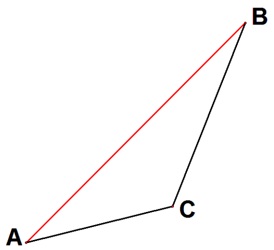
作品名稱：short　短路！

摘要：

本作品探討的是有關最短或最少的問題，如『路徑最短』、『時間最短』或『運費最少』。從如何在一條河的適當位置搭橋，**這種問題經常需要找到『替代點』**，探討出原則之後，這個原則可以適用到多河的狀況，甚至於河與河不平行的情形；另一種問題是：當同時可以在兩個區域運動，但速率不同時，如何選擇適當的點作分界，以使『總時間』或『總運費』最少，而這種問題經常需要找到**『替代線』**，利用點到直線的距離求解；最後研究『矩形內反射路徑的最短周長』和『三角形內反射路徑的最短周長』，發現**矩形內反射路徑恆存在且最短周長恆為定值，剛好等於對角線長**；而**三角形內反射路徑不一定存在，若存在時，最短周長等於『三角形三高垂足所成三角形的周長』**。

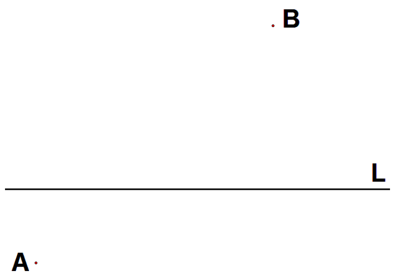
預備知識：

一、若 A、B、C 為不共線之相異三點，則 $\overline{AC}+\overline{CB}>\overline{AB}$。



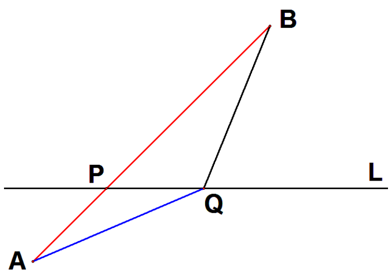
【證明】因為兩點間以線段距離為最短，視為我們的基本定理。

二、如圖，A、B 兩點在直線 L 的兩側，試在直線 L 上找一點 P，使 $\overline{AP}+\overline{PB}$ 為最短。



【作法】：連 $\overline{AB}$，設 $\overline{AB}$ 與直線 L 交點為 P

則 P 點即為所求。

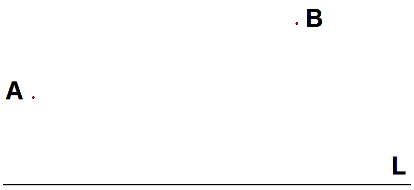


【證明】：在直線 L 上任取另一點 Q（$Q \neq P$）

連 $\overline{AQ}$ 、$\overline{BQ}$，根據預備知識一，可得

$\overline{AQ}+\overline{BQ}>\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}$　　得證

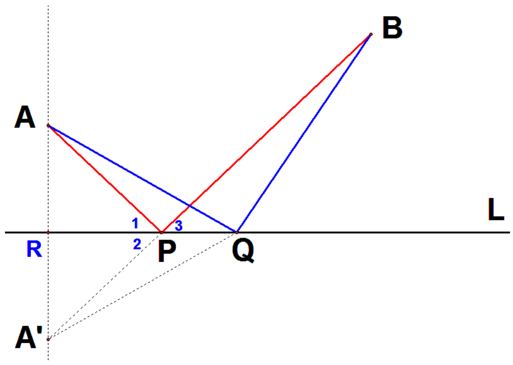
三、如圖，A、B 兩點在直線 L 的同側，試在直線 L 上找一點 P，使 $\overline{AP}+\overline{PB}$ 為最短。



