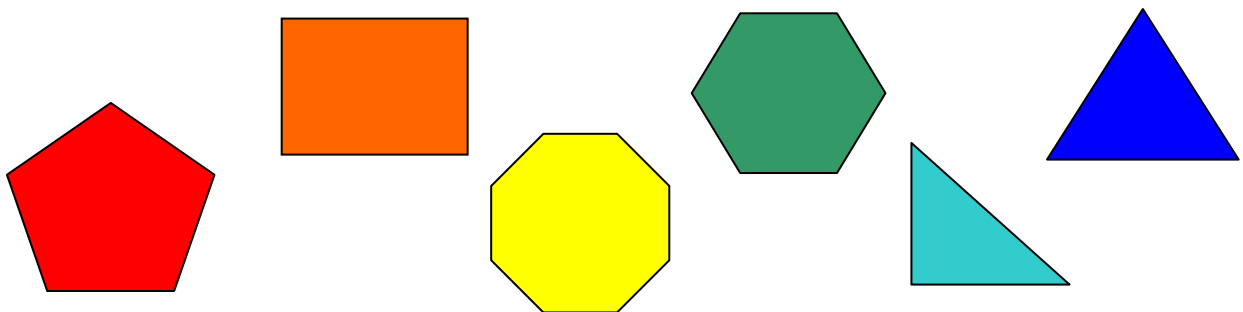
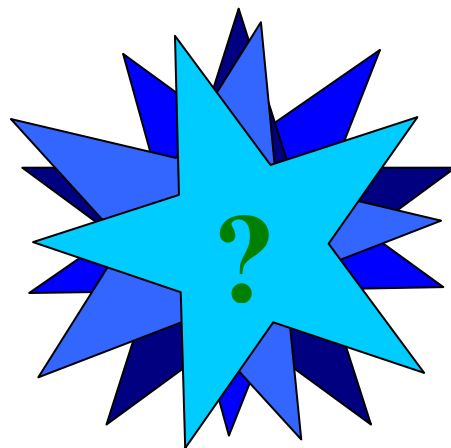
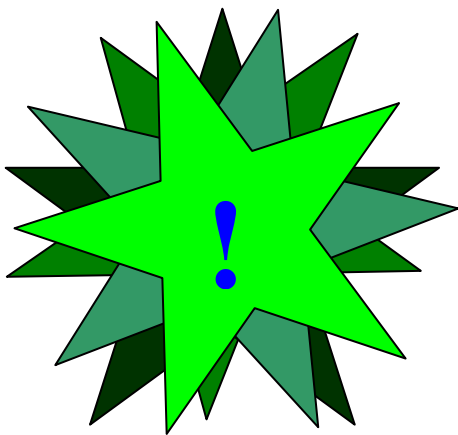


嘉義市第二十七屆國民中小學科學展覽  
作品說明書

動腦填數謎



科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：動腦填數謎

關 鍵 詞：數謎、數形關係、填數字

編 號：

# 目 錄

壹、摘要.....	1
貳、研究動機.....	1
參、研究目的.....	1
肆、研究設備及器材.....	1
伍、研究內容.....	2
一、圖形為一直線.....	2
二、圖形為多邊形.....	3
三、圖形為三邊形的延伸變化型.....	5
四、圖形為四邊形的延伸變化型.....	8
陸、研究結果.....	13
柒、研究心得.....	13
捌、參考資料及其他.....	13



# 研究主題：動腦填數字

## 壹、摘要

首先，我們嘗試從最簡單的一直線開始探討，接著分別假設有 3 個圈、4 個圈、5 個圈…，然後放入數字。再來，擴展到各種多邊形圖形，例如：三邊形、四邊形、五邊形、…。在圖形的頂點處填上數字，並分別以相同的圖形延伸，藉此觀察該圖形填入數字的規律。

## 貳、研究動機

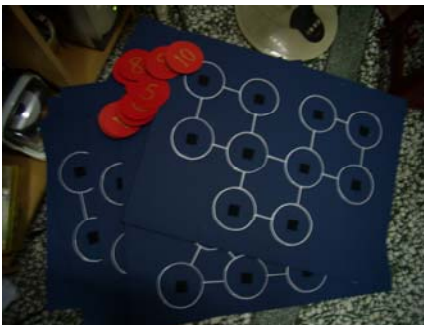
偶然接觸到類似的問題，但是圖形是不規則的變化，在填數字時，往往毫無頭緒的隨機填入，而數字通常會相鄰，必須經過多次的嘗試，才能找到解，於是我們決定探索這個有趣的問題，試圖將每種圖形的數字謎題做分析，以求得填入數字的方法是可以很簡單、輕鬆且迅速的，讓我們來當個填數字謎題的高手吧！

## 參、研究目的

- 一、找出一直線圖形填入數字的規律。
- 二、找出各種多邊形圖形填入數字的規律。
- 三、找出三邊形延伸圖形填入數字的規律。
- 四、找出四邊形延伸圖形填入數字的規律。
- 五、統整歸納出各圖形與數字的規律性。

