研究主題：畢達哥拉斯的「圓」舞曲

摘要：

若 A、B 為平面上的兩個定點，則滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 的動點 P 會形成 $\overline{AB}$ 的中垂線；可是我們研究出，只要 m>0，滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$ 的動點 P 會形成一個圓。那如果 m>0 又 $m\to 1$，這時「圓」會如何呢？另外，我們也探討出利用尺規作圖就可以把上述的圓畫出來。

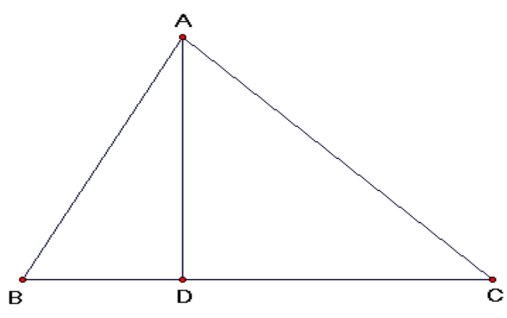
在研究和探討的過程中，發現我們經常用的「兩點距離公式」等等都是從畢氏定理推導出來的。畢氏定理真的是數學上最常用的公式之一，除了「兩點距離公式」之外，只要圖形中有垂直的現象，大多可以利用畢氏定理來思考解決的辦法。本研究的最後一部份，就是希望單純使用畢氏定理來處理一些圖形中常見的垂直現象。

本研究主題用到的概念或公式：

1. 畢氏定理：直角三角形之兩股的平方和等於斜邊的平方。

2. 座標平面上兩點的距離公式：
   若 $A(x_1,y_1)$ 與 $B(x_2,y_2)$ 為座標平面上的兩點，則 A 與 B 的距離
   $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

3. 直角三角形「母子相似定理」:
   如圖，ΔABC 為直角三角形，且 $\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的高，
   則 $\overline{AD}^2=\overline{BD}\times\overline{CD}$。



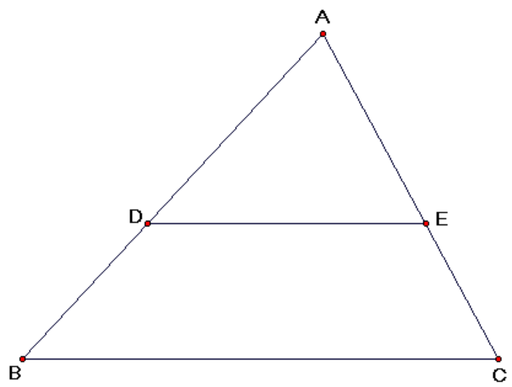
4.「圓」的方程式：

在座標平面上，以(x_0, y_0)為圓心，r 為半徑的「圓」的方程式為

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

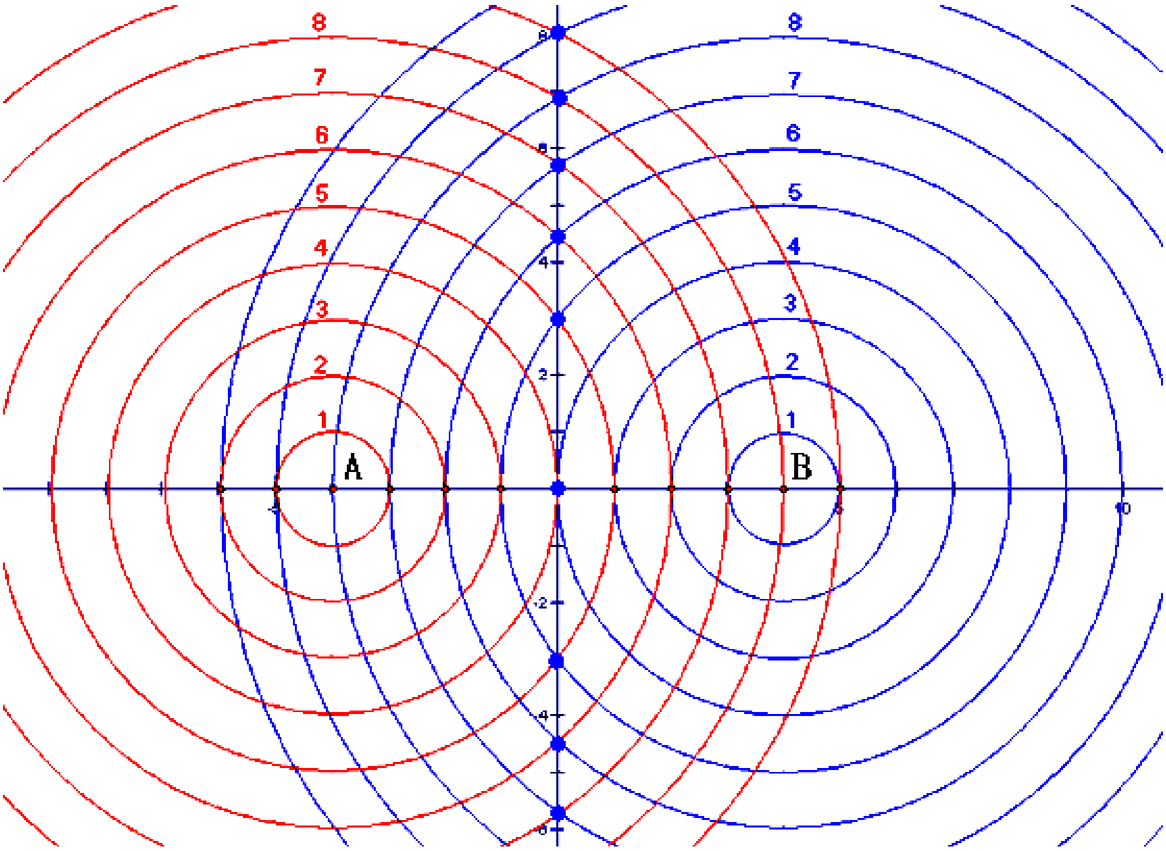
5.平行線截比例線段：如圖，

D、E 分別為ΔABC中$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上的一點，且$\overline{DE}//\overline{BC}$，則$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$。



