ 都是正方形

其邊長 $\overline{A_1A_3}$ 求法如下：

自 $A_1$ 做 $\overline{A_1H}$ 垂直於 $\overline{A_2A_3}$ 的延長線於 H，

因爲正八邊形的每一外角爲 45°，可得 $\overline{A_1H} = \overline{A_2H} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

在$\Delta A_1A_3H$中，利用勾股定理，得$\overline{A_1A_3}=\sqrt{(a+\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}$

$$=\sqrt{a^2+\sqrt{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2}=\sqrt{(2+\sqrt{2})a^2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}a$$

利用前面(二)的結論：正方形的外接圓半徑$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times$正方形的邊長

所以正八邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$的外接圓半徑 R

＝正方形$A_1A_3A_5A_7$的外接圓半徑

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times$ 正方形$A_1A_3A_5A_7$的邊長

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times$（$\sqrt{(2+\sqrt{2})}a$）$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}a$

【方法二】這是一種很有趣的方法：不需要求出正八邊形的對角線，而利用 R 本身去求出 R。說明如下：從圖形的觀察知道：$\Delta OA_1A_3$爲等腰直角Δ，

所以$\overline{A_1A_3}=\sqrt{2}R$，利用$\Delta A_1A_2A_3$的三邊長 a、a、$\sqrt{2}R$

及正八邊形外接圓半徑 R 的關係可列出方程式

$$\frac{a\times a\times\sqrt{2}R}{\sqrt{(2a+\sqrt{2}R)\times(2a-\sqrt{2}R)\times\sqrt{2}R\times\sqrt{2}R}}=\frac{a\times a\times\sqrt{2}R}{\sqrt{(2a+\sqrt{2}R)\times(2a-\sqrt{2}R)\times(\sqrt{2}R)^2}}=R$$

$\frac{a^2\times\sqrt{2}R}{\sqrt{4a^2-2R^2}\times\sqrt{2}R}=R$，約分後再兩邊平方得

$$\frac{a^4}{4a^2-2R^2}=R^2\rightarrow a^4=4a^2R^2-2R^4\rightarrow 2R^4-4a^2R^2+a^4=0$$

$2(R^2)^2-4a^2(R^2)+a^4=0$，令$R^2=x$，得$2x^2-4a^2x+a^4=0$

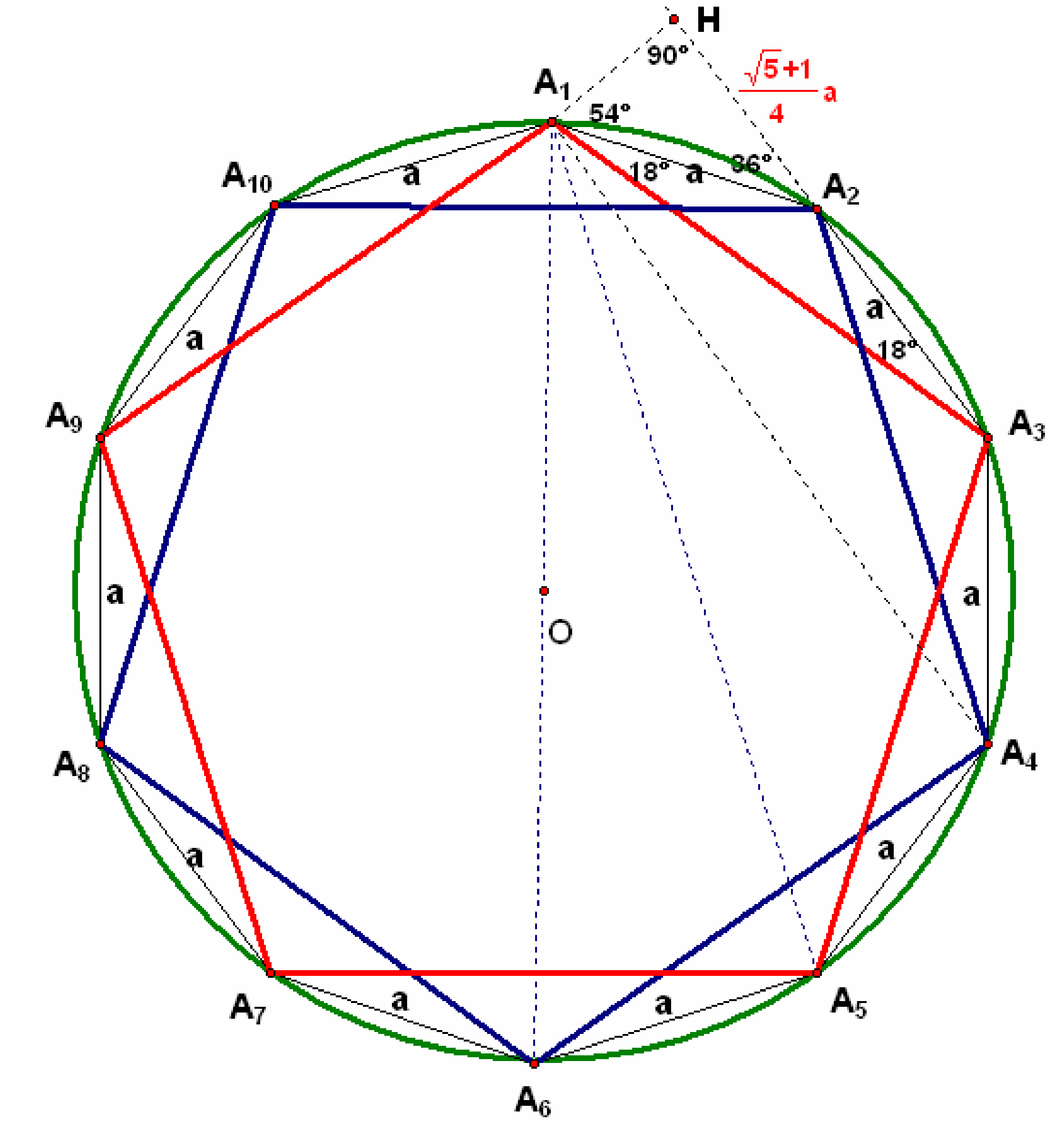
$$x=\frac{4a^2\pm\sqrt{8a^4}}{4}=\frac{4a^2\pm2\sqrt{2}a^2}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}a^2\rightarrow R^2=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}a^2$$

利用三角形大角對大邊、小角對小邊，得知 R>a>0→ $R^2>a^2$

所以$R^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}a^2$　推得$R=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}a$（取正）

所以$R=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}a=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}a$（與方法一結果相同）

（七）邊長爲 a 的正十邊形：如圖



正十邊形

正十邊形共有四種不同的對角線長度，如圖中的 $\overline{A_1A_3}$ 、$\overline{A_1A_4}$ 、$\overline{A_1A_5}$ 、$\overline{A_1A_6}$

從圖中觀察，很容易得到五邊形 $A_1A_3A_5A_7A_9$ 和 $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ 都是正五邊形，只需求出其邊長再利用正五邊形所得到的結論就可以了

正五邊形 $A_1A_3A_5A_7A_9$ 的邊長 $\overline{A_1A_3}$ 求法如下：

自 $A_1$ 做 $\overline{A_1H}$ 垂直於 $\overline{A_2A_3}$ 的延長線於 H，因爲正十邊形的每一外角爲 36°

參考正五邊形的圖【P14】，可得 $\overline{A_2H}$ 的長即爲正五邊形圖中的 $\overline{A_5H}$

而正五邊形圖中的$\overline{A_5H}=\dfrac{1}{2}\overline{A_2A_5}=\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}a$

所以本圖中，$\overline{A_2H}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}a \rightarrow \overline{A_1H}^2=a^2-(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}a)^2$

$$\overline{A_1A_3}=\sqrt{\overline{A_3H}^2+\overline{A_1H}^2}=\sqrt{(a+\frac{\sqrt{5}+1}{4}a)^2+[a^2-(\frac{\sqrt{5}+1}{4}a)^2]}$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^2+(\frac{\sqrt{5}+1}{4}a)^2+a^2-(\frac{\sqrt{5}+1}{4}a)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^2+a^2}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}a^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}a$$

利用正五邊形的結論：正五邊形的外接圓半徑＝$\dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$×正五邊形的邊長