## 肆、研究設備及器材

電腦、自製教具



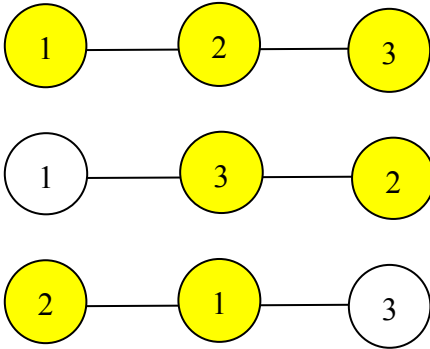
## 伍、研究內容

### 【註】

1. 圖形有  $n$  個圓圈，則填入數字訂為  $1, 2, 3, \dots, n$  的正整數（即有  $n$  個數字）
2. 圖形的圓圈以直線段相連接，則規定相連的圓圈，填入數字不可相鄰！
3. 填入數字的方向：順方向與反方向視為同一種填入法。

### 一、圖形為一直線

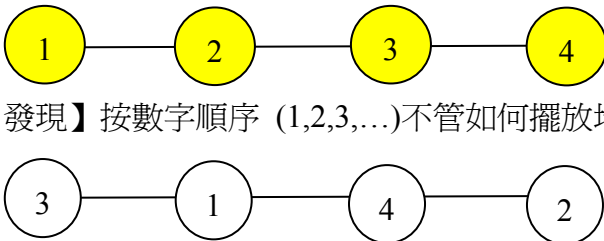
#### 1. 三個圈



【發現】一直線任意擺放無解

【理由】數字必定相鄰

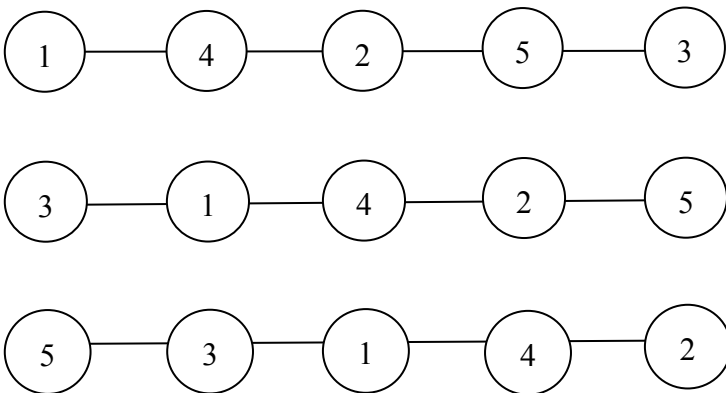
#### 2. 四個圈



【發現】按數字順序 (1,2,3,...) 不管如何擺放均無解

【發現】有解

#### 3. 五個圈



【發現】有解

【理由】按照此規律繼續改變數字位置則有解

### 作法

1 放邊邊，2、3 任意放皆會相鄰。

1 放邊邊，2、3 任意放皆會相鄰。

1 放中間，2、3 任意放皆會相鄰。

### 作法

1 放邊邊，2、3、4 任意放皆會相鄰。

1 放中間，前後接 3、4(避免與 2 相鄰) 再放 2。

### 作法

1、2、3 互相間格擺放再插入 4、5 則可找到一組解。

數字後推一個位置將最後一個數移到最前面第一個位置。

每次後推都是一種解。

### 【小結論】

令  $n$  為擺放數字之最大數

$n \leq 3$  必無解

【理由】 因為若有三個圈，將 1 隨意擺放於一點，則 2、3 必定相鄰。

$n = 4$  可能有解，也可能無解

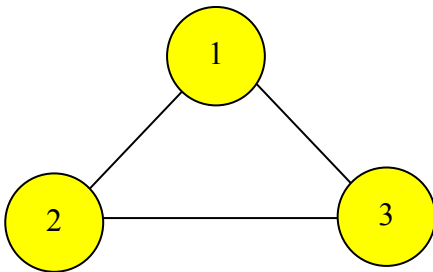
【理由】 數字按照規律(1.2.3....)擺放則無解；反之，在其餘狀況下有解。