【作法】：以 A 對直線 L 作對稱點 A'，

連 $\overline{A'B}$ 與直線 L 交於 P

則 P 點即為所求。



【證明】：1° 在直線 L 上任取另一點 Q（$Q \neq P$）

連 $\overline{AP}$ 、$\overline{AQ}$ 、$\overline{QB}$ 、$\overline{A'Q}$，

2° 因為直線 L 為 $\overline{AA'}$ 的對稱軸

所以 $\overline{A'P}=\overline{AP}$ 、$\overline{A'Q}=\overline{AQ}$

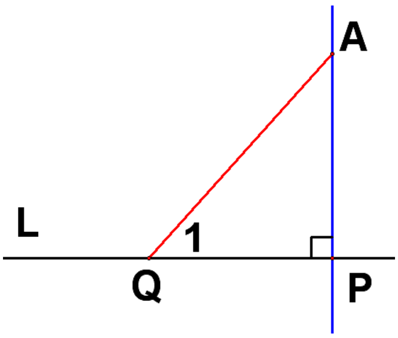
3° 在 $\Delta A'QB$ 中，$\overline{A'Q}+\overline{QB}>\overline{A'B}=\overline{A'P}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB}$

4° 推得 $\overline{AQ}+\overline{QB}>\overline{AP}+\overline{PB}$　　　得證。

【註】：此時 $\angle 1=\angle 2$ 且 $\angle 2=\angle 3$，所以 $\angle 1=\angle 3$　　　符合光的『反射定律』。

四、如圖，A 為不在直線 L 的一個定點，試在直線 L 上找一點 P，使 $\overline{AP}$ 為最短。

【作法】：過 A 作 $\overline{AP} \perp L$ 於 P 點，則 P 點即為所求。



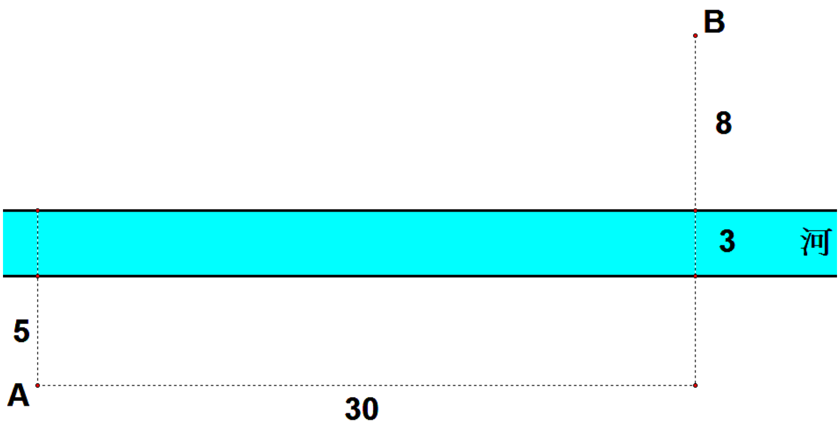
【證明】：在直線 L 上任取另一點 Q（$Q \neq P$），連 $\overline{AQ}$，

在 ΔAPQ 中，$\because \overline{AP} \perp L$，$\therefore \angle APQ = 90° > \angle 1$，

根據『大角對大邊、小角對小邊』　可得 $\overline{AQ} > \overline{AP}$　得證

壹、研究動機：

在做數學課外補充題時，遇到了這樣的題目：「如下圖，老王家 A 點離河南岸 5 公尺，他每天都要到對岸的筍園採筍子（B 為筍園入口），而 B 點離河北岸 8 公尺，河寬 3 公尺，A、B 間東西距離 30 公尺。因為在他家附近的河上沒有橋，所以他每天都要繞路過河，於是他搭了一座與河岸垂直的便橋，試求其路徑的最短距離?」



想了半天，不知如何下手，看了一下解答，解法如下：「8－3＝5，5＋3＋5＝13，最短路徑為$\sqrt{30^2+13^2}+3=\sqrt{1069}+3$公尺」，「Why？」心理一個大問號，解法有看沒有懂，就去問老師，老師鼓勵我們自己研究看看，經過我們幾個有興趣的同學一起討論後，發現越研究越有趣，而且好像有什麼『眉角』，還可以繼續延伸推廣。於是我們幾個『奮發向上』的同學便在老師的指導下，進行這類問題（最短路徑、最短時間或最少運費）的研究以知道其數學原理。