所以正十邊形 $A_1A_2....A_{10}$ 的外接圓半徑 R

＝正五邊形 $A_1A_3A_5A_7A_9$ 的外接圓半徑

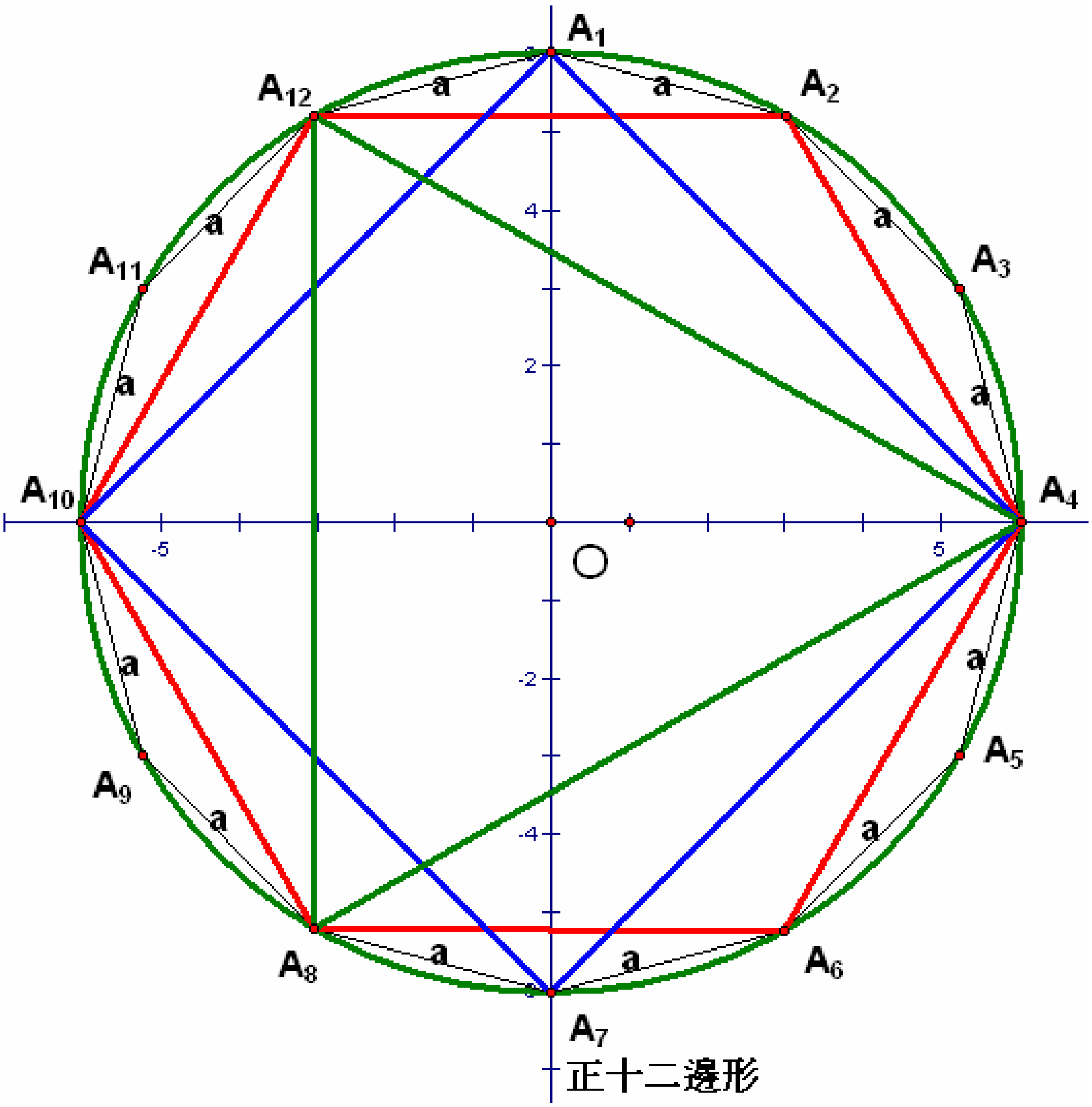
＝$\dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$× 正五邊形 $A_1A_3A_5A_7A_9$ 的邊長

$$=\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}a$$

$$=\frac{\sqrt{600+200\sqrt{5}}}{20}a=\frac{10\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{20}a=\frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{2}a$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

（八）邊長爲 a 的正十二邊形：如圖

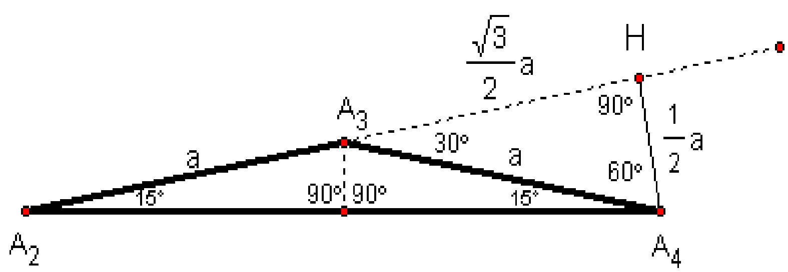



連接正十二邊形的某些對角線可以得到正三角形、正方形、正六邊形，如上圖（因爲 3、4、6 都是 12 的因數）

【方法一】利用正六邊形 $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$ 來求（最簡單）

正六邊形 $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$ 的邊長 $\overline{A_2A_4}$ 求法如下：

正十二邊形的每一外角爲 $30°$



$$\overline{A_2A_4}=\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+(a+\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\sqrt{3}a^2+\frac{3}{4}a^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}a$$

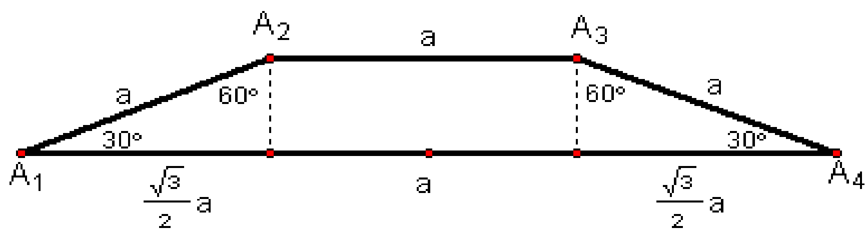
所以正十二邊形 $A_1A_2 \ldots\ldots A_{12}$ 的外接圓半徑 R

＝正六邊形 $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$ 的外接圓半徑

＝正六邊形 $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$ 的邊長＝$\sqrt{2+\sqrt{3}}a$

【方法二】利用正方形 $A_1A_4A_7A_{10}$ 來求：

正方形 $A_1A_4A_7A_{10}$ 的邊長 $\overline{A_1A_4}$ 求法如下：




$$\overline{A_1A_4}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times 2+a=(\sqrt{3}+1)a$$

所以正十二邊形 $A_1A_2 \ldots\ldots A_{12}$ 的外接圓半徑 R

＝正方形 $A_1A_4A_7A_{10}$ 的外接圓半徑

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times$ 正方形 $A_1A_4A_7A_{10}$ 的邊長

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{3}+1)a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$

【奇怪】答案怎麼和方法一不同呢？

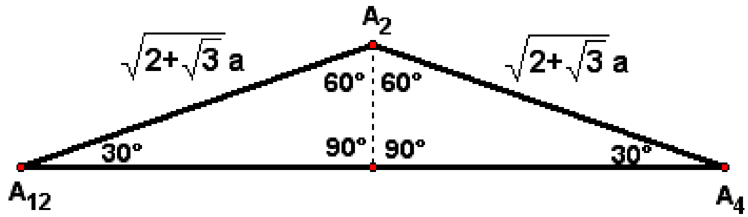
將方法一的結果平方得 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2=2+\sqrt{3}$

將方法二的結果平方得 $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})^2=\frac{6+2\sqrt{12}+2}{4}=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{3}$

所以只是寫法不同，答案其實是相同的。

【方法三】利用正三角形 $A_4A_8A_{12}$ 來求：

正三角形 $A_4A_8A_{12}$ 的邊長 $\overline{A_4A_{12}}$ 求法如下：




由方法一，得 $\overline{A_2A_4}=\overline{A_2A_{12}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\,a$

$$\overline{A_4A_{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}\,a\times 2=\sqrt{6+3\sqrt{3}}\,a$$