$n > 4$  必定有解

【理由】 在五個圈時，擺放的規律只有一種：1、4、2、5、3。

## 二、圖形為多邊形

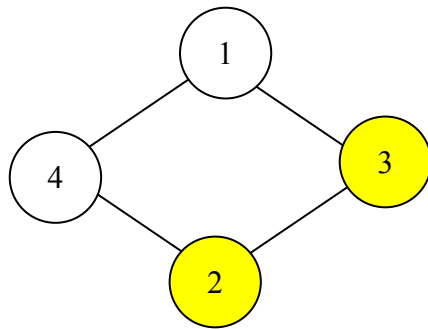
### 1. 三邊形



### 作法

首先在中間的頂點處，擺放 1，剩下的 2、3 不論擺放何處皆會相鄰。

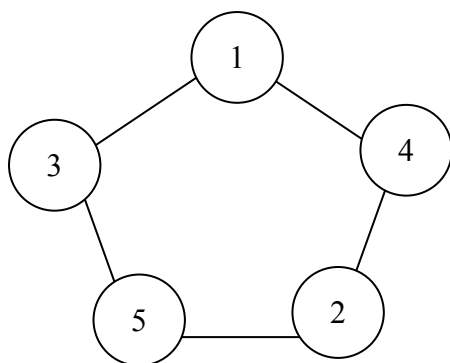
### 2. 四邊形



### 作法

首先在上方的中間點放置 1，接著為了避免 2 與 1 相鄰，將 2 放置下方的中間點，最後放入 3、4，結果 2 與 3 相鄰。

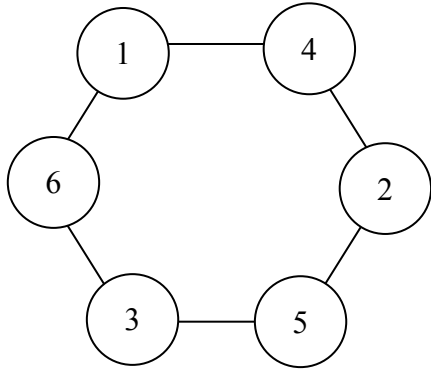
### 3. 五邊形



### 作法

首先在上方中間點置入 1，將 2 放置右下角的圈，再來把 3 放入左中央的圈，以不與 3 相鄰為前提，放入 4 在右中央的圈，剩下的圈即擺放數字 5，皆不相鄰。

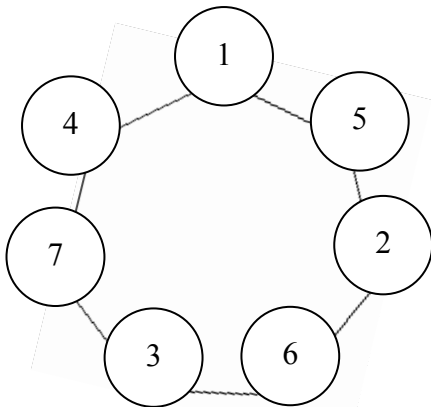
#### 4. 六邊形



#### 作法

首先在左上方第一個圈擺放 1，將 2 在放置右方第二個圈，接著將 3 放入左下方的圈，剩下的圈順時針依序擺放 4、5、6 後，數字皆不相鄰。

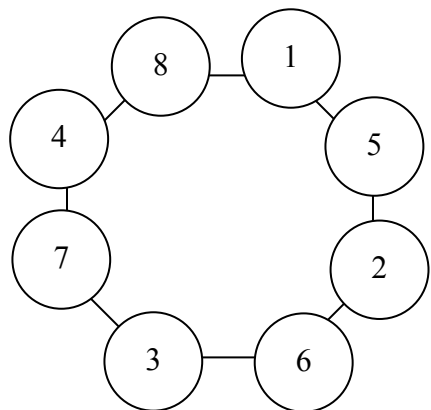
#### 5. 七邊形



#### 作法

首先在最上方的圈放入 1，將 2、3、4 順時針並隔一個圈擺放，然後再將 5、6、7 也同樣以順時針的方式填入剩下的圈中，則數字皆不相鄰。

#### 6. 八邊形



#### 作法

首先在右方對稱的第一個圈放入 1，將 2、3、4 順時針依序並隔一個圈擺放，再將 5、6、7、8 同樣依序順時針填入，則數字皆不相鄰。

#### 【小結論】

令  $n$  為擺放數字之最大數

$n \leq 4$  必無解

【理由】 因一圓連接兩個圈，所以若將 1、2 擺放於對角，則 3 必定與 2 相鄰。

$n \geq 5$  可能有解，也可能無解

【理由】 假如按數字順序排放，則數字必相鄰，即無解；反之，則可以找出有解的排放方式。

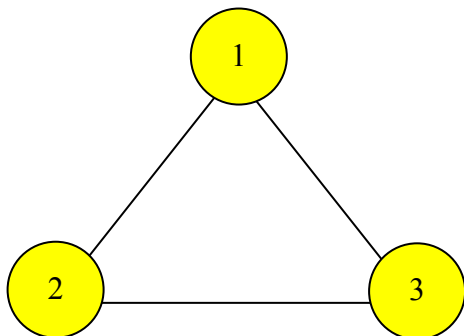
### 三、圖形為三角形的延伸變化型

#### (一) 三角形及三角形『橫向』延伸變化型

圖形名稱	是否有解	理由
三角形 ①	無解	數字若未按數字規律(1,2,3,4...)擺放，最後必會相鄰，因此，數字 1~3 任意擺放均無解。
三角形的延伸 ② (兩個三角形)	無解	1 個圈連三線，須隔 3 個數字(由數字 5 開始填)，此圖才有解。
三角形的延伸 ③ (三個三角形)	無解	左下若擺放奇數，須隔一數才可能有解，若左下放 1，與其相連的兩圈，空格可填 3,4,5；3,4 相鄰、4,5 相鄰，只可填 3,5，但若填 3,5，則 2,4 無論填哪均無解。
三角形的延伸 ④ (四個三角形)	有解	將 1 放左上角第一個均無解，將 1 放在有 4 個連接點的圈均有解。
三角形的延伸 ⑤ (五個三角形)	有解	數字 1~7 有解 若將 1 擺放 4 個連接點上的圈，連接的圈需隔一數填寫，才可能有解。