貳、研究目的：

一、探討河為一條時，橋應該搭在何處才可以使總路徑為最短？
二、探討河為二條時，橋應該各搭在何處才可以使總路徑為最短？
三、探討河為三條以上時，為使總路徑為最短，搭橋的原則為何？
四、探討河與何不平行時，為使總路徑為最短，搭橋的原則為何？
五、探討可以在河上和陸地上行駛但兩者速度不同時，應採取何種路徑才可以使所花的時間最短？或花費的運費最少？
六、探討矩形內反射路徑的最短周長。
七、探討三角形內反射路徑的最短周長。

叁、研究設備與器材：

計算紙、計算機、文具、電腦、GSP 軟體。

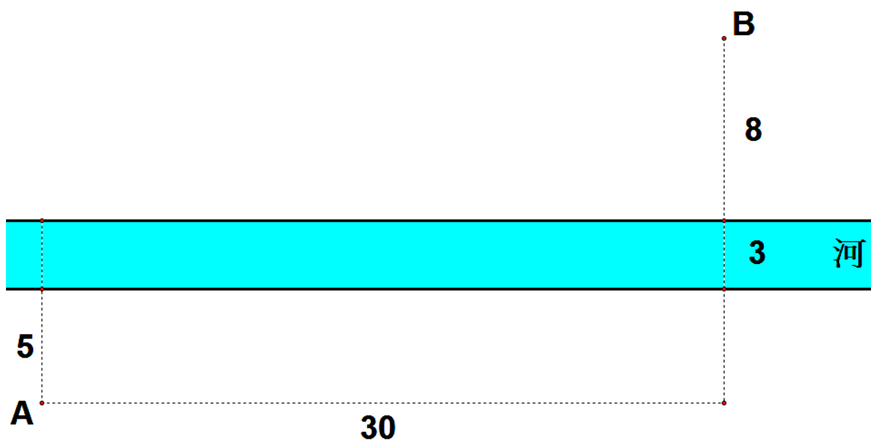
肆、研究方法與過程：

為方便描述及探討問題，我們以 N 代表河的北岸、S 代表河的南岸；若有兩條河以上時，則以 N_1 代表第一條河的北岸，S_1 代表第一條河的南岸；N_2 代表第二條河的北岸，S_2 代表第二條河的南岸，……其餘類推。

一、探討河為一條時，橋應該搭在何處才可以使總路徑為最短？

（一）實例探討：

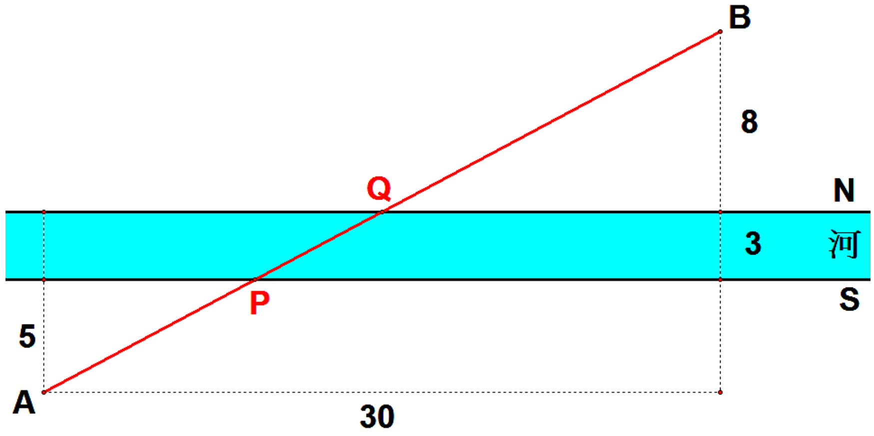
1. 先看原問題：「（如下圖）A 離河南岸 5 公尺，B 離河北岸 8 公尺，河寬 3 公尺，A、B 東西距離 30 公尺，搭了一座與河岸垂直的便橋，試求其最短距離的路徑?並找出便橋應搭於何處?」