壹、研究動機：

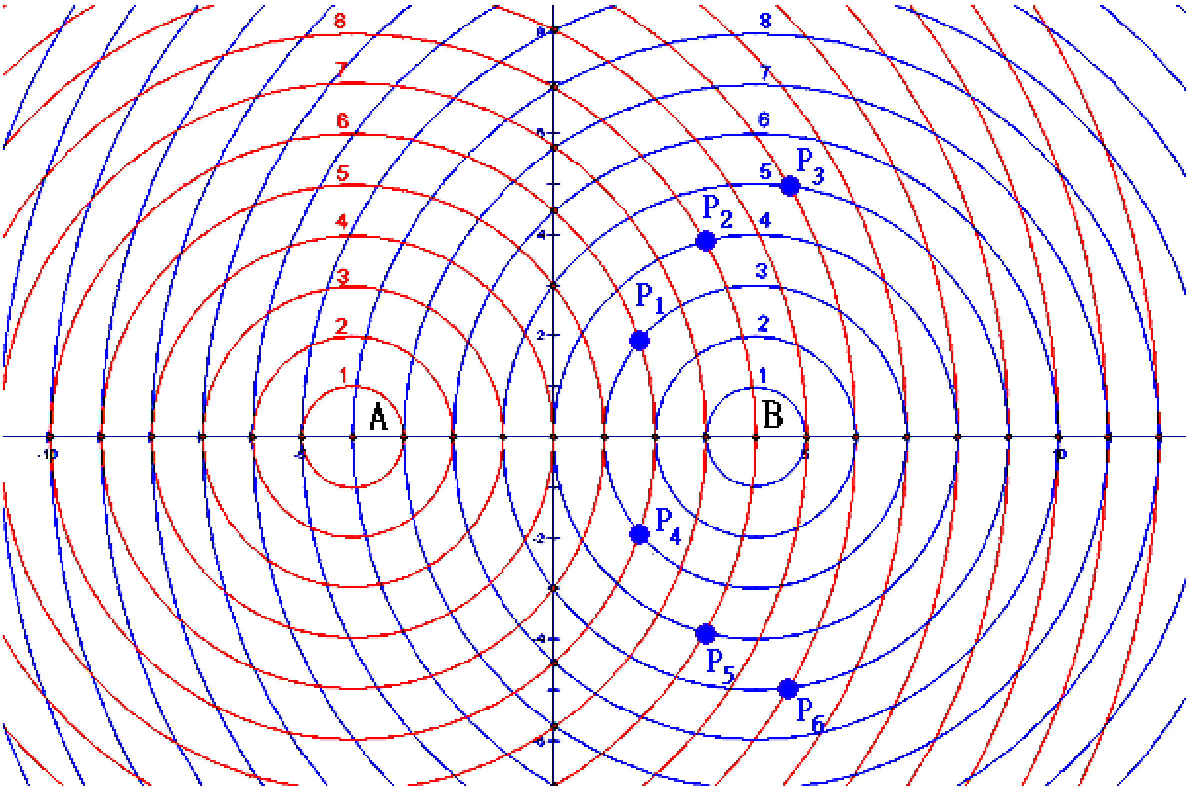
在上數學課時，曾經學到：「若 A、B 為平面上之兩定點，P 為另一動點，則所有滿足$\overline{PA}=\overline{PB}$的點 P 會形成$\overline{AB}$的中垂線」。(如圖一中，$\overline{AB}$為 8 單位長，分別以 A、B 為圓心，1、2、3、4、5、6…為半徑畫同心圓，果然滿足$\overline{PA}=\overline{PB}$的 P 點都落在$\overline{AB}$的中垂線上)。



(圖一)

可是若 $\overline{PA} \neq \overline{PB}$ 呢？例如滿足 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 的 P 點會落在哪裡？會形成什麼圖形？

（如圖二，其中 $\overline{P_1A} = \overline{P_4A} = 6$、$\overline{P_1B} = \overline{P_4B} = 3$，所以 P_1 和 P_4 滿足 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$；其餘 P_2、P_3、P_5、P_6 類推）。像這樣，我們找出幾個符合的點，並且大膽猜測應該是落在一個「拋物線」上。可是我們的猜測是對的嗎？如果我們的猜測是對的，我們希望能驗證；如果我們的猜測是錯的，則我們希望能找到正確的答案。這就是我們的研究動機。



（圖二）

貳、研究目的：

一、探討:若 A、B 為平面上的兩定點，所有滿足 $\overline{PA} = m\overline{PB}$ (m>0 且 m≠1)的 P 點將形成何種圖形？

二、探討: $\overline{PA} = m\overline{PB}$ (m>0 且 m≠1)的 P 點形成的圖形與 $\overline{AB}$ 的中垂線的關係。

三、探討:如何以尺規作圖做出「若 A、B 為平面上的兩定點，所有滿足 $\overline{PA} = m\overline{PB}$ (m>0 且 m≠1)的 P 點所形成的圖形」。

四、其他相關問題：探討畢氏定理如何幫助解題。

參、研究設備及器材：

一、文具：筆、計算紙、圓規、直尺。
二、電腦、GSP 繪圖軟體。
三、喜歡探究問題的心。

肆、研究過程與方法：

一、探討：「若 A、B 為平面上的兩定點，所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$（m>0 且 m≠1）的 P 點形成何種圖形？」

由於我們學到的幾何知識還不夠，沒辦法用純粹的幾何概念來解決這個問題，因此我們將問題以「座標」的方式來探討。而且原先我們猜測答案為「拋物線」，也就是二次函數，因此我們將上圖二順時針旋轉$90°$，並且假設 A、B 兩點都在 y 軸上，如果計算結果真的是「拋物線」，那麼式子應該是某個開口向下的「二次函數」。因為我們只是應用「座標」這個工具來處理問題，在一般情況之下，還是不會影響圖形。

（一）先假設 m>1，實際計算幾個例子：以 A(0,120), B(0,0) 為例，

1. 探討滿足 $\overline{PA}=2\overline{PB}$ 的 P 點形成何種圖形？

2. 探討滿足 $\overline{PA}=3\overline{PB}$ 的 P 點形成何種圖形？

3. 探討滿足 $\overline{PA}=4\overline{PB}$ 的 P 點形成何種圖形？

4. 探討滿足 $\overline{PA}=5\overline{PB}$ 的 P 點形成何種圖形？

＜解＞1. 設 P 點座標為 (x,y)，（利用兩點距離公式）

$\because \overline{PA}=2\overline{PB}$

$\therefore \sqrt{x^2+(y-120)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$

兩邊平方：$x^2+(y-120)^2=4(x^2+y^2)$

$x^2+y^2-240y+14400=4x^2+4y^2$

化簡得：$3x^2+3y^2+240y-14400=0$

可以看的出來：x^2、y^2的係數相等

式子兩邊同除以 3：$x^2+y^2+80y-4800=0$

將式子配方得到：$x^2+(y+40)^2=6400=80^2$…「圓」方程式的形式

所以 P 點形成一個「圓」：圓心在（0，－40）；半徑為 80

2. 設 P 點座標為 (x, y)，(利用兩點距離公式)

$\because \overline{PA} = 3\overline{PB}$

$\therefore \sqrt{x^2+(y-120)^2} = 3\sqrt{x^2+y^2}$

兩邊平方：$x^2+(y-120)^2 = 9(x^2+y^2)$

$x^2+y^2-240y+14400 = 9x^2+9y^2$

化簡得：$8x^2+8y^2+240y-14400=0$

式子兩邊同除以 8：$x^2+y^2+30y-1800=0$

將式子配方得到：$x^2+(y+15)^2=2025=45^2$…「圓」方程式的形式

所以 P 點形成一個「圓」：圓心在（0，−15）；半徑為 45

3. 設 P 點座標為 (x, y)，(利用兩點距離公式)

$\because \overline{PA} = 4\overline{PB}$

$\therefore \sqrt{x^2+(y-120)^2} = 4\sqrt{x^2+y^2}$

兩邊平方：$x^2+(y-120)^2 = 16(x^2+y^2)$

$x^2+y^2-240y+14400 = 16x^2+16y^2$

化簡得：$15x^2+15y^2+240y-14400=0$

式子兩邊同除以 15：$x^2+y^2+16y-960=0$

將式子配方得到：$x^2+(y+8)^2=1024=32^2$…「圓」方程式的形式

所以 P 點形成一個「圓」：圓心在（0，−8）；半徑為 32

4. 設 P 點座標為 (x, y)，(利用兩點距離公式)

$\because \overline{PA} = 5\overline{PB}$

$\therefore \sqrt{x^2+(y-120)^2} = 5\sqrt{x^2+y^2}$

兩邊平方：$x^2+(y-120)^2 = 25(x^2+y^2)$

$x^2+y^2-240y+14400 = 25x^2+25y^2$

化簡得：$24x^2+24y^2+240y-14400=0$

式子兩邊同除以 24：$x^2+y^2+10y-600=0$

將式子配方得到：$x^2+(y+5)^2=625=25^2$……「圓」方程式的形式

所以 P 點形成一個「圓」：圓心在（0，−5）；半徑為 25

[說明]：對一般的情況下的 A、B 兩點，我們可以在平面上建立一個直角座標系統，以 B 為原點，A 點在正 y 軸上且座標為(0，k)

（二）若 $A(0,k), B(0,0)$，探討滿足 $\overline{PA} = m\overline{PB}$（m>1）的 P 點形成何種圖形？

不失一般性的情況下，可假設 k>0

＜解＞設 P 的座標為(x, y)，(利用兩點距離公式)