圖解如下：

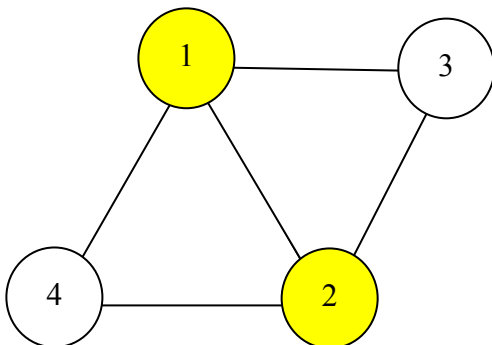
三角形之圖解 ①



作法

將 1 放在任何一個頂點，則 2 不論如何擺放都會與 1 相鄰。

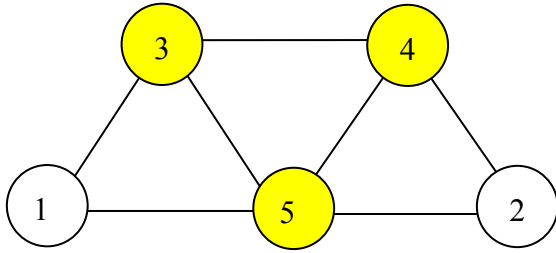
延伸圖解 ②



作法

先在左上方放 1，再把 3 放在右上方，爲了避免 3 與 4 相連，所以把 4 放在左下角，剩下最後一個空格只能填 2，最後 1 和 2 必定相連。

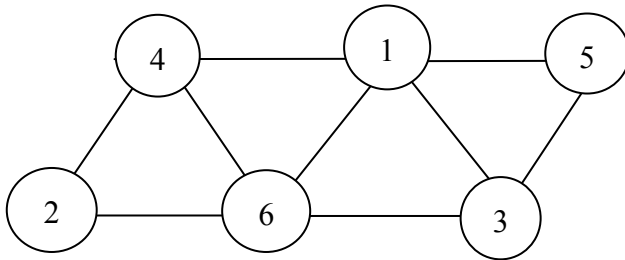
延伸圖解 ③



作法

先將 1 放在左下角，再將 2 放在右下角，把 3 放在左上角，5 放在下方中間，4 只能放在右上方，最後 3、4 必定相連，4 和 5 也會相連。

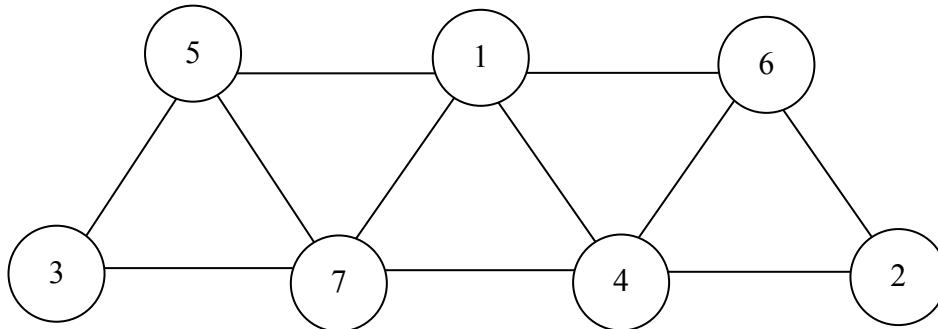
延伸圖解 ④



作法

先將 1 放於上方中間，再將 2 放在左下方，將 3 放於右下方，4 放在左上方，剩下右上方和下方中間，避免 4 與 5 連接，將 5 放於右上方，再將 6 放於下方中間，最後，每個數字均不相連。

延伸圖解 ⑤



作法

先將 1 和 7 放在連接最多圈圈的特殊點，將 2 放於右下角，3 放在左下角，5 和 6 分開放於上分空格，最後一個圈圈則放 4，則每個數字均不相鄰。

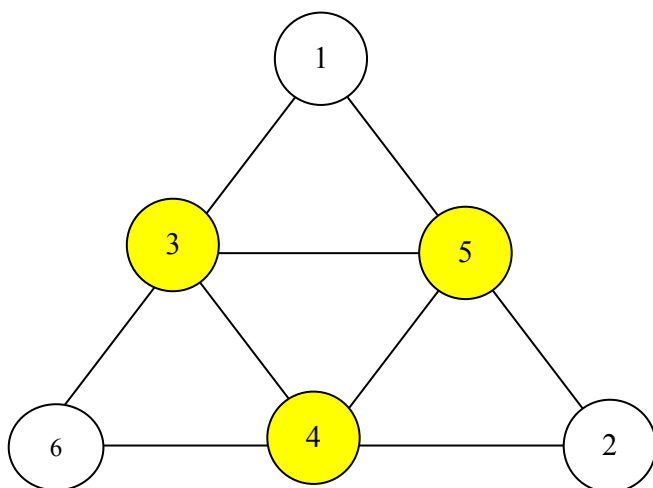
(二) 三角形『塔狀』延伸變化型

圖形名稱	是否有解	理由
三角形的延伸 ⑥ (雙層塔)	無解	若頂端放 1，則第二層須放數字 3,4,5,6；假設第二層放 4,6，下層必放 2,3,5；假設第二層放 3,6，下層必放 2,4,5；無論怎麼擺放數字必和第二層相鄰，因此無解。
三角形的延伸 ⑦ (三層塔)	有解	找出特殊點(一圈連接最多圈或者最少者)，填入特殊數字(頭尾)，依序將數字填入，求得有解。
三角形的延伸 ⑧ (四層塔)	有解	找出特殊點(一圈連接最多圈或者最少者)，填入特殊數字(頭尾)，依序將數字填入，求得有解。