所以正十二邊形 $A_1A_2\ldots.A_{12}$ 的外接圓半徑 R

＝正三角形 $A_4A_8A_{12}$ 外接圓半徑

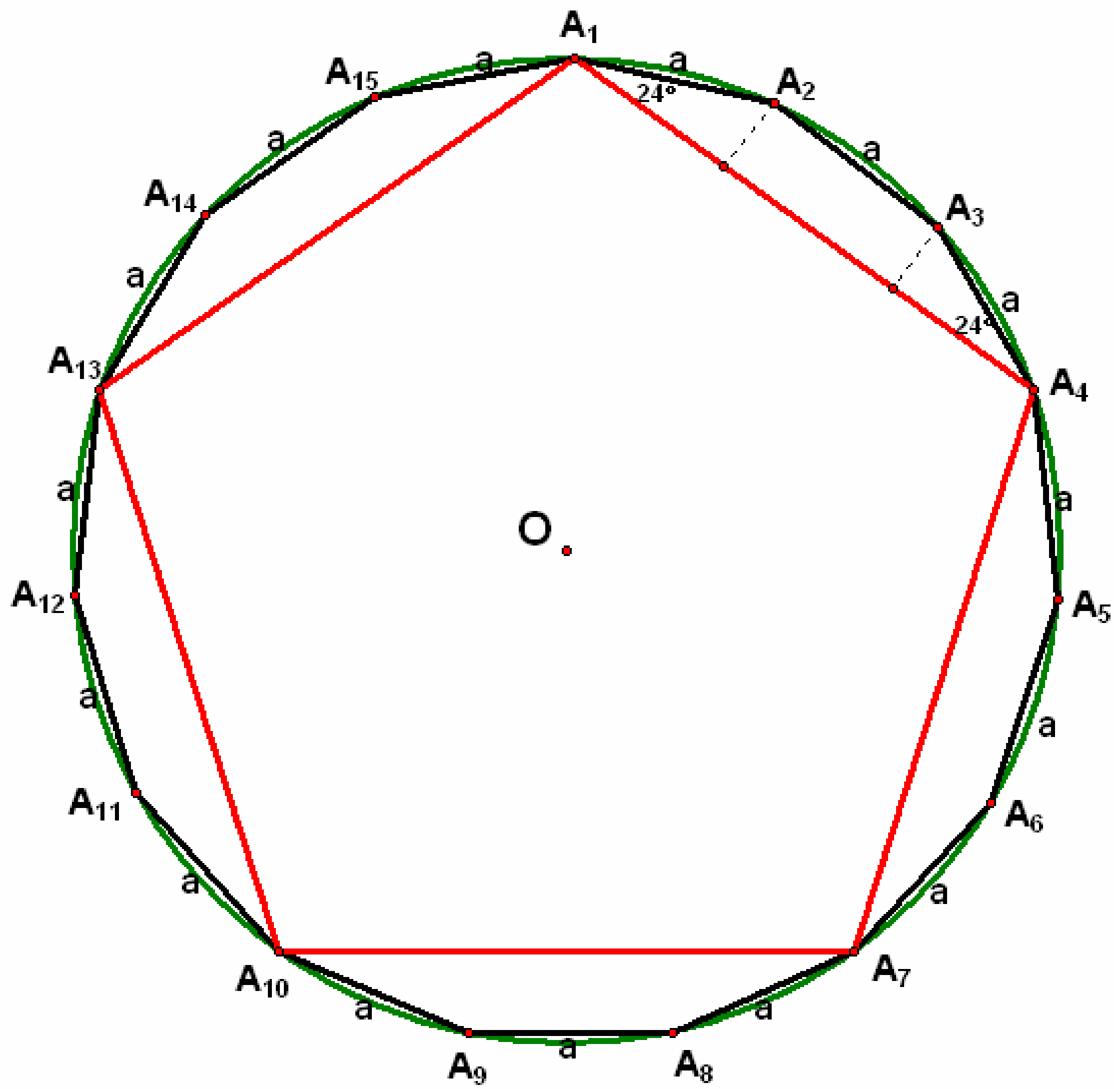
$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times$ 正三角形 $A_4A_8A_{12}$ 的邊長

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{6+3\sqrt{3}}\,a=\frac{\sqrt{18+9\sqrt{3}}}{3}a$$

$$=\frac{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}a=\sqrt{2+\sqrt{3}}\,a$$

（結果與方法一、方法二完全相同）

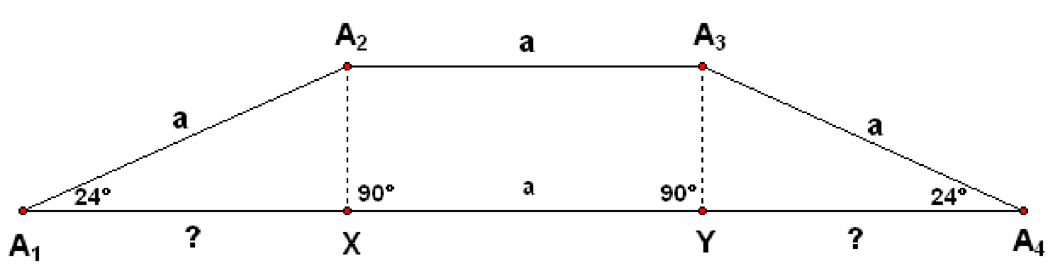
（九）**邊長爲 a 的正十五邊形**：如圖（圖中的 a 爲弦長）




正十五邊形

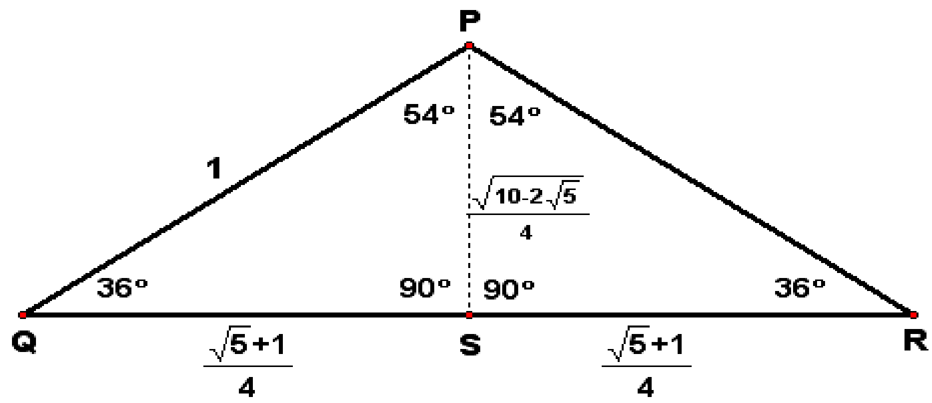
依次連接圖中點 $A_1$ 、 $A_4$ 、 $A_7$ 、 $A_{10}$ 、 $A_{13}$ ，可得五邊形 $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}$ 爲正五邊形

正五邊形 $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}$ 的邊長 $\overline{A_1A_4}$ 求法如下：




圖中 $\overline{A_1X} = \overline{YA_4}$

參考正五邊形【P14】所得到的結果：
可得$\Delta$三內角爲$36°$、$54°$、$90°$三邊的比例關係如下




【說明】：利用前面正五邊形【P14】

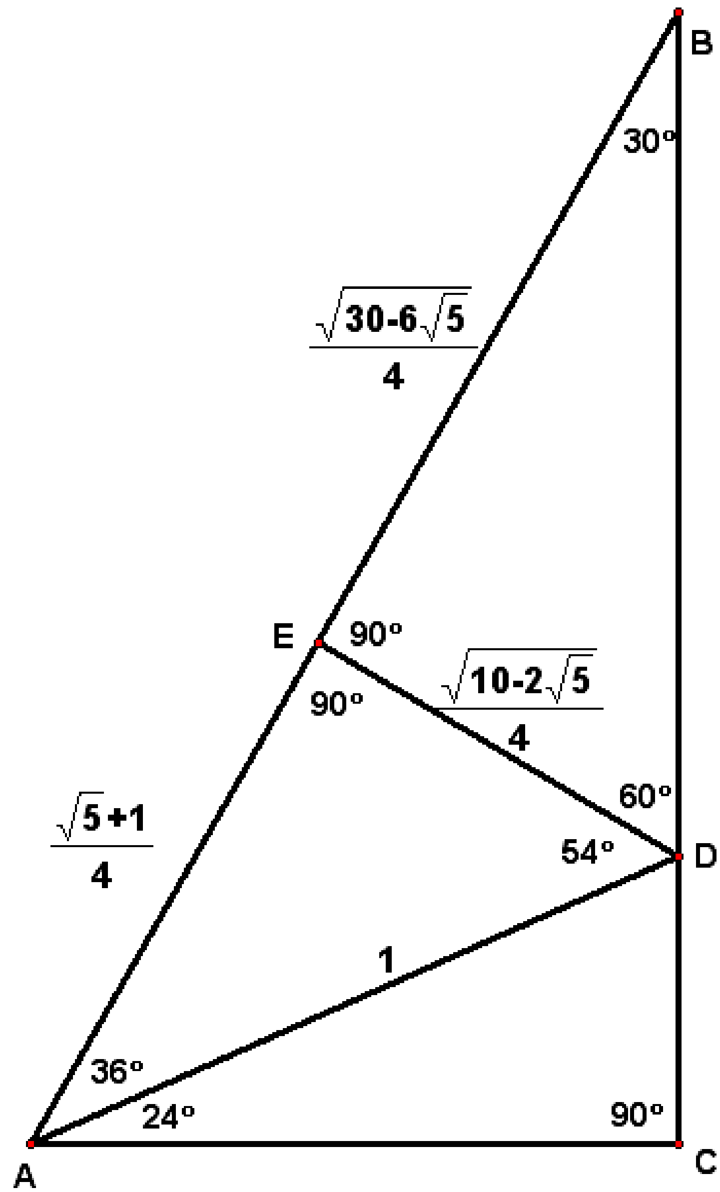
若正五邊形的邊長爲 1 單位，

則對角線長即圖中的$\overline{QR} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，所以$\overline{QS} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$$\longrightarrow \overline{PS} = \sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{5}+1}{4})^2} = \sqrt{\frac{16-5-2\sqrt{5}-1}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