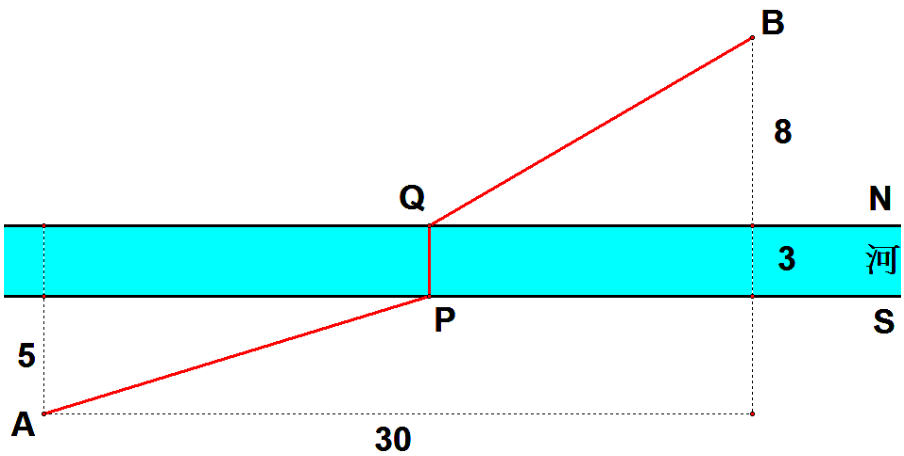
【問題分析與我們的討論過程】：

（1）如果將 A、B 連起來，直接走直線，可以嗎?

當然不可以，因為橋是斜的，不垂直於河岸，違背題意。



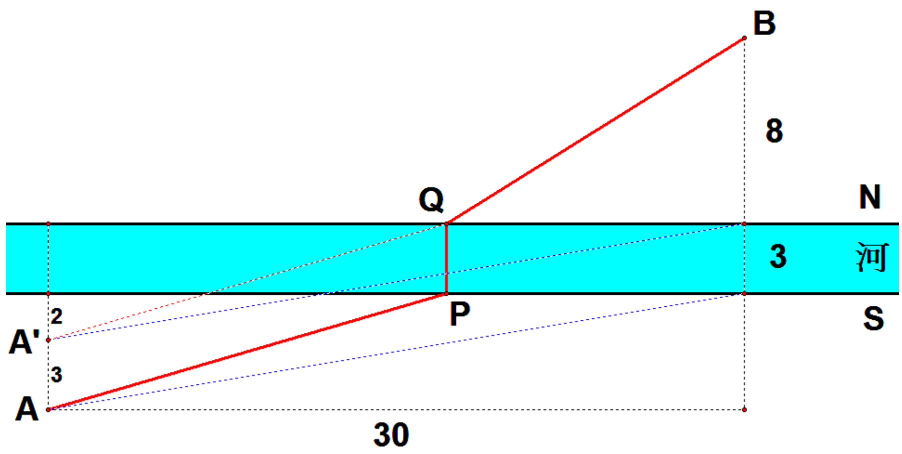
（2）如下圖，我們先任取一個垂直於河岸的線段 PQ 當做橋，則過河的路徑總和為 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$，其中 $\overline{PQ}$ ＝河寬，是一個固定的值，所以如果要讓路徑總和 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 為最短，那就等於讓 $\overline{AP}+\overline{QB}$ 為最短，可是 $\overline{AP}$ 、$\overline{QB}$ 是兩段分開的線段，不容易判斷 $\overline{AP}+\overline{QB}$ 的長短。



（3）因此，**為了比較容易判斷 $\overline{AP}+\overline{QB}$ 的長短，我們必須將它們『接』起來**，於是，我們思考將它們『接』起來但又不破壞它們之和的方法，討論之後，方法有兩個：