圖解如下：

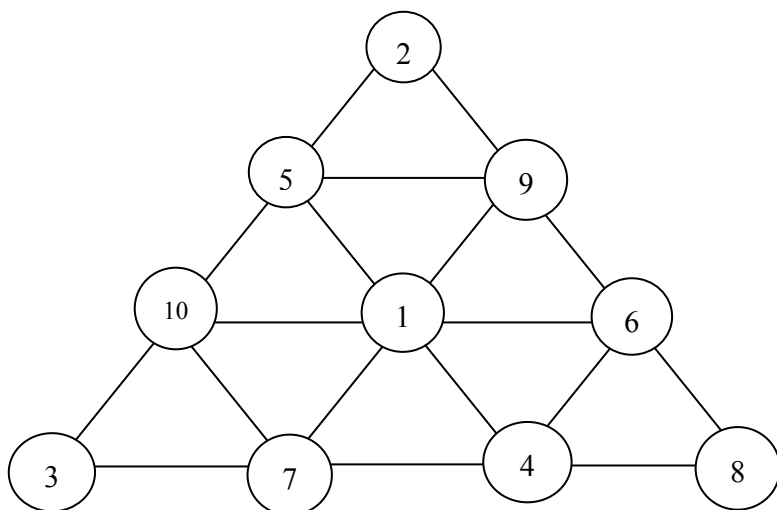
三角形的塔狀延伸(雙層塔) ⑥



作法

先將 1 放在塔頂，其連接的兩圈分別放入 3,5，3 不能與 2,4 相鄰，5 不能與 4,6 相鄰，則無論如何擺放皆無解。

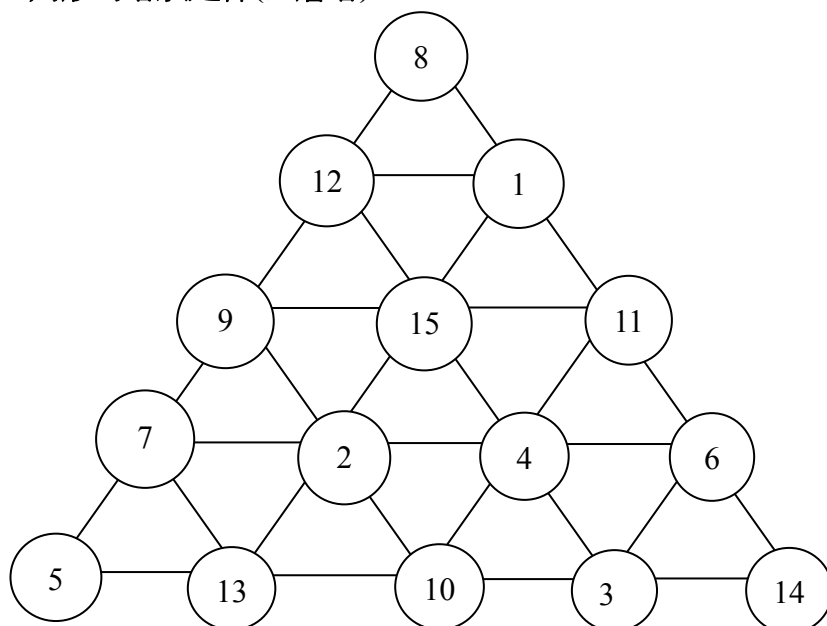
三角形的塔狀延伸(三層塔) ⑦



作法

先將 1 放在連接最多直線的圈，再將除了 2 以外的數字分別放入連接的圈圈，最後再將剩下的 2、3、8 填入則有解。

三角形的塔狀延伸(四層塔) ⑧



作法

先將 8 放在塔頂，再將 12 和 1 放在第二層，然後再依序將其他數字放入連接的圈圈，得到有解。

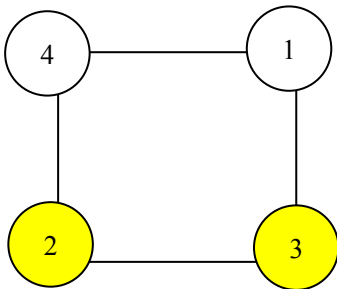
#### 四、圖形為四邊形的延伸變化型

##### (一) 四邊形及四邊形『橫向』延伸變化型

圖形名稱	是否有解	理由
四邊形 ①	無解	數字若未按數字規律(1,2,3,4...)擺放，最後必會相鄰，因此，數字 1~4 任意擺放均無解。
四邊形的延伸 ② (兩個四邊形連接，重疊兩個圈)	有解	依照上方敘述，依序將數字填入，求得有解。
四邊形的延伸 ③ (三個四邊形連接，共重疊四個圈)	有解	依照上方敘述，依序將數字填入，求得有解。