因爲正十五邊形中的$\angle A_2A_1A_4 = 24°$，且$24° + 36° = 60°$，

設計一個如下的圖形




**【說明】**：設 $\overline{AD}=1$，欲求 $\overline{AC}=?$

$\because \overline{AD}=1$，則 $\overline{AE}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\Delta BDE$ 的三內角爲 $30°$、$60°$、$90°$，

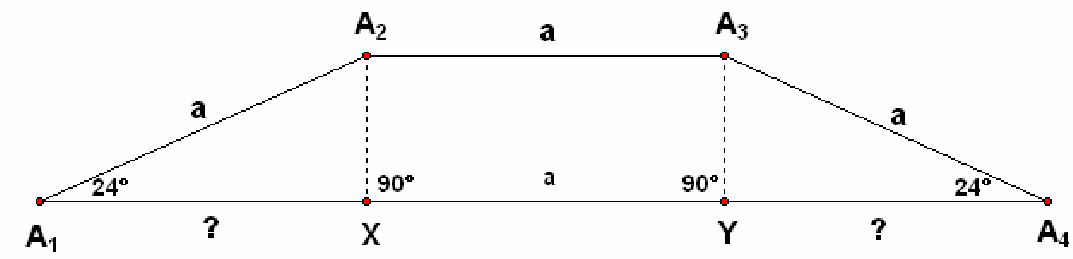
所以 $\overline{BE}=\sqrt{3}\times\overline{DE}=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\dfrac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}$

$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=\dfrac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}$

因爲 $\Delta ABC$ 的三內角也是 $30°$、$60°$、$90°$，

$$\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}$$

現在來算正五邊形 $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}$ 的邊長 $\overline{A_1A_4}$ ＝?




$$\overline{A_1A_4}=2\times\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}a+a=\frac{5+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}a$$

所以正十五邊形 $A_1A_2.......\ A_{15}$ 的外接圓半徑 R

＝正五邊形 $A_1A_4A_7A_{10}\ A_{13}$ 的外接圓半徑

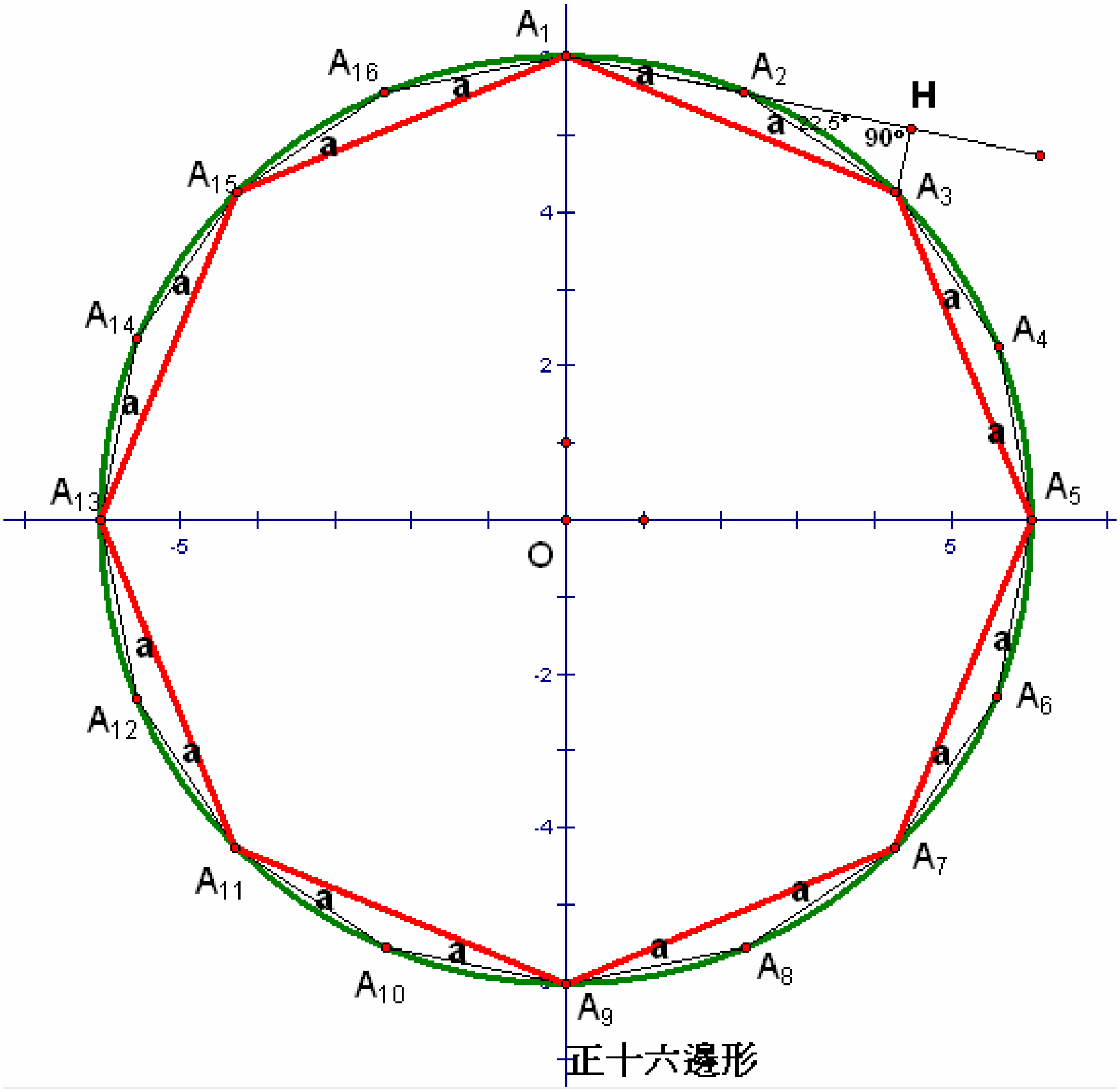
$=\dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\times$ 正五邊形 $A_1A_4A_7A_{10}\ A_{13}$ 的邊長

$=\dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\times\dfrac{5+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}a$ （分子利用分配律）

$$=\frac{5\sqrt{50+10\sqrt{5}}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{1200}}{40}a=\frac{5\sqrt{50+10\sqrt{5}}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}+20\sqrt{3}}{40}a$$

$$=\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4\sqrt{3}}{8}a$$

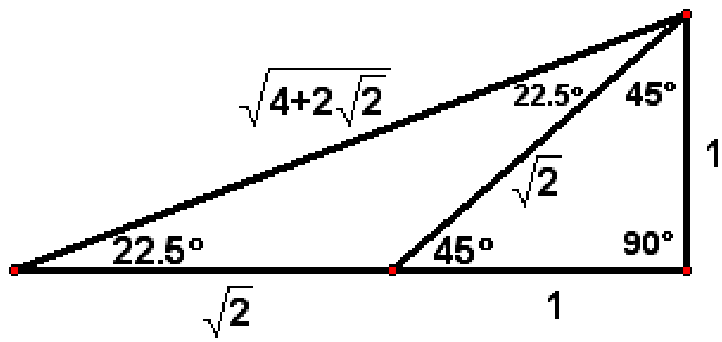
（十）邊長爲 a 的正十六邊形：如圖（圖中的 a 爲弦長）

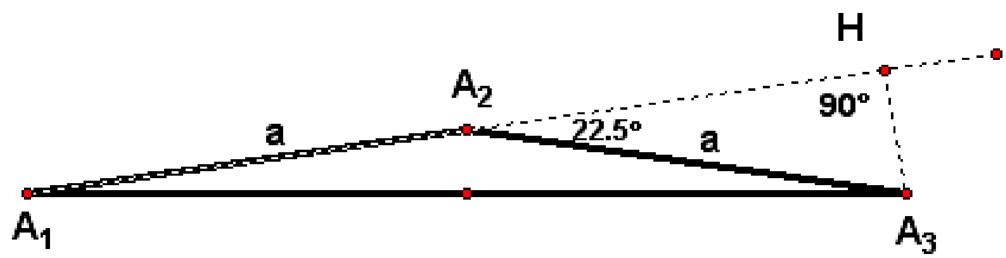



依次連接圖中 $A_1$ 、 $A_3$ 、 $A_5$ 、 $A_7$ 、 $A_9$ 、 $A_{11}$ 、 $A_{13}$ 、 $A_{15}$

得正八邊形 $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}A_{15}$ ，其邊長 $\overline{A_1A_3}$ 求法如下：

利用下圖的比例關係：




做 $\overline{A_3H}$ 垂直於 $\overline{A_1A_2}$ 的延長線於 H，因爲正十六邊形的每一外角爲 22.5°，可得

$\overline{A_3H} = a\times\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}a$ ；$\overline{A_2H} = a\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}a$

$$\overline{A_1A_3} = \sqrt{(a+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}a)^2}$$

$$=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{2+\sqrt{2}}{4}+\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\times a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times a$$