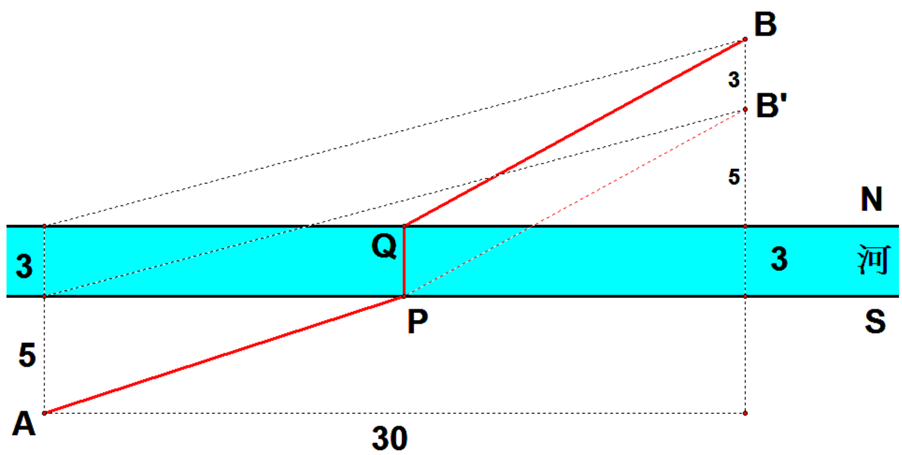
（甲）將 A 點垂直往上 3 公尺到 A'，則 $\overline{AP}=\overline{A'Q}$

如此 $\overline{AP}+\overline{QB}=\overline{A'Q}+\overline{QB}$



（乙）將 B 點垂直往下 3 公尺到 B'，則 $\overline{QB}=\overline{PB'}$

如此 $\overline{AP}+\overline{QB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