$\overline{PA}=\sqrt{x^2+(y-k)^2}$, $\overline{PB}=\sqrt{x^2+y^2}$

$\because \overline{PA}=m\overline{PB}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-k)^2}=m\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{m^2x^2+m^2y^2}$

$\Rightarrow x^2+(y-k)^2=m^2x^2+m^2y^2$

$\Rightarrow m^2x^2+m^2y^2-x^2-y^2+2ky-k^2=0$

$\Rightarrow (m^2-1)x^2+(m^2-1)y^2+2ky-k^2=0$

因為 m>1，可以看出x^2、y^2的係數相等且不等於 0

將式子同除以(m^2-1)：得到$x^2+y^2+\dfrac{2k}{m^2-1}y-\dfrac{k^2}{m^2-1}=0$

$$x^2+[y^2+\frac{2k}{m^2-1}y+(\frac{k}{m^2-1})^2]=\frac{k^2}{m^2-1}+(\frac{k}{m^2-1})^2$$

$$x^2+\left(y+\frac{k}{m^2-1}\right)^2=\frac{k^2(m^2-1)}{(m^2-1)^2}+\frac{k^2}{(m^2-1)^2}$$

$$x^2+\left(y+\frac{k}{m^2-1}\right)^2=\frac{k^2m^2}{(m^2-1)^2}$$

$$(x-0)^2+\left(y+\frac{k}{m^2-1}\right)^2=\left(\frac{km}{m^2-1}\right)^2$$

所以，所有滿足$\overline{PA}=m\overline{PB}$（m>1）的 P 點形成了一個圓：

這個圓以$(0,-\dfrac{k}{m^2-1})$為圓心，$\dfrac{km}{m^2-1}$為半徑。

[驗算]令$k=120$

1. $m=2$時

圓心$=(0,-\dfrac{120}{3})=(0,-40)$

$r=\dfrac{120\times 2}{3}=80$

2. $m=3$時

圓心$=(0,-\dfrac{120}{8})=(0,-15)$

$r=\dfrac{120\times 3}{8}=45$

3. $m=4$時

圓心$=(0,-\dfrac{120}{15})=(0,-8)$

$$r=\frac{120\times4}{15}=32$$

4. $m=5$ 時

圓心 $=(0,-\frac{120}{24})=(0,-5)$

$$r=\frac{120\times5}{24}=25$$

可以看出：**m 越大，圓的半徑越小。**

（三）當 0<m<1，如 $m=\frac{1}{2}$，則 $\overline{PA}=\frac{1}{2}\overline{PB}\Rightarrow 2\overline{PA}=\overline{PB}$ 或 $\overline{PB}=2\overline{PA}$，

討論方法同上，

結果：會在 $\overline{AB}$ 的中垂線靠近 A 點的那一側產生一系列的圓。

（四）[小結]：若 A、B 為平面上的兩相異點，m>0 且 $m\neq1$，

則所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$ 的動點 P 形成一個圓。

（五）心得與疑問：

1. **所以一開始**我們的猜測是錯的，因為我們只找了幾個點就大膽地猜了；如果我們再多找幾個點，一定不會覺得答案是「拋物線」了。因此，「小心驗證」很重要：若某件事是對的，一定要找到對的理由。
2. 當我們將式子算出來後，發現了兩個有趣的問題：

（因為 m>1 和 **0<m<1 討論方法類似**，以下只針對 m>1 做討論）

（1）從上面的計算，知道：當 m 越大時，則圓的半徑越小，那如果 m 很大很大，$m\to\infty$ 時，這個圓會怎樣？

<討論結果>：當 $m\to\infty$ 時，這個圓的半徑會越來越小，縮到剩下一個點，這點就是圓心。

而從圓心座標為 $(0,-\frac{k}{m^2-1})$，

當 $m\to\infty$ 時，$(0,-\frac{k}{m^2-1})\to(0,0)$ 就是 B 點

（2）當 m 越小時，圓的半徑越大，可是如果 m=1，就不是「圓」而是 $\overline{AB}$ 的中垂線了。（圓和直線，圖形差太多了！）那如果讓 m 非常非常靠近 1 呢？也就是 $m\to1$ 時，這時圓又會如何？

為了回答這個問題，我們進一步探討：

二、探討:滿足$\overline{PA}=m\overline{PB}$(m>1)的P點形成的圖形與$\overline{AB}$之中垂線的關係

（一）將m用已知數代入

如$m=1.1$、$m=1.01$、$m=1.001$、$m=1.0001$、…、，$m=1+10^{-n}$

A$(0,k)$, B$(0,0)$

m	圓心座標	半徑
1.1	$(0,-\frac{100}{21}k)$	$\frac{110}{21}k$
1.01	$(0,-\frac{10000}{201}k)$	$\frac{10100}{201}k$
1.001	$(0,-\frac{1000000}{2001}k)$	$\frac{1001000}{2001}k$
1.0001	$(0,-\frac{100000000}{20001}k)$	$\frac{100010000}{20001}k$
⋮	⋮	⋮
$1+10^{-n}$	$(0,-\frac{1}{2\cdot 10^{-n}+10^{-2n}}k)$	$\frac{10^{n}+1}{2+10^{-n}}k$

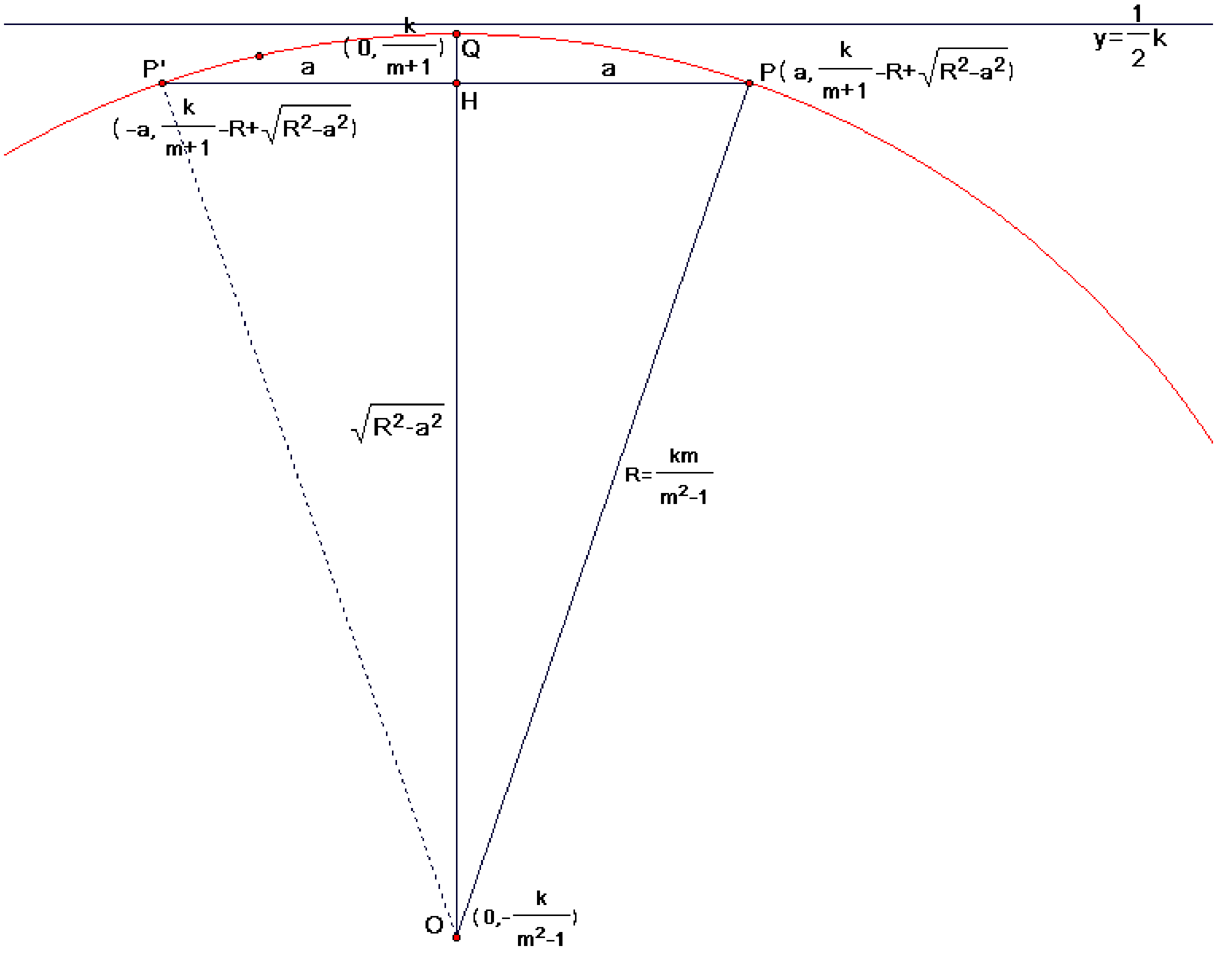
可以看出：當$n\to\infty$時，圓心座標$\to(0,-\infty)$，半徑$\to\infty$