圖解如下：

##### 四邊形 ①

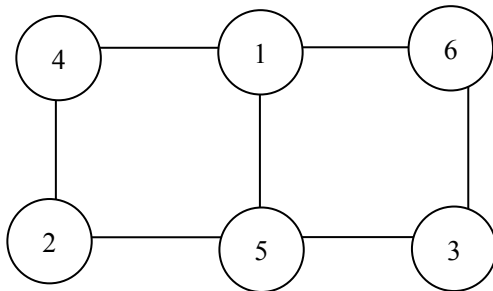


##### 作法

在右上角的圈擺放 1，再將 2 放置左下角的圈，最後剩下 3、4 無論放哪個圈，2 和 3 必會相鄰。

##### 四邊形的延伸 ②

(兩個四邊形連接，重疊兩個圈)

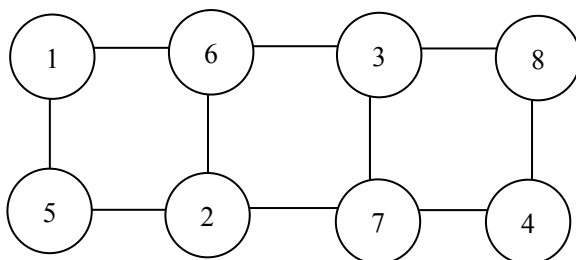


##### 作法

在上方中間的圈放入 1，左下角的圈放 2，再將 3 放在右下角的圈，最後將 4、5、6 依序從左方放入。

##### 四邊形的延伸 ③

(三個四邊形連接，共重疊四個圈)



##### 作法

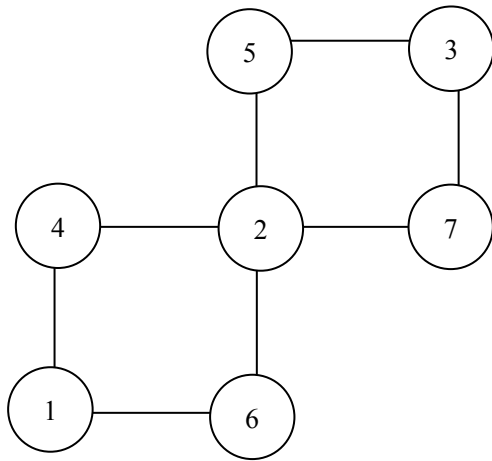
先將 1 放置於左上方的圈，再陸續將 2、3、4 以對角線的擺放方式放入，最後將 5、6、7、8 由左而右填入剩下的圈中，則數字皆不相鄰。

(二) 四邊形的『斜直線』延伸變化型

圖形名稱	是否有解	理由
四邊形的延伸 ④ ( 兩個四邊形連接，重疊一個圈 )	有解	數字若未按數字規律(1,2,3,4...)擺放，依序填入，求得有解。
四邊形的延伸 ⑤ ( 三個四邊形連接，重疊一個圈 )	有解	數字若未按數字規律(1,2,3,4...)擺放，依序填入，求得有解。

圖解如下：

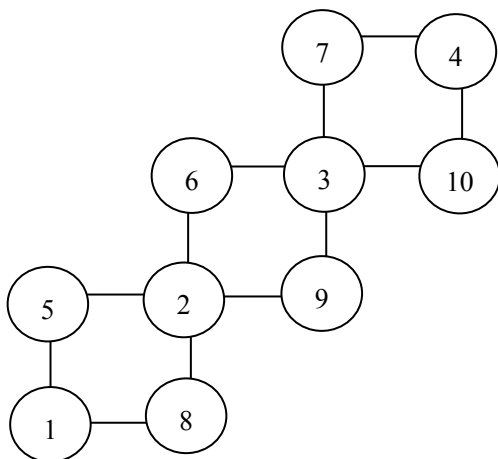
四邊形的延伸 ④  
( 兩個四邊形連接，重疊一個圈 )



作法

先將 1 放於左下方的圈，再將 2、3 順序放置與數字 1 的對角線位置，接著分別把 4、5 放在 1 和 2 的上方，最後把 6、7 任意放入剩下的圈中，則數字皆不相鄰。

四邊形的延伸 ⑤  
( 三個四邊形連接，重疊一個圈 )



作法

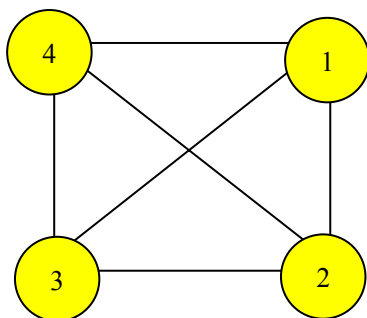
先將 1 放在左下方的圈，再將 2、3、4 依序放入數字 1 的對角線位置，接著分別把 5、6、7 放在 1、2 和 3 的上方，最後把 8、9、10 任意放入剩下的圈中，則數字皆不相鄰。