所以正十六邊形 $A_1A_2A_3$.......... $A_{14}A_{15}A_{16}$ 的外接圓半徑 R

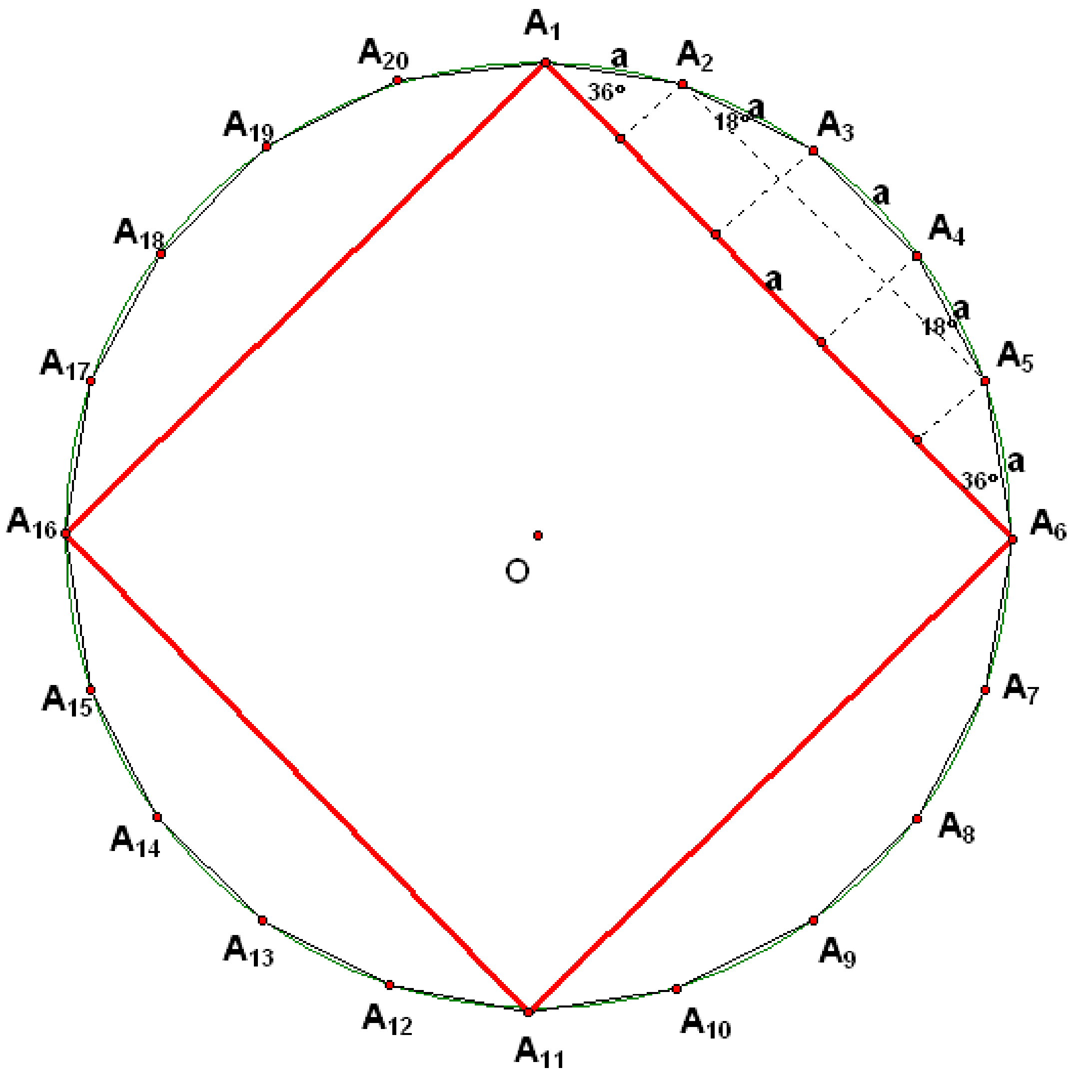
＝正八邊形 $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}A_{15}$ 的外接圓半徑

$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\times$ 正八邊形 $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}A_{15}$ 的邊長

$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times a$

$=\frac{\sqrt{8+4\sqrt{2+\sqrt{2}}+4\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2}\times a$

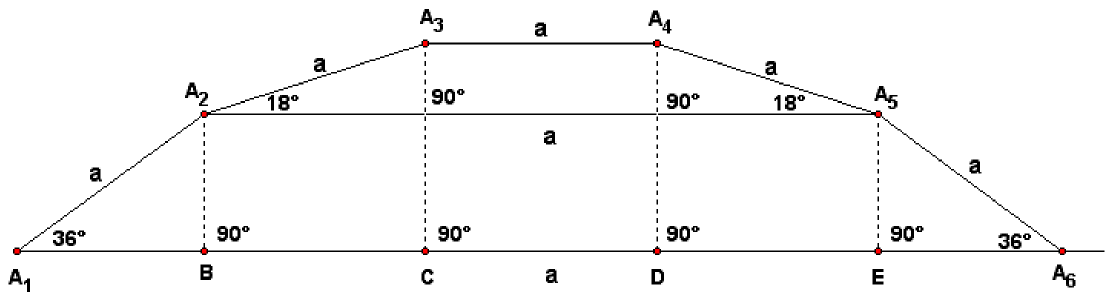
（十一）　　**邊長爲 a 的正二十邊形：**如圖（圖中的 a 爲弦長）




**正二十邊形**

依次連接圖中 $A_1$ 、 $A_6$ 、 $A_{11}$ 、 $A_{16}$ 四個點，

可得四邊形 $A_1A_6A_{11}A_{16}$ 爲正方形，其邊長 $\overline{A_1A_6}$ 求法如下：




參考正五邊形【P14】和正十邊形【P20】的圖，可得

上圖中的 $\overline{A_1B}+\overline{EA_6}$ ＝正五邊形圖中的 $\overline{A_2A_5}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$

而 $\overline{BC}+\overline{DE}$ ＝正十邊形圖中的 $\overline{A_1A_3}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}a$

本圖中 $\overline{A_1A_6}=a+\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}a+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$

$$=\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\times a$$

所以正二十邊形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots A_{20}$ 的外接圓半徑 R

＝正方形 $A_1A_6A_{11}A_{16}$ 的外接圓半徑

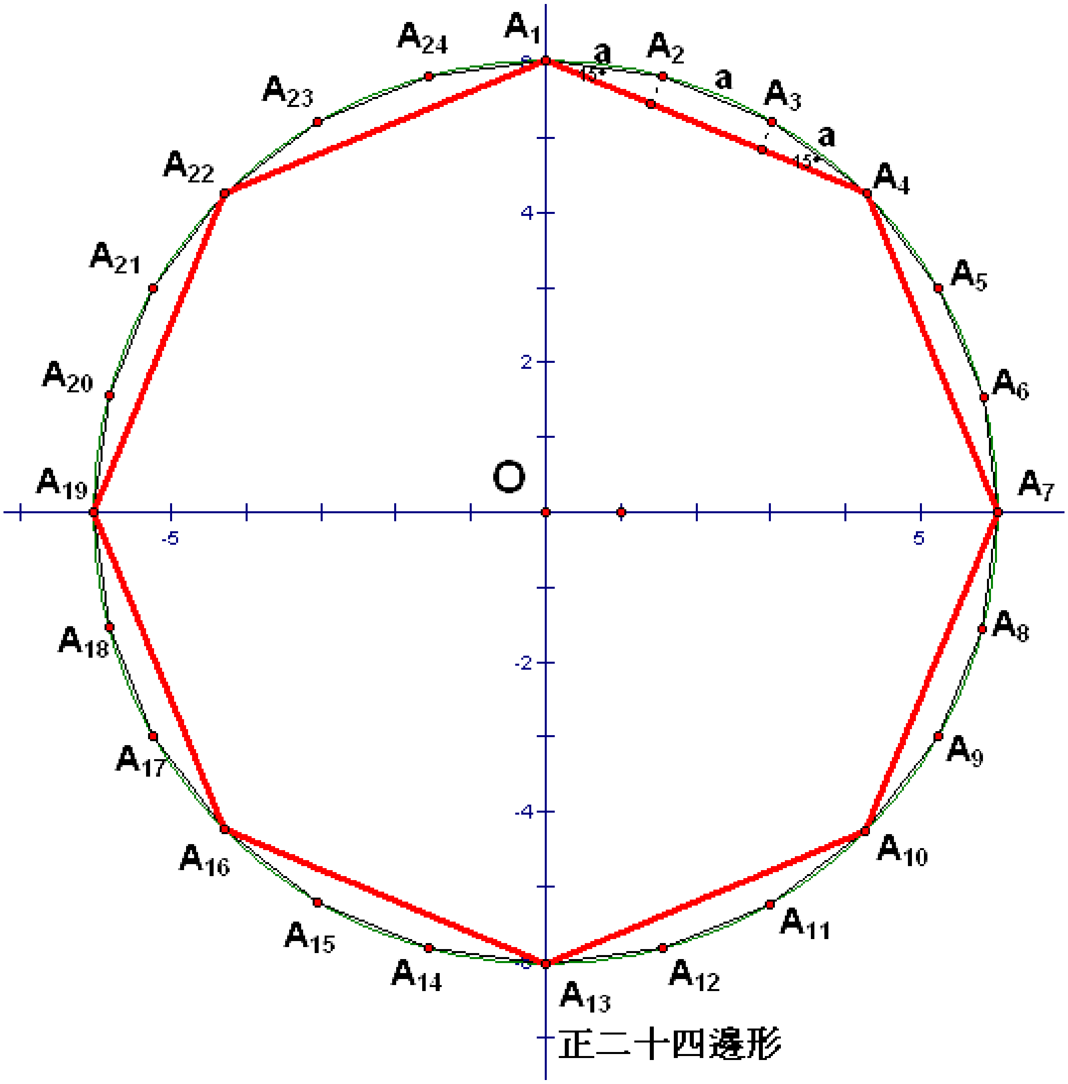
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times$ 正方形 $A_1A_6A_{11}A_{16}$ 的邊長