也就是說：$m\to 1$時，圓心座標$\to(0,-\infty)$，半徑$\to\infty$

（二）以圖形和理論說明：

1. 從前面計算得知：若 A $(0,k)$, B $(0,0)$ ，m>1 時，滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$ 的 P 點形成的圖形為圓心座標在 $(0,-\dfrac{k}{m^2-1})$ 、半徑等於 $\dfrac{km}{m^2-1}$ 的圓。

（如下圖三，註：只畫出此圓的一部分）



（圖三）

2. $\overline{AB}$ 的中垂線方程式：水平線 $y=\dfrac{1}{2}k$

圓心在 $(0,-\dfrac{k}{m^2-1})$、半徑為 $\dfrac{km}{m^2-1}$ 的圓，與 y 軸交於 $(0,-\dfrac{k}{m^2-1}\pm\dfrac{km}{m^2-1})$ 兩點

化簡得到 $(0,\dfrac{k(m-1)}{m^2-1})$ 或 $(0,-\dfrac{k(m+1)}{m^2-1})$

$=(0,\dfrac{k}{m+1})$ 或 $(0,-\dfrac{k}{m-1})$

其中最靠近 $\overline{AB}$ 的中垂線 $y=\dfrac{1}{2}k$ 的點為 $(0,\dfrac{k}{m+1})$ ，設為點 Q

點 Q$(0,\dfrac{k}{m+1})$ 與 $y=\dfrac{1}{2}k$ 的距離：

$\left|\dfrac{k}{2}-\dfrac{k}{m+1}\right|=k(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{m+1})=k\cdot\dfrac{m-1}{2(m+1)}$ （$\because m>1,\therefore \dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{m+1}$）

當 $m\to 1$時，這個距離會$\to 0$（也就是點 Q 與 $y=\dfrac{1}{2}k$ 的距離$\to 0$）

而這個圓的半徑為$\dfrac{km}{m^2-1}$，當 $m\to 1$ 時，$\dfrac{km}{m^2-1}\to\infty$

一個半徑無限大的圓，而且最靠近$\overline{AB}$的中垂線的點 Q 會極靠近$\overline{AB}$的中垂線，這個圓和$\overline{AB}$的中垂線到底是什麼關係呢？

3. 令圓的半徑為 R，設 a 為一個正的「常數」

若圓上有一點 P 其 x 座標為 a，過 P 點對 y 軸做垂直線，設垂足為 H

由畢氏定理得到$\overline{OH}=\sqrt{R^2-a^2}$ ，

所以從 Q 點到 P 點，x 座標的變化量為 a 單位，y 座標的變化量為$\sqrt{R^2-a^2}-R$

（x 座標的變化量為 a＞0，y 座標的變化量為$\sqrt{R^2-a^2}-R$＜0）

$\overline{PQ}$的斜率為$\dfrac{\sqrt{R^2-a^2}-R}{a}=\dfrac{-a^2}{a(\sqrt{R^2-a^2}+R)}=\dfrac{-a}{\sqrt{R^2-a^2}+R}$

前面已知，當 $m\to 1$時，圓的半徑 R 會變成「無限大」，

所以不論 a 為多大的「常數」，當 $m\to 1$時，上式的分母$\sqrt{R^2-a^2}+R\to\infty$

所以$\overline{PQ}$的斜率為$\dfrac{-a}{\sqrt{R^2-a^2}+R}\to 0$

所以$\overline{PQ}\to$水平線

4. 圖三中，$\overline{P'Q}$的斜率為$\dfrac{R-\sqrt{R^2-a^2}}{a}=\dfrac{a^2}{a(R+\sqrt{R^2-a^2})}=\dfrac{a}{R+\sqrt{R^2-a^2}}$

當 $m\to 1$時，$\overline{P'Q}$的斜率為$\dfrac{a}{R+\sqrt{R^2-a^2}}\to 0$

所以$\overline{P'Q}\to$水平線

5. **我們覺得可以這樣解釋：**

（1）半徑無限大的圓的邊趨近於一直線。
（2）直線可以看成是一個圓心在無限遠，且半徑無限大的圓。

三、探討:如何以尺規作圖做出「若 A、B 為平面上的兩定點，所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$（ m>0 且 m≠1)的 P 點所形成的圓」？

（一）$\overline{AB}$ 的「內分點」、「外分點」與「所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$ (m>0 且 m≠1)的 P 點形成的圓」的關係：

因為我們已經確定「所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$ (m>0 且 m≠1)的 P 點」會形成「圓」，而且由於「對稱」的關係，$\overleftrightarrow{AB}$ 正好會是此圓的一條對稱軸，此圓在軸上通過兩個點，都滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$，在 $\overline{AB}$ 上的點稱為「內分點」; 在 $\overline{AB}$ 的延長線上的點稱為「外分點」。

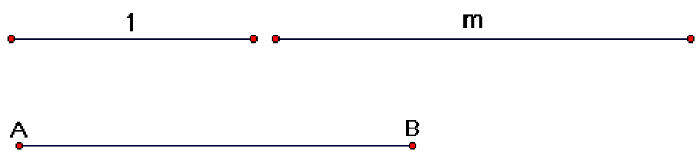
所以我們只要用尺規作圖找出「內分點」、「外分點」，再以這兩點的連線段為直徑，就可以畫出圖形了。

（二）探討:以尺規作圖做出

「若 A、B 為平面上的兩定點，所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$ (m>1)的 P 點所形成的圓」。

已知：A、B 為平面上的兩定點及兩線段長分別為 m 和 1(m>1)

求作：所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$ 的 P 點所形成的圓



作法：1. 過 A 作直線 L

2. 在 L 上取 C、D，使 $\overline{AC}=m$，$\overline{CD}=1$（ $\overline{AC}:\overline{CD}=m:1$）