### (三) 四邊形『以直線將頂點連接』延伸變化型

圖形名稱	是否有解	理由
四邊形的延伸 6 ( 四邊形內以直線將對角線連接 )	無解	數字若未按數字規律(1,2,3,4...)擺放，最後必會相鄰，因此，數字 1~4 任意擺放均無解。
四邊形的延伸 7 ( 兩個四邊形連接，以直線將對角線連成一線 )	無解	數字若未按數字規律(1,2,3,4...)擺放，最後必會相鄰。
四邊形的延伸 8 ( 三個四邊形，以直線將對角線連成一線 )	無解	數字若未按數字規律(1,2,3,4...)擺放，最後必會相鄰。
四邊形的延伸 9 ( 四個四邊形，以直線將對角線連成一線 )	有解	依照上方敘述，依序將數字填入，求得有解。

圖解如下：

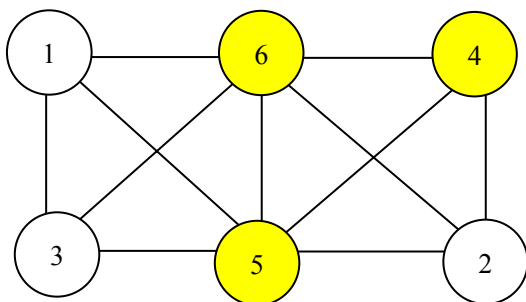
四邊形的延伸 6  
( 四邊形內以直線將對角線連接 )



作法

先將 1 擺放於任一角，不管 2 擺放於其他三角的任一角，皆會相連接。

四邊形的延伸 7  
( 兩個四邊形連接，以直線將對角線連成一線 )

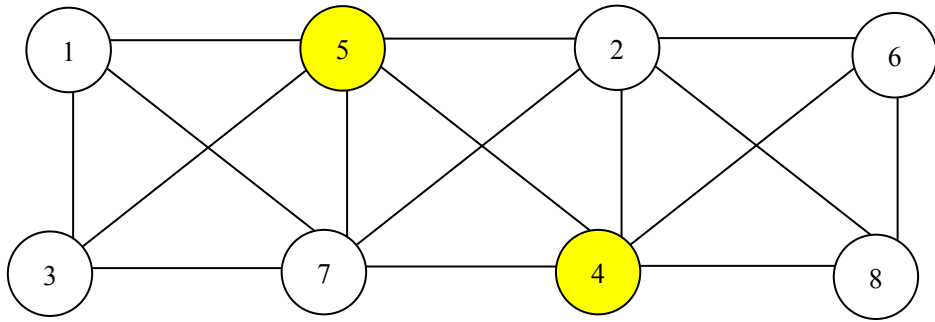


作法

先將 1 擺放於左上角，跟 1 有連接的三個點，皆不能擺 2，所以將 2 擺放於右下角，三個連接點皆不能擺 3，相同的，4 就必須擺於右上角，4 剩下連出去的兩個連接點，皆不能擺放 5，最後 4、5 和 5、6 皆會相連。

### 四邊形的延伸 8

( 三個四邊形，以直線將對角線連成一線 )

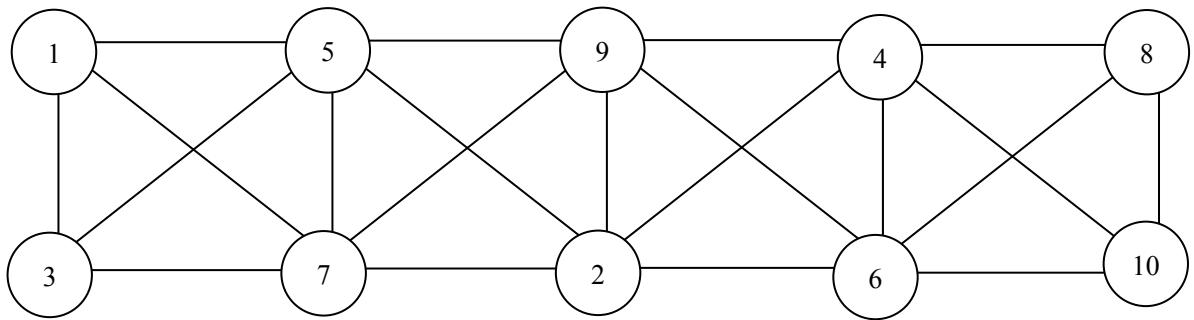


#### 作法

先在最左上方的圈填入 1，下方填入 3，接著在下一行(由上而下)填入 5、7，依同樣的方式依序填入 2、4 和 6、8，則 5 和 4 會相鄰。

### 四邊形的延伸 9

( 四個四邊形，以直線將對角線連成一線 )