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\times a\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{4}\times a$$

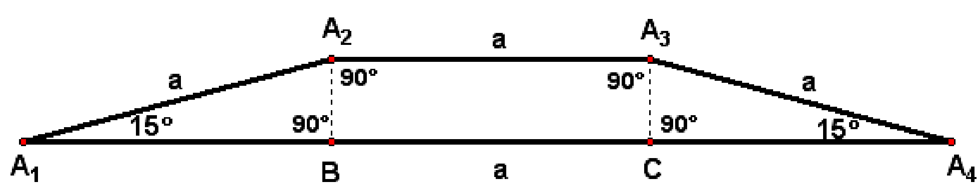
$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}\times a$$

（十二）　**邊長為 a 的正二十四邊形：**如圖（圖中的 a 為弦長）




依次連接圖中 $A_1$ 、 $A_4$ 、 $A_7$ 、 $A_{10}$ 、 $A_{13}$ 、 $A_{16}$ 、 $A_{19}$ 、 $A_{22}$

可得正八邊形 $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}A_{16}A_{19}A_{22}$ ，其邊長 $\overline{A_1A_4}$ 求法如下：




利用正十二邊形的圖【P22】可得

本圖中的 $\overline{A_1B}+\overline{CA_4}$ 等於正十二邊形圖中的 $\overline{A_2A_4} = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,a$

$$\overline{A_1A_4} = a+\sqrt{2+\sqrt{3}}a = (1+\sqrt{2+\sqrt{3}})\times a$$

所以正二十四邊形 $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{24}$ 的外接圓半徑 R

$$=\text{正八邊形 } A_1 A_4 A_7 A_{10} A_{13} A_{16} A_{19} A_{22} \text{ 的外接圓半徑}$$

$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\times \text{正八邊形 } A_1 A_4 A_7 A_{10} A_{13} A_{16} A_{19} A_{22} \text{ 的邊長}$$

$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\times(1+\sqrt{2+\sqrt{3}})a \qquad \left(\because \sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\times\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$$

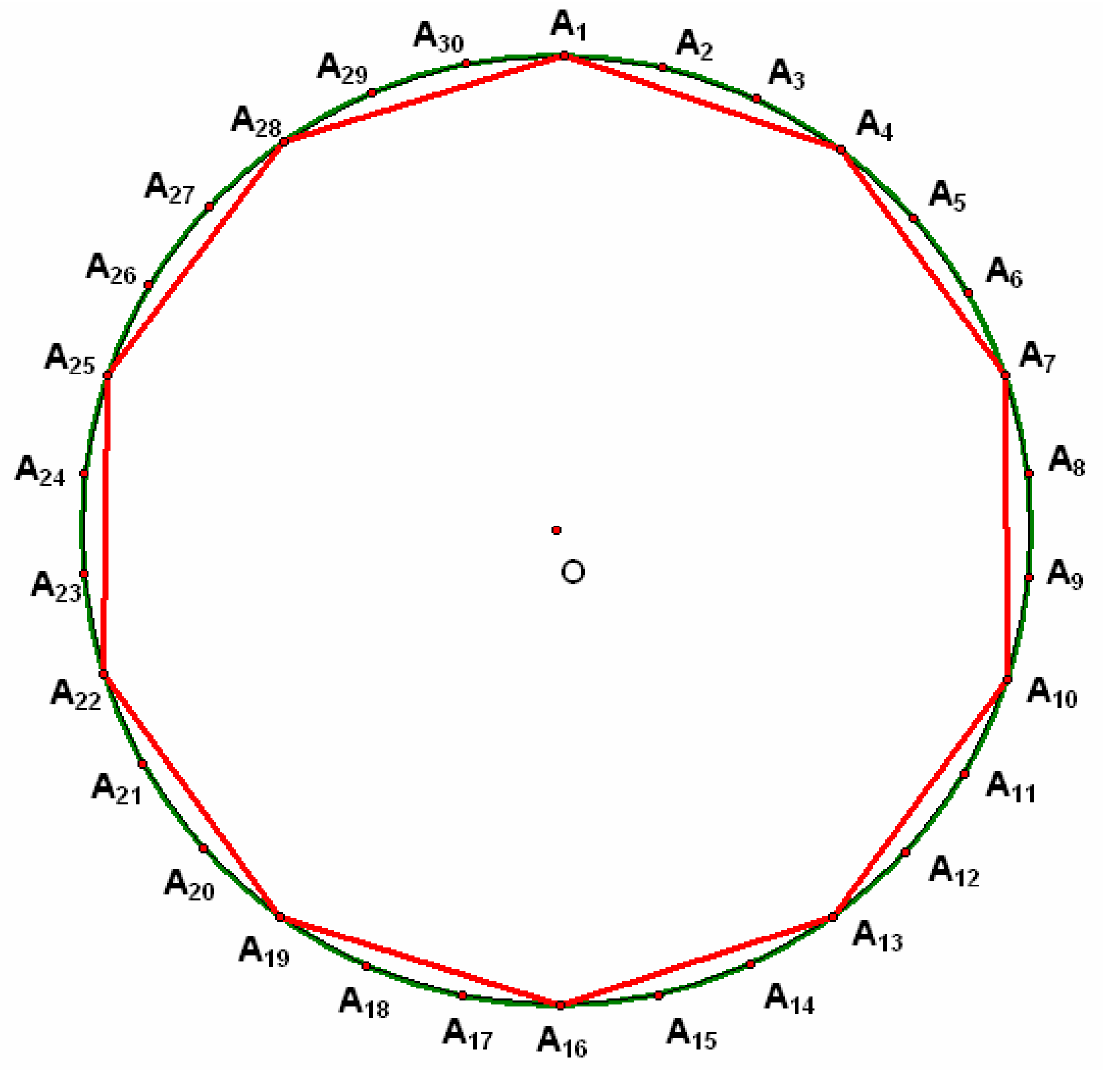
$$=\frac{\sqrt{(4+2\sqrt{2})(2+\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}{2}a$$

$$=\frac{\sqrt{(4+2\sqrt{2})(12+4\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3})}}{2}a$$

$$=\frac{\sqrt{64+24\sqrt{6}+40\sqrt{2}+32\sqrt{3}}}{4}a$$

$$=\frac{\sqrt{16+6\sqrt{6}+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}}}{2}a$$