3. 連 $\overline{BD}$

4. 過 C 作 $\overline{CX}\,//\,\overline{BD}$，且交 $\overline{AB}$ 於 X（X 為內分點）

5. 在 $\overline{AC}$ 上另取 E 點，使 $\overline{CE}=1$（ $\overline{AE}=m-1$ ）

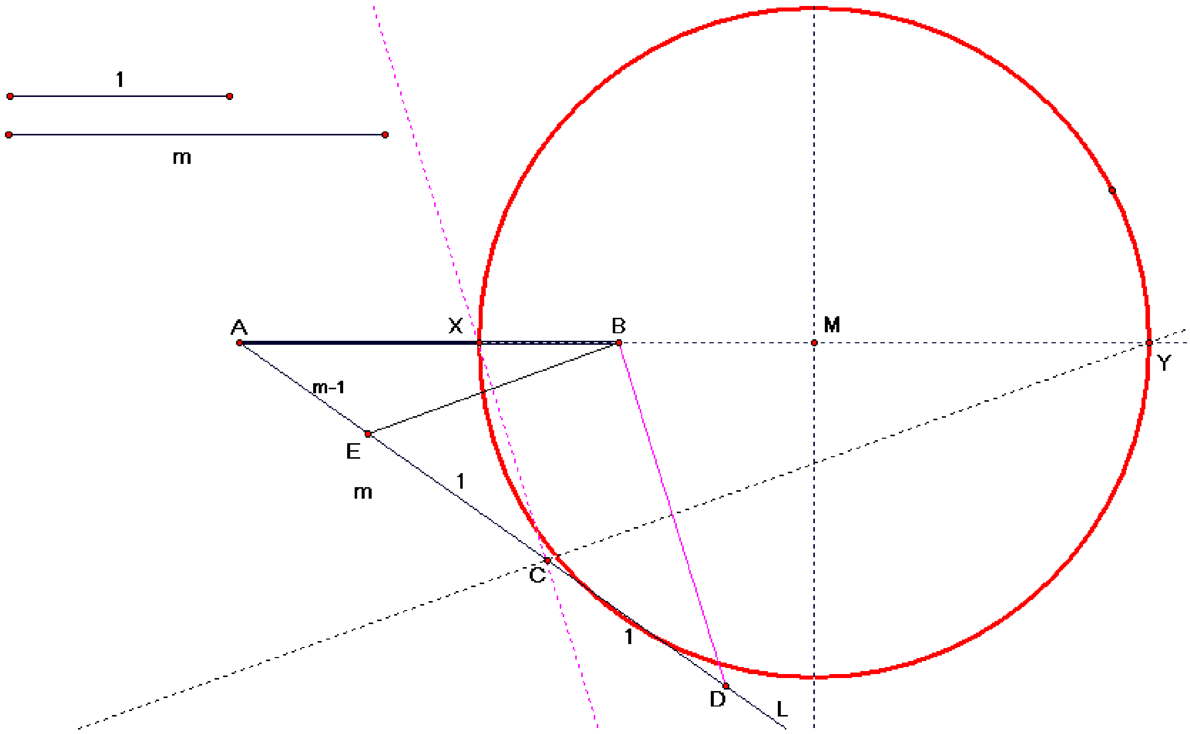
6. 連 $\overline{BE}$

7. 過 C 作 $\overline{CY} // \overline{BE}$ ，且交 $\overline{AB}$ 的延長線於 Y（Y 為外分點）

8. 作 $\overline{XY}$ 的中垂線，得 $\overline{XY}$ 的中點 M

9. 以 M 為圓心，$\overline{MX}$ 為半徑作一圓，此圓即為所求。

（註：圖形以 GSP 呈現，與尺規作圖的作法有些許不同）

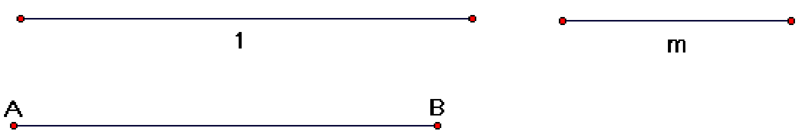


（三）探討:以尺規作圖做出

「若 A、B 為平面上的兩定點，所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$（0<m<1）的 P 點所形成的圓」。

已知：A、B 為平面上的兩定點及兩線段長分別為 m 和 1（0<m<1）

求作：所有滿足 $\overline{PA}=m\overline{PB}$ 的 P 點所形成的圓



作法： 1. 過 B 作直線 L

2. 在 L 上取 C、D，使 $\overline{BC}=1$ ，$\overline{CD}=m$ （ $\overline{BC}:\overline{CD}=1:m$ ）

3. 連 $\overline{AD}$

4. 過 C 作 $\overline{CX} // \overline{AD}$，且交 $\overline{AB}$ 於 X（X 為內分點）

5. 在 $\overline{BC}$ 上另取 E 點，使 $\overline{CE} = m$ （$\overline{BE} = 1 - m$）

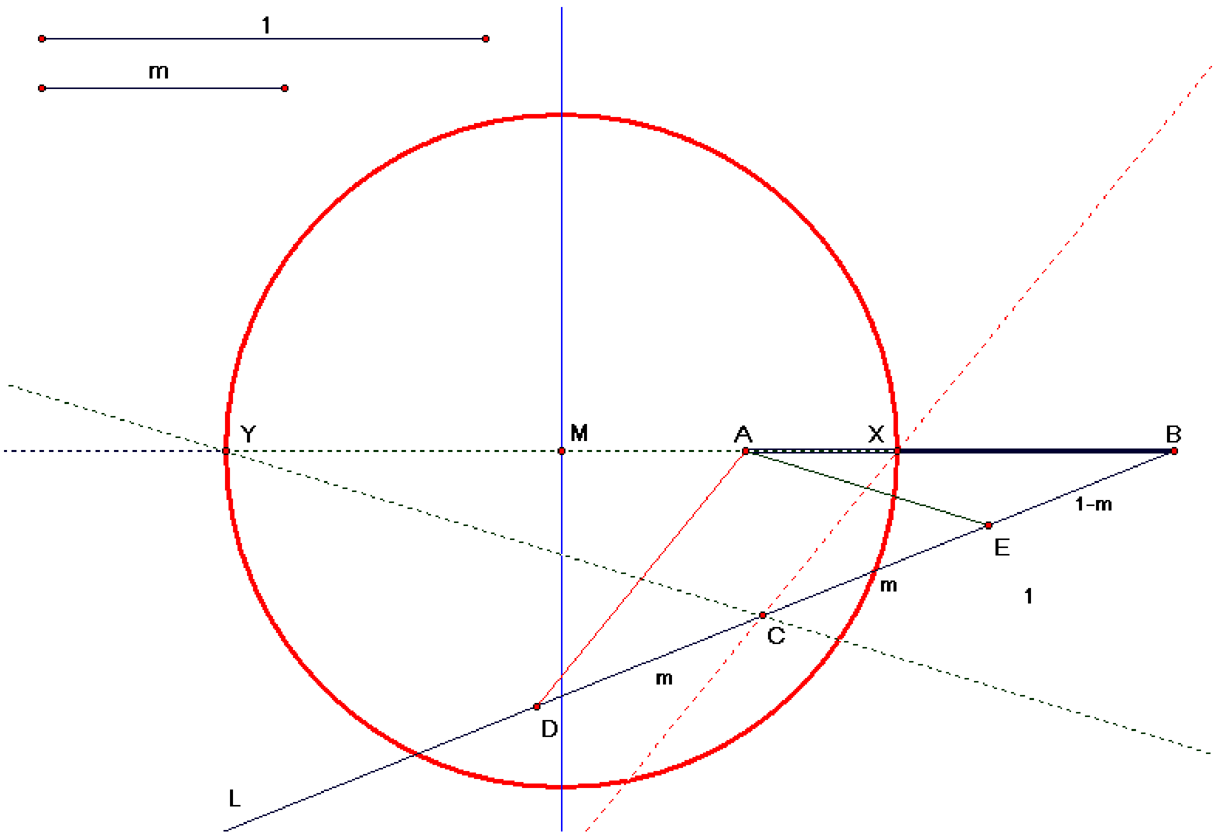
6. 連 $\overline{AE}$

7. 過 C 作 $\overline{CY} // \overline{AE}$，且交 $\overline{AB}$ 的延長線於 Y（Y 為外分點）

8. 作 $\overline{XY}$ 的中垂線，得 $\overline{XY}$ 的中點 M

9. 以 M 為圓心，$\overline{MX}$ 為半徑作一圓，此圓即為所求。

（註：圖形以 GSP 呈現，與尺規作圖的作法有些許不同）



四、探討:畢氏定理如何幫助解題

在前面探討問題的時候，除了直接利用畢氏定理外，其實座標平面上兩點的距離公式也是用畢氏定理推出來了。如果一個圖形的某個部份出現直角Δ，大致上都可以用畢氏定理來思考看看。下面三個問題或公式，都可以不需要什麼高深的理論，只要單純用畢氏定理就可以了。