#### 作法

先在最左上方的圈填入 1，下方填入 3，接著在下一行(由上而下)填入 5、7，依同樣的方式依序填入 9、2，4、6，8、10，則數字互不相鄰。

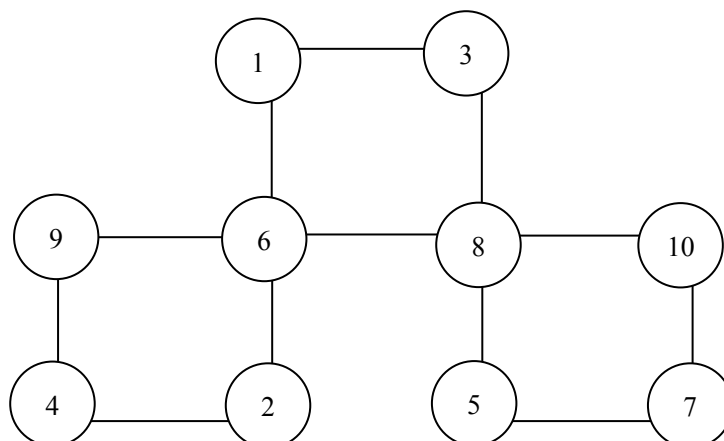
### (四) 四邊形『交叉擺放』延伸變化型

圖形名稱	是否有解	理由
四邊形的延伸 10 (將三個四邊形上下交錯擺放)	有解	先將開頭的 1 和最尾端的數字 8 放入連接最多圈圈的特殊點，然後再將其他數字填入，求得有解。
四邊形的延伸 11 (將四個四邊形上下交錯擺放)	有解	先決定 1 放入的位置後，再將接下來的數字以對角線的方式擺放，即可錯開相鄰的兩數，求得有解。

圖解如下：

### 四邊形的延伸 10

(將三個四邊形上下交錯擺放)

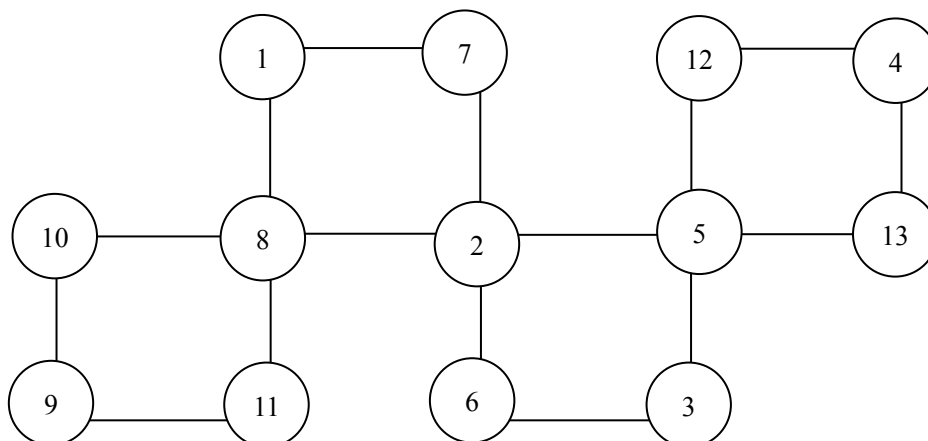


### 作法

先將 1 和 8 放在連接最多圈圈的特殊點上，然後把與 1 和 8 相鄰的 2 和 7 分別擺放在 1、8 的對角線，再依序將剩下的數字填入，即可得到有解。

### 四邊形的延伸 11

(將四個四邊形上下交錯擺放)



### 作法

先在最左上方的圈放入 1，在 1 的右對角線處放 2，2 的對角線處放 3，再將 4 放置最右上方的圈，然後把 5、6 依序放入前一數左對角線的圈，接著將 7 放在 1 的右方，在把 8、9 依同樣的方式填入，此時剩下 10、11、12、13，則無論填置哪個圈，皆會有解。

## 陸、研究結果

假如填入的最大數為  $n$ ，即填入的數為  $1\sim n$ ：

### 一、一直線圖形：

若  $n \leq 3$  必無解；

若  $n = 4$  可能有解，可能無解；

若  $n > 4$  必定有解。

### 二、多邊形圖形：

若  $n \leq 4$  必無解；

若  $n \geq 5$  可能有解，也可能無解。

從一、二兩點發現，一直線圖形和多邊形圖形，若圈數相同，差別僅在於一條線連接頭、尾兩端的圓圈，因此，多邊形圖形的限制條件比一直線圖形多 1。

### 三、三邊形圖形的延伸：

1. 橫向延伸，三邊形須有 4 個以上才有解

2. 塔狀延伸，須有 3 層以上才有解

### 四、四邊形圖形的延伸：

1. 橫向延伸，四邊形須有 2 個以上才有解

2. 斜直線延伸，四邊形須有 2 個以上才有解

3. 以直線將頂點連接延伸，四邊形須有 4 個以上才有解

4. 交叉擺放延伸，四邊形須有 2 個以上才有解

## 柒、研究心得

在接觸這個問題之後，我們的好奇心越來越大，越做越有興趣，創造出來新型式的填數謎題，圖形種類也越來越多，填法也隨之越顯多變化。研究的過程中，培養了我們在遇到問題時要不斷的去嘗試、實驗的精神，並且跳脫平常的思考模式，多一份想像空間。此外，靠著小組成員的分工合作、同心協力，並且抱著努力不懈的精神，一次次克服難關、解決問題，找出解題的方法，最後終於解出答案，這個過程讓我們很有成就感，希望藉由科展這個活動和大家一起分享我們所研究的成果！

## 捌、參考資料及其他

理查·菲立普(Richard Phillips)著，洪萬生等譯。數字邏輯 101。初版。臺北市。究竟出版社。第 25 頁。2004[民 93]。