（十三）　**邊長為 a 的正三十邊形**：如圖（圖中的 a 為弦長）

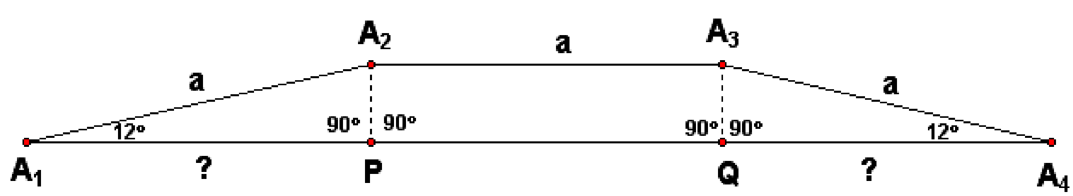


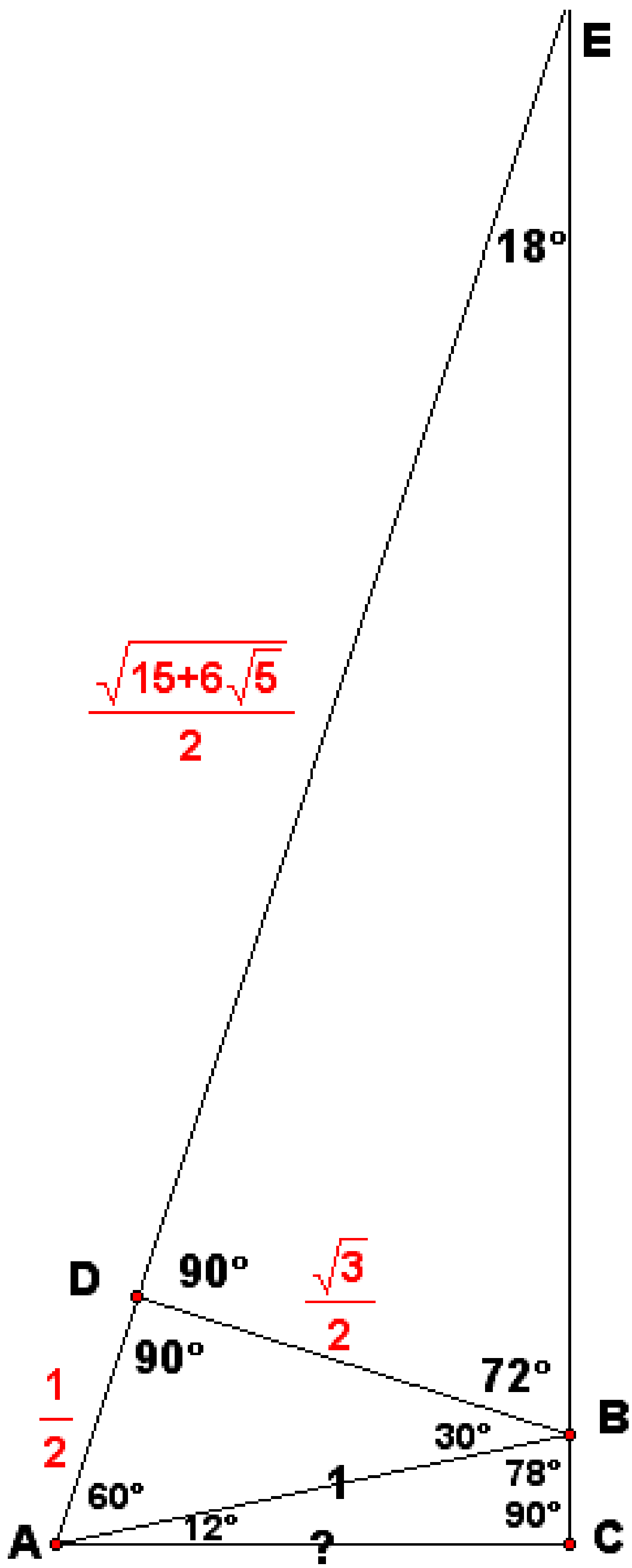

正三十邊形

正三十邊形的每個外角為 $\frac{360^\circ}{30}=12^\circ$，且 30 的因數有 1、2、3、5、6、10、15、30

依次連接圖中 $A_1$ 、 $A_4$ 、 $A_7$ 、 $A_{10}$ 、 $A_{13}$ 、 $A_{16}$ 、 $A_{19}$ 、 $A_{22}$ 、 $A_{25}$ 、 $A_{28}$

可得正十邊形 $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}A_{16}A_{19}A_{22}A_{25}A_{28}$ ，其邊長 $\overline{A_1A_4}$ 求法如下：






**【說明】:** 設 $\overline{AB}=1$，欲求 $\overline{AC}=?$

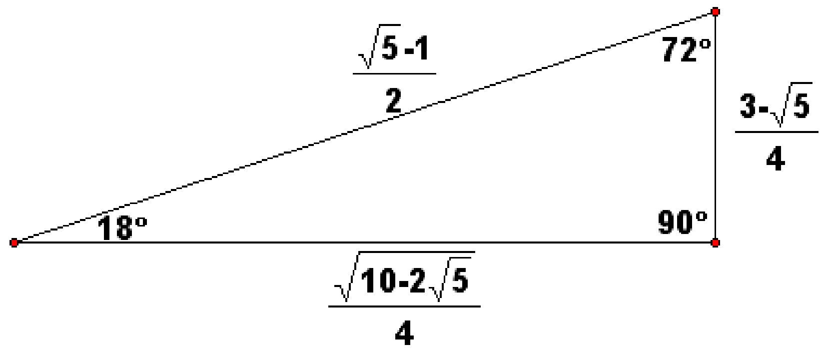
因爲$12°+60°=72°$，設計一個如上的圖形

$\because \Delta ABD$ 的三內角為$30°$、$60°$、$90°$，且 $\overline{AB} = 1$ ，

$\therefore \overline{AD} = \dfrac{1}{2}$ ，$\overline{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

參考正五邊形【P14】圖中的$\Delta A_1BH$ ，可得：

若$\Delta$ 的三內角為$18°$、$72°$、$90°$，其三邊長的比例如下圖：




$\because \Delta BDE$ 的三內角為$18°$、$72°$、$90°$，

$$\therefore \overline{DE} : \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{3-\sqrt{5}}{4} \rightarrow \overline{DE} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{2(3-\sqrt{5})}$$

$$\overline{DE} = \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}} \times (3+\sqrt{5})}{2(3-\sqrt{5}) \times (3+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}} \times \sqrt{(3+\sqrt{5})^2}}{2(3-\sqrt{5}) \times (3+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{240+96\sqrt{5}}}{8} = \frac{4\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2}$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2} = \frac{1+\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2}$$

$\because \Delta ACE$ 的三內角也是$18°$、$72°$、$90°$，

$$\therefore \overline{AC} : \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2} : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

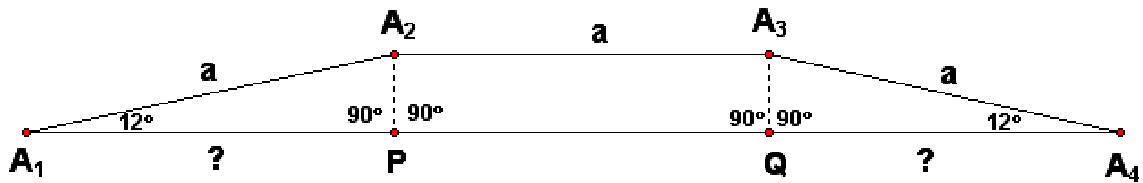
$$\overline{AC} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \times \frac{1+\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2} \div \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{4} \times \frac{1+\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{(3-\sqrt{5})(1+\sqrt{15+6\sqrt{5}})\times(\sqrt{5}+1)}{4(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{15+6\sqrt{5}})}{16}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{75+30\sqrt{5}}-1-\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{8}$$




所以 $\overline{A_1A_4}=2\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{75+30\sqrt{5}}-1-\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{8}a+a$

$$=\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{75+30\sqrt{5}}-\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{4}a$$

所以正三十邊形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots A_{30}$ 的外接圓半徑 R

$=$正十邊形 $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}A_{16}A_{19}A_{22}A_{25}A_{28}$ 的外接圓半徑

$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times$ 正十邊形 $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}A_{16}A_{19}A_{22}A_{25}A_{28}$ 的邊長

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{75+30\sqrt{5}}-\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{4}a$$

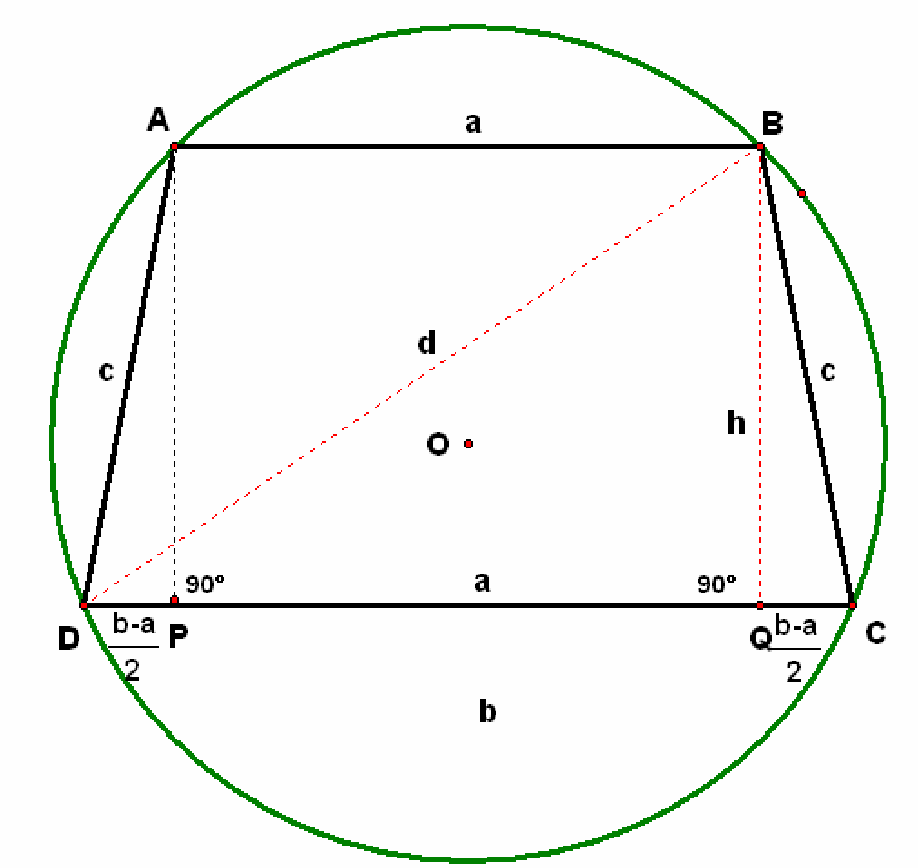
$$=\frac{(\sqrt{5}+1)(3+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+1)(\sqrt{75+30\sqrt{5}}-\sqrt{15+6\sqrt{5}})}{8}a$$

$$=\frac{(8+4\sqrt{5})+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}\times(\sqrt{75+30\sqrt{5}}-\sqrt{15+6\sqrt{5}})}{8}a$$

$$=\frac{(8+4\sqrt{5})+\sqrt{6+2\sqrt{5}}\times(\sqrt{75+30\sqrt{5}}-\sqrt{15+6\sqrt{5}})}{8}a$$

$$=\frac{8+4\sqrt{5}+\sqrt{750+330\sqrt{5}}-\sqrt{150+66\sqrt{5}}}{8}a$$

（十四）　　等腰梯形（兩底長分別爲 $a$ 、b，腰的長爲 c，且 b>a>0、2c>b－a）：如圖




等腰梯形

$$h^2 = c^2 - (\frac{b-a}{2})^2$$

$$d = \sqrt{h^2 + (\frac{b+a}{2})^2} = \sqrt{[c^2 - (\frac{b-a}{2})^2] + (\frac{b+a}{2})^2} = \sqrt{c^2 + ab}$$