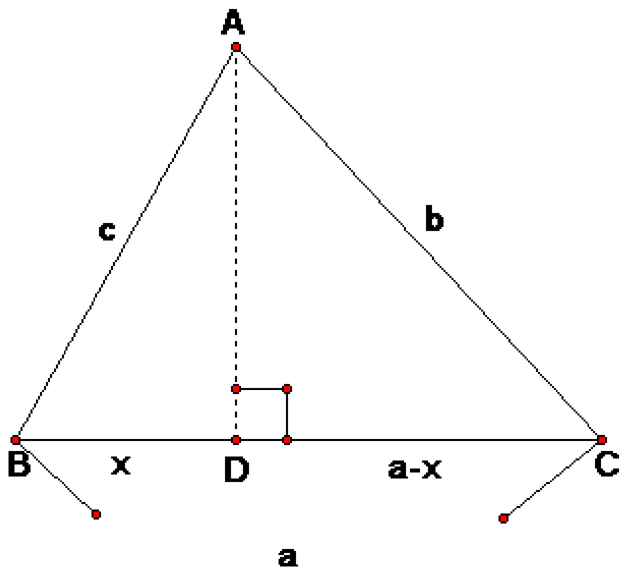
（一）一般Δ要求面積時，需要作高，而高與底邊「垂直」，所以可以用畢氏定理來思考看看。

（二）座標平面上某點與某直線的距離：因為點到直線的距離是以點向直線做「垂直線段」，所以有直角的特徵。

（三）座標平面兩直線垂直的條件：當然有垂直的特徵。

（一）三角形的高與面積：若三角形的三邊長為 a、b、c，

1. 銳角三角形：



設 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D，利用畢氏定理可得：$c^2-x^2=\overline{AD}^2=b^2-(a-x)^2$

$$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$$

$$c^2-x^2=b^2-a^2+2ax-x^2$$

$$c^2+a^2-b^2=2ax$$

則 $x=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$

ΔABC 中，$\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}=\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{c^2-\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2}$

$$=\sqrt{c^2-\frac{\left(c^2+a^2-b^2\right)^2}{4a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{4a^2c^2-\left(c^2+a^2-b^2\right)^2}{4a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2ac)^2-\left(c^2+a^2-b^2\right)^2}{4a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(2ac+c^2+a^2-b^2\right)\left(2ac-c^2-a^2+b^2\right)}{4a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}{4a^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}}{2a}$$

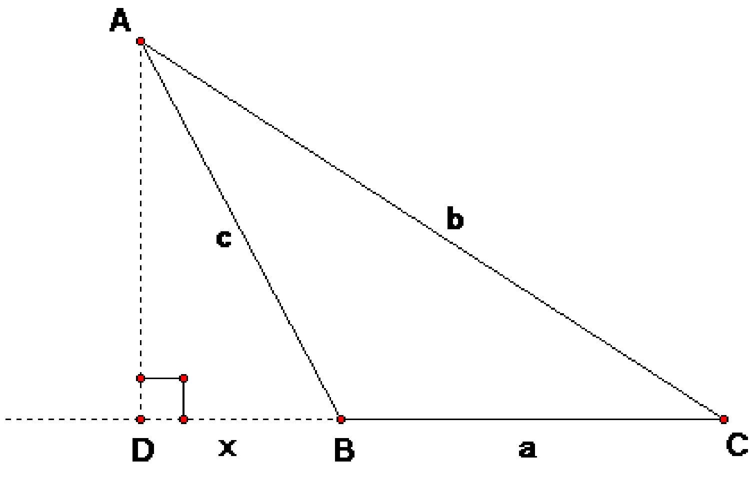
所以 ΔABC 的面積為

$$a\times\frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}}{2a}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

2、鈍角三角形：(其中 $b^2>a^2+c^2$)



設 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BC}$ 邊的延長線於 D

利用畢氏定理可得： $c^2-x^2=\overline{AD}^2=b^2-(a+x)^2$

$$c^2 - x^2 = b^2 - (x+a)^2$$
$$c^2 - x^2 = b^2 - x^2 - 2ax - a^2$$
$$2ax = b^2 - a^2 - c^2$$
$$x = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a}$$

ΔABC 中，$\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD} = \sqrt{c^2 - x^2}$

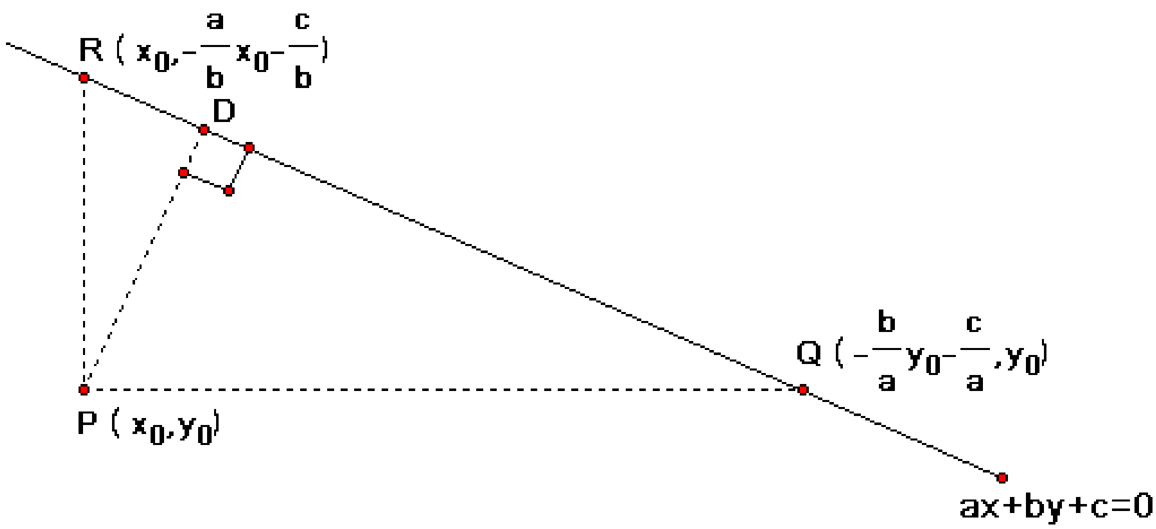
$$= \sqrt{c^2 - (\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a})^2}$$
$$= \sqrt{c^2 - \frac{(b^2 - a^2 - c^2)^2}{4a^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (b^2 - a^2 - c^2)^2}{4a^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2ac)^2 - (b^2 - a^2 - c^2)^2}{4a^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2ac + b^2 - a^2 - c^2) \cdot (2ac - b^2 + a^2 + c^2)}{4a^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(b+a-c) \cdot (b-a+c) \cdot (a+c+b) \cdot (a+c-b)}{4a^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(b+a-c) \cdot (b-a+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+c-b)}}{2a}$$

所以 ΔABC 的面積為

$$a \cdot \frac{\sqrt{(b+a-c) \cdot (b-a+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+c-b)}}{2a} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{(b+a-c) \cdot (b-a+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+c-b)}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

（二）若 L: $ax+by+c=0$（a、b 不同時為 0）為座標平面上之一直線，

點 P(x_0, y_0) 為同一平面但不在 L 上之一點，則點 P 到直線 L 的距離為何?



1. 先假設 ab≠0，所以直線為斜直線，

令 $y=y_0$ 代入直線 L：得 $ax=-by_0-c$

所以 $x=-\frac{b}{a}y_0-\frac{c}{a}$

圖中 Q 點座標為 $(-\frac{b}{a}y_0-\frac{c}{a}, y_0)$

再以 $x=x_0$ 代入直線 L：得 $by=-ax_0-c$

所以 $y=-\frac{a}{b}x_0-\frac{c}{b}$

圖中 R 點座標為 $(x_0, -\frac{a}{b}x_0-\frac{c}{b})$

欲求 $\overline{PD}=$?