【方法一】利用 $\Delta ABD$ 的三邊長 a、c、 $\sqrt{c^2 + ab}$ 來求 R

$$R = \frac{a \times c \times \sqrt{c^2+ab}}{\sqrt{(a+c+\sqrt{c^2+ab})(a+c-\sqrt{c^2+ab})(\sqrt{c^2+ab}+a-c)(\sqrt{c^2+ab}-a+c)}}$$

$$= \frac{a \times c \times \sqrt{c^2+ab}}{\sqrt{(a^2+2ac-ab)(ab-a^2+2ac)}} = \frac{a \times c \times \sqrt{c^2+ab}}{a \times \sqrt{(a+2c-b)(b-a+2c)}}$$

$$= \frac{c \times \sqrt{c^2+ab}}{\sqrt{(2c)^2-(b-a)^2}}$$

【方法二】利用$\Delta BCD$的三邊長 b、c、$\sqrt{c^2+ab}$ 來求 R

$$R=\frac{b\times c\times\sqrt{c^2+ab}}{\sqrt{(b+c+\sqrt{c^2+ab})(b+c-\sqrt{c^2+ab})(\sqrt{c^2+ab}+b-c)(\sqrt{c^2+ab}-b+c)}}$$

$$=\frac{b\times c\times\sqrt{c^2+ab}}{\sqrt{(b^2+2bc-ab)(ab-b^2+2bc)}}=\frac{b\times c\times\sqrt{c^2+ab}}{b\times\sqrt{(b+2c-a)(a-b+2c)}}$$

$$=\frac{c\times\sqrt{c^2+ab}}{\sqrt{(2c)^2-(b-a)^2}}$$

答案與方法一相同

三、　計算正 n 邊形的 $\frac{n \times a}{2 \times R}$ 的近似值：若正 n 邊形的邊長為 a、正 n 邊形的外接圓半徑為 R，$n \times a$ 代表正 n 邊形的周長、2 × R 為正 n 邊形的外接圓的直徑。

| n | R | $\frac{n \times a}{2 \times R}$ 的近似值 |
|---|---|---|
| 3 | $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ | 2.59807621135331594029116 95122588 |
| 4 | $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ | 2.82842712474619009760337 74484194 |
| 5 | $\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a$ | 2.93892626146236564584352 97731953 |
| 6 | a | 3 |
| 8 | $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}a$ | 3.06146745892071817382767 98722431 |
| 10 | $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ | 3.09016994374947424102293 41718282 |
| 12 | $\sqrt{2+\sqrt{3}}a$ | 3.10582854123024914818678 60514878 |
| 15 | $\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4\sqrt{3}}{8}a$ | 3.11867536226639005652613 42660771 |
| 16 | $\frac{\sqrt{8+4\sqrt{2+\sqrt{2}}+4\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2}a$ | 3.12144515225805228557255 78956326 |
| 20 | $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}a$ | 3.12868930080461738020210 63893452 |
| 24 | $\frac{\sqrt{16+6\sqrt{6}+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}}}{2}a$ | 3.13262861328123819716174 94694923 |
| 30 | $\frac{8+4\sqrt{5}+\sqrt{750+330\sqrt{5}}-\sqrt{150+66\sqrt{5}}}{8}a$ | 3.13585389802960414199502 46440757 |

從表中可知：**當 n 變大時，$\frac{n \times a}{2 \times R}$的近似值愈接近圓周率**。

## 伍、 研究結果：

### 一、 任意$\Delta$的外接圓半徑：

當$\Delta$的三邊長分別為 a、b、c 時，其外接圓半徑

$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}$$

### 二、 正 n 邊形的外接圓半徑：將正 n 邊形的邊長固定為 1 單位

| n | R | R 的近似值 |
|---|---|---|
| 3 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0.57735026918962576450914878050196 |
| 4 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0.70710678118654752440084436210485 |
| 5 | $\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$ | 0.85065080835203993218154049706301 |
| 6 | 1 | 1 |
| 8 | $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$ | 1.30656296487637652785664317342 72 |
| 10 | $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ | 1.6180339887498948482045868343656 |
| 12 | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | 1.9318516525781365734994863994578 |
| 15 | $\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4\sqrt{3}}{8}$ | 2.4048671723720653480488684587713 |
| 16 | $\frac{\sqrt{8+4\sqrt{2+\sqrt{2}}+4\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2}$ | 2.5629154477415061787960862961776 |

| | | |
|---|---|---|
| 20 | $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$ | 3.19622661074983077352 11078670368 |
| 24 | $\dfrac{\sqrt{16+6\sqrt{6}+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}}}{2}$ | 3.83064878777019433454 54814326501 |
| 30 | $\dfrac{8+4\sqrt{5}+\sqrt{750+330\sqrt{5}}-\sqrt{150+66\sqrt{5}}}{8}$ | 4.78338611675281306686 13886397094 |

當 n 不斷變大時，求 R 的過程愈複雜，R 的近似值將愈大，也就是外接圓的半徑將愈大。

三、 矩形的外接圓半徑：

矩形的長、寬分別為 a、b ，其外接圓半徑

$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

四、 等腰梯形的外接圓半徑：

兩底長分別為 $a$ 、b，腰的長為 c，且 b>a>0、2c>b－a，其外接圓半徑

$$R=\frac{c\times\sqrt{c^2+ab}}{\sqrt{(2c)^2-(b-a)^2}}$$

## 陸、 結論與討論：

一、 利用「相似三角形對應邊成比例」的概念就可以得到：不管三角形的形狀是銳角Δ、鈍角Δ或直角Δ，其外接圓半徑 R 都可以求得公式，而且公式完全一樣，在這方面，有一個不錯的結果。

二、 對於正 n 邊形的外接圓半徑：可以先求邊數較少的正 n 邊形的外接圓半徑，再利用它們去找邊數較多的正 n 邊形的外接圓半徑，例如：我們可以利用正 3 邊形、正 4 邊形、正 6 邊形的外接圓半徑去找正 12 邊形的外接圓半徑，這方面，也得到一個不錯的結果；只是我們並沒有找到：「當邊數變成 2 倍、3 倍…時，外接圓半徑可以很容易就找到」的方法。比如：當 n 從 3 變成 6 再變成 12 再變成 24…（都是 2 倍），外接圓半徑可以很容易一直往後找。另外我們也沒有找到：「正七邊形、正九邊形、正十八邊形…的外接圓半徑」，正七邊形的每個內角和外角都不是整數，本來要找出答案就比較困難；正九邊形的每個內角（140°）和每個外角（40°）都是整數，但是我們還是沒有辦法找到答案。也許將來可以往這兩方面探討。

三、 我們知道：「只要四邊形對角互補，則此四邊形必有外接圓」，一些特殊的四邊形，如正方形、矩形、等腰梯形，我們都有找到公式，可是對於一般的對角互補的四邊形，並沒有找到其外接圓半徑 $R$ 的公式。也許將來也可以往這方面探討。

四、 正 n 邊形的 $\dfrac{n \times a}{2 \times R}$ 近似值永遠小於圓周率；但隨 n 變大時，其值愈接近圓周率。

## 柒、 參考資料：


一、部編版國中數學第五冊：【國家教育研究院籌備處出版】
二、怎樣解題：G.波利亞著、閻育蘇譯、張公緒校。【九章出版社出版】
三、數學拾貝第 13 單元星空燦爛的數學（1）--托勒密如何編製弦表 P219 起：蔡聰明著【三民書局出版】
四、數學拾貝第 14 單元星空燦爛的數學（2）--托勒密定理 P239 起：蔡聰明著【三民書局出版】
五、高中基礎數學單元系列（13）之第一單元和角公式：陸思明著【建宏出版社出版】
六、高中基礎數學單元系列（14）三角形的性質與測量：陸思明著【建宏出版社出版】