利用直角三角形斜邊上的高的求法：$\overline{PD}=\frac{\overline{PQ}\times\overline{PR}}{\overline{RQ}}$

$\overline{PQ}=\left|x_0-(-\frac{b}{a}y_0-\frac{c}{a})\right|=\left|x_0+\frac{b}{a}y_0+\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{a}\right|=\left|\frac{k}{a}\right|$

（令 $k=ax_0+by_0+c$ 的值）

$\overline{PR}=\left|y_0-(-\frac{a}{b}x_0-\frac{c}{b})\right|=\left|y_0+\frac{a}{b}x_0+\frac{c}{b}\right|=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right|=\left|\frac{k}{b}\right|$

利用畢氏定理得 $\overline{RQ}=\sqrt{\left|\frac{k}{a}\right|^2+\left|\frac{k}{b}\right|^2}$

$$=\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\times|k|$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}\times|k|=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}\times|k|=\left|\frac{k}{ab}\right|\times\sqrt{a^2+b^2}$$

所求 $\overline{PD}=\dfrac{\left|\frac{k}{a}\right|\times\left|\frac{k}{b}\right|}{\left|\frac{k}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}}$，化簡得 $\dfrac{|k|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. 當 L: $ax+by+c=0$ 中 a＝0 時，則直線 L 為水平線，方程式為 $y=-\dfrac{c}{b}$

P(x_0,y_0) 到 L： $y=-\dfrac{c}{b}$ 的距離為 $\left|y_0-(-\dfrac{c}{b})\right|=\left|y_0+\dfrac{c}{b}\right|=\left|\dfrac{by_0+c}{b}\right|$

若直接代入上面公式 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，令 a＝0

則變成 $\dfrac{|by_0+c|}{\sqrt{b^2}}=\dfrac{|by_0+c|}{|b|}=\left|\dfrac{by_0+c}{b}\right|$

所以上面公式也適用於直線為「水平線」時。

3. 當 L: $ax+by+c=0$ 中 b＝0 時，則直線 L 為鉛垂線，方程式為 $x=-\dfrac{c}{a}$

P(x_0,y_0) 到 L： $x=-\dfrac{c}{a}$ 的距離為 $\left|x_0-(-\dfrac{c}{a})\right|=\left|x_0+\dfrac{c}{a}\right|=\left|\dfrac{ax_0+c}{a}\right|$

若直接代入上面公式 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，令 b＝0

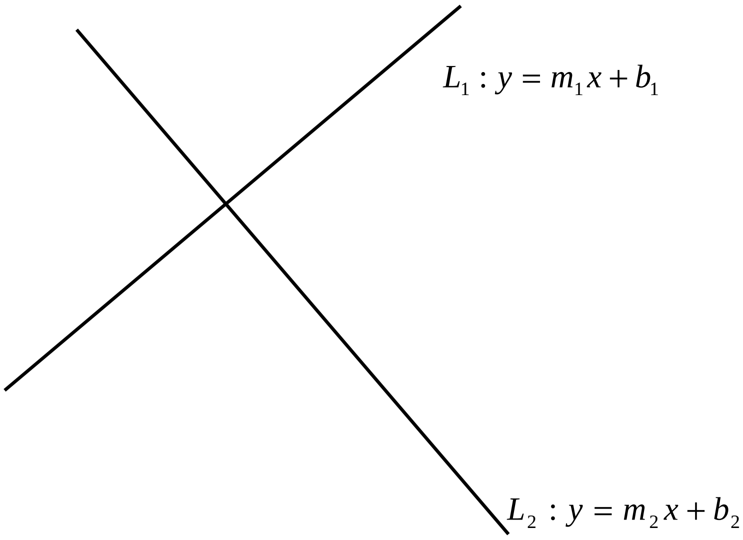
則變成 $\dfrac{|ax_0+c|}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{|ax_0+c|}{|a|}=\left|\dfrac{ax_0+c}{a}\right|$

所以上面公式也適用於直線為「鉛垂線」時。

[小結]：**若 L: $ax+by+c=0$（a、b 不同時為 0）為座標平面上之一直線，**
點 P(x_0,y_0) 為同一平面但不在 L 上之一點，則點 P 到直線 L 的距離為

$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

（三）若 $L_1: y=m_1x+b_1$、$L_2: y=m_2x+b_2$，當此兩直線互相「垂直」時，其條件為何?



［原先的想法］：

第一步：先解交點 $\begin{cases} y=m_1x+b_1 \\ y=m_2x+b_2 \end{cases}$

$$m_1x+b_1=m_2x+b_2$$
$$(m_1-m_2)x=b_2-b_1$$

所以 $x=\dfrac{b_2-b_1}{m_1-m_2}$ ，代入求 y

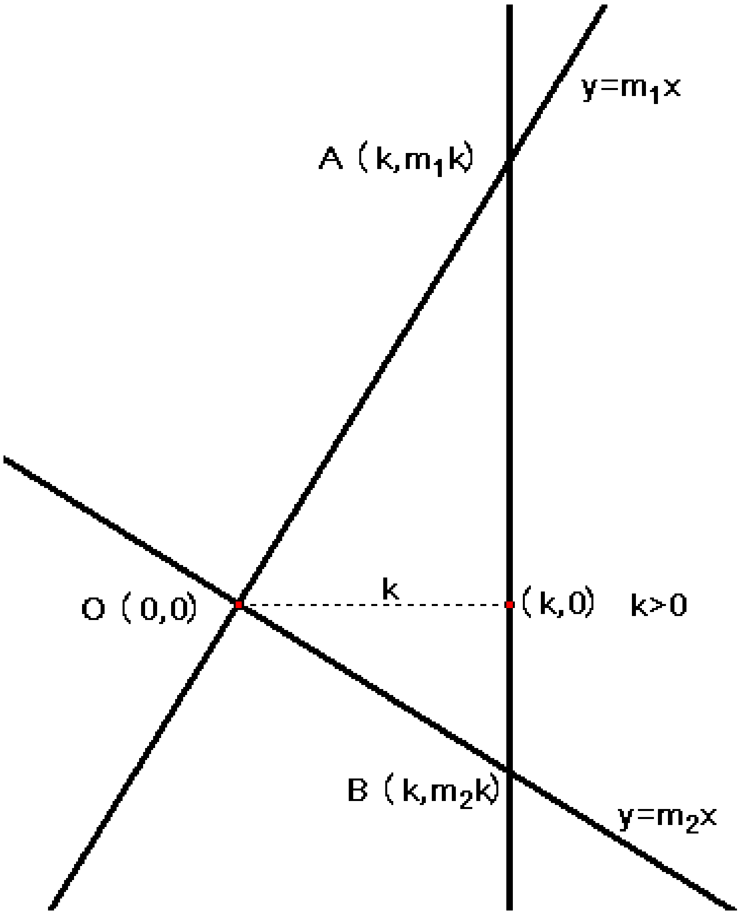
$$y=m_1\times\frac{b_2-b_1}{m_1-m_2}+b_1=\frac{m_1\times(b_2-b_1)+b_1\times(m_1-m_2)}{m_1-m_2}$$
$$=\frac{m_1b_2-m_1b_1+b_1m_1-b_1m_2}{m_1-m_2}=\frac{m_1b_2-b_1m_2}{m_1-m_2}$$

所以交點座標為（ $\dfrac{b_2-b_1}{m_1-m_2}$ ， $\dfrac{m_1b_2-b_1m_2}{m_1-m_2}$ ）

式子太複雜了，必須改變策略

［後來的想法］

在 $y=m_1x+b_1$ ， $y=m_2x+b_2$ 的交點處建立新的坐標系，以 L_1及L_2 的交點為新原點，兩軸的方向與單位長不變，則兩直線上在新坐標系統中的方程式分別為 $y=m_1x$，$y=m_2x$ ，如圖



過（k，0）作一鉛垂線，其方程式為 x＝k，而鉛垂線 x＝k 與 L_1及L_2 的交點 A、B 座標分別為 (k,m_1k) 、(k,m_2k)，由兩點距離公式

可知 $\overline{OA}=\sqrt{k^2+(m_1k)^2}$

$\overline{OB}=\sqrt{k^2+(m_2k)^2}$

$\overline{AB}=|m_1k-m_2k|=k|m_1-m_2|$

$\because \angle AOB=90^\circ$

$\therefore \overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$

$\sqrt{(k^2+m_1{}^2k^2)}^2+\sqrt{(k^2+m_2{}^2k^2)}^2=(k|m_1-m_2|)^2$

$k^2+m_1{}^2k^2+k^2+m_2{}^2k^2=k^2(m_1-m_2)^2$

各項同除以 k^2：

$$1+m_1^{\ 2}+1+m_2^{\ 2}=m_1^{\ 2}-2m_1m_2+m_2^{\ 2}$$
$$2=-2m_1m_2$$
$$\Rightarrow m_1\cdot m_2=-1$$

［另解］：應用「直角三角形母子相似定理」

由圖中，$\angle AOB=90°$，x 軸與鉛垂線 x＝k 互相垂直

所以得：$k^2=|m_1k|\cdot|m_2k|=k^2|m_1\cdot m_2|$

兩邊同除以k^2得：$1=|m_1\cdot m_2|$

$\because L_1\perp L_2$，$\therefore m_1$、m_2必為一正、一負

所以可推得$m_1\cdot m_2=-1$

伍、研究結果：

一、若 A、B 為平面上的兩相異點，m>0 且$m\neq 1$，

則所有滿足$\overline{PA}=m\overline{PB}$的動點 P 形成一個圓。

二、若 A、B 為平面上的兩相異點，m>0 且$m\neq 1$，

則所有滿足$\overline{PA}=m\overline{PB}$的動點 P 形成一個圓，

且當$m\to 1$時，圓的半徑會變成「無限大」，圓的邊趨近於一直線。

三、可以用尺規作圖做出「若 A、B 為平面上的兩定點，所有滿足$\overline{PA}=m\overline{PB}$

(m>0 且 m≠1)的 P 點所形成的圖形」。

四、若三角形的三邊長為 a、b、c，

則ΔABC面積$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

五、若 L: $ax+by+c=0$（a、b 不同時為 0）為座標平面上之一直線，
點 P(x_0,y_0)為同一平面但不在 L 上之一點，則點 P 到直線 L 的距離為

$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

六、若$L_1:y=m_1x+b_1$、$L_2:y=m_2x+b_2$，當此兩直線互相「垂直」時，
其條件為$m_1\cdot m_2=-1$

陸、問題討論：

＜問題＞如圖，若 A、B、C 為平面上的三點，試問：在同一平面上，是否存在 P 點，

滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=3:4:5$ ？有幾個點？形成什麼圖形？可不可以畫出來？

＜分析＞可以將 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=3:4:5$ 分成兩部分來討論

（一） $\overline{PA}:\overline{PB}=3:4$，則滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:4$ 的點 P 形成一個圓

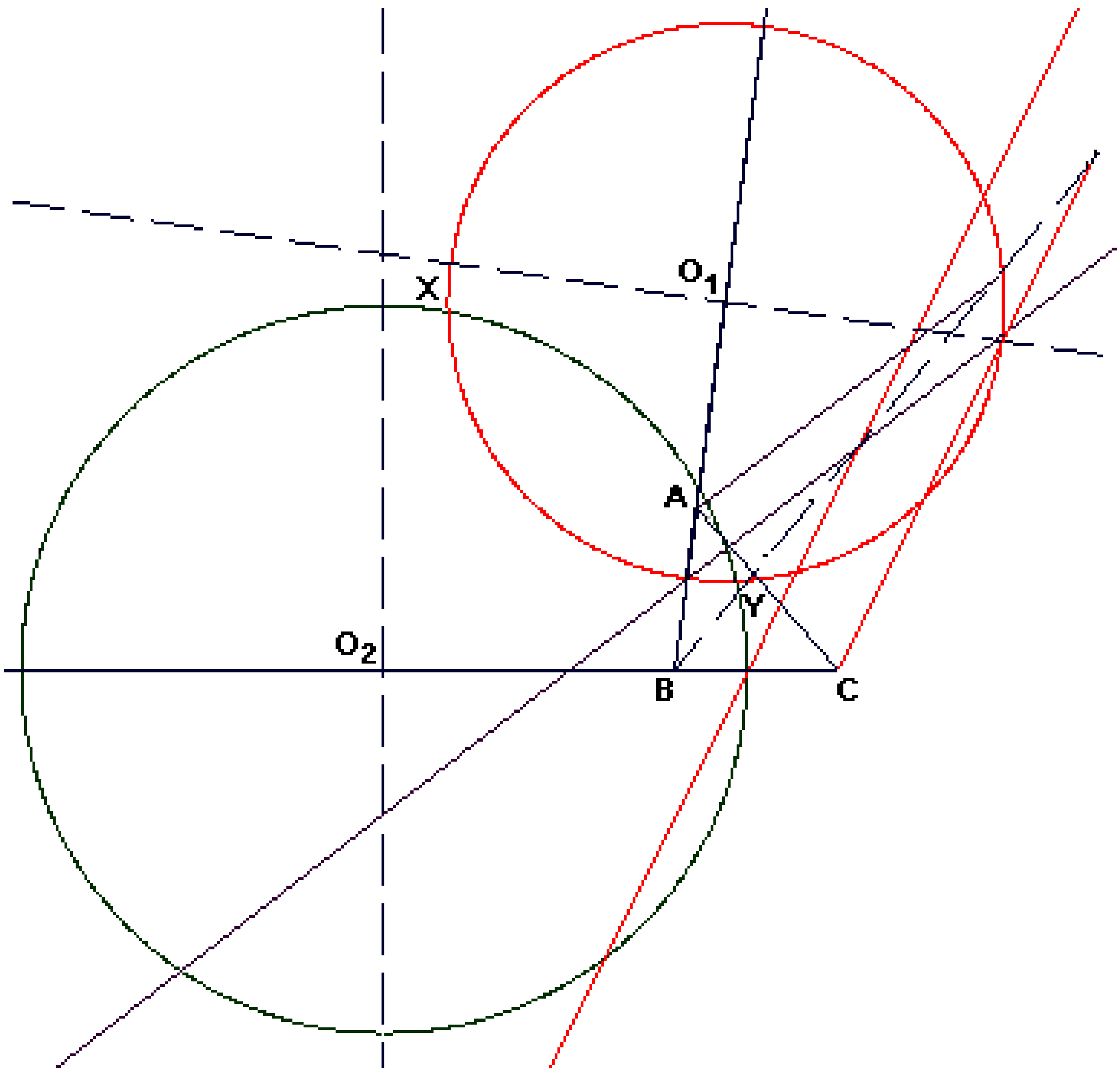
利用前面的研究，可以用尺規作圖將此圓畫出來。

（二）同理，也可以將滿足 $\overline{PB}:\overline{PC}=4:5$ 的點 P 形成的圓畫出來。

（三）再看（一）、（二）所畫出來的兩個圓有幾個交點就可以了。

註 1：圖形以 GSP 呈現，與尺規作圖的作法有些許不同。

註 2：圖中兩圓的交點的 X、Y 兩點即為滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=3:4:5$ 的解。



柒、參考資料及其他：

一、數學教學方法/Max A. Sobel、Evan M. Maletsky 著/張靜嚳,念家興譯/九章

二、國中數學課本第二、三、四、五冊：徐立民等合著，康軒文教事業出版。

三、高中基礎數學單元系列－直線方程式：陸思明著。建宏出版社出版。

四、高中基礎數學單元系列－平面向量：陸思明著。建宏出版社出版。

五、高中基礎數學單元系列－三角函數：陸思明著。建宏出版社出版。