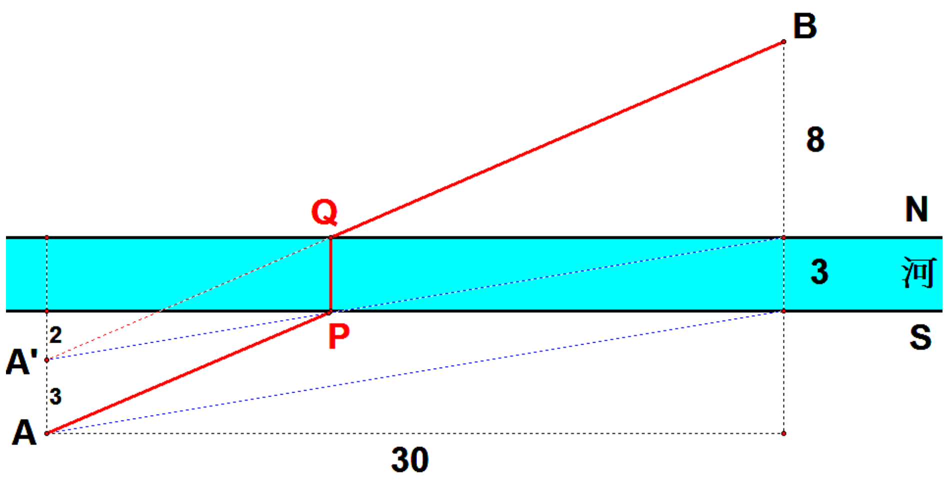


（4）本題的作圖法：如果要讓 $\overline{AP}+\overline{QB}$ 最短，

在[方法甲]中，只要讓 A'、Q、B 成一直線；

在[方法乙]中，只要讓 A、P、B'成一直線即可。

【作法一】：



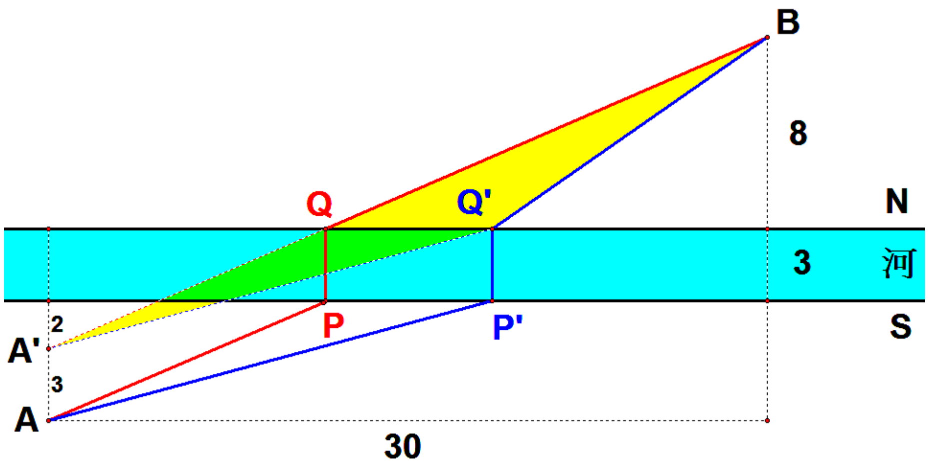
【作法】：1° 過 A 作直線垂直於直線 S，並取 A'，

使 $\overline{AA'}=3$（一個河寬）

2° 連 $\overline{BA'}$ 與直線 N 交於一點 Q，作 $\overline{QP}\perp S$ 於 P 點

3° 連 $\overline{AP}$，則 $\overline{PQ}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 即為最短路徑。

【證明】:



在河上再任意搭一座橋 P'Q'，
由圖中可知四邊形 APQA'、AP'Q'A' 都是平行四邊形

所以 $\overline{AP}=\overline{A'Q}$、$\overline{AP'}=\overline{A'Q'}$

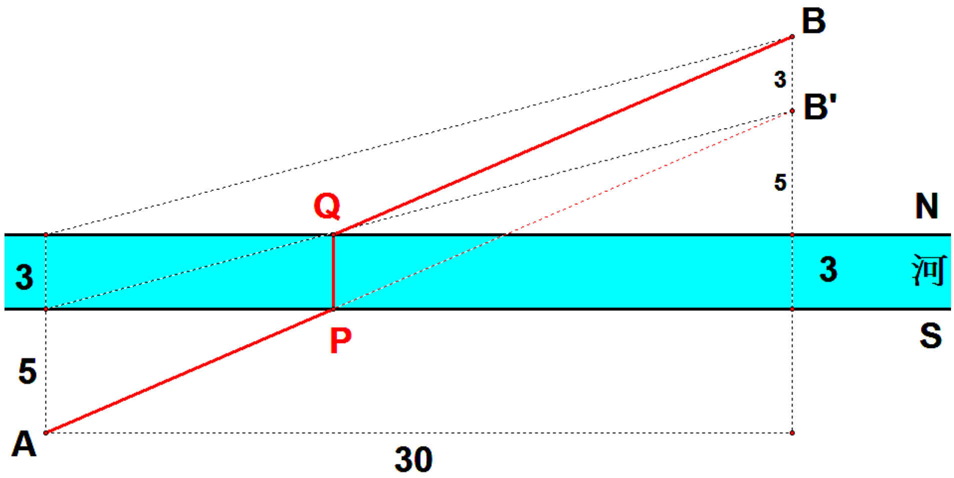
在 $\Delta A'Q'B$ 中，$\overline{A'Q'}+\overline{Q'B}>\overline{A'B}=\overline{A'Q}+\overline{QB}$

推得 $\overline{AP'}+\overline{Q'B}>\overline{AP}+\overline{QB}$　　因為 $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$

所以 $\overline{AP'}+\overline{Q'B}+\overline{P'Q'}>\overline{AP}+\overline{QB}+\overline{PQ}$

【作法二】:

【作法】:



1° 過 B 作直線垂直於直線 S，並取 B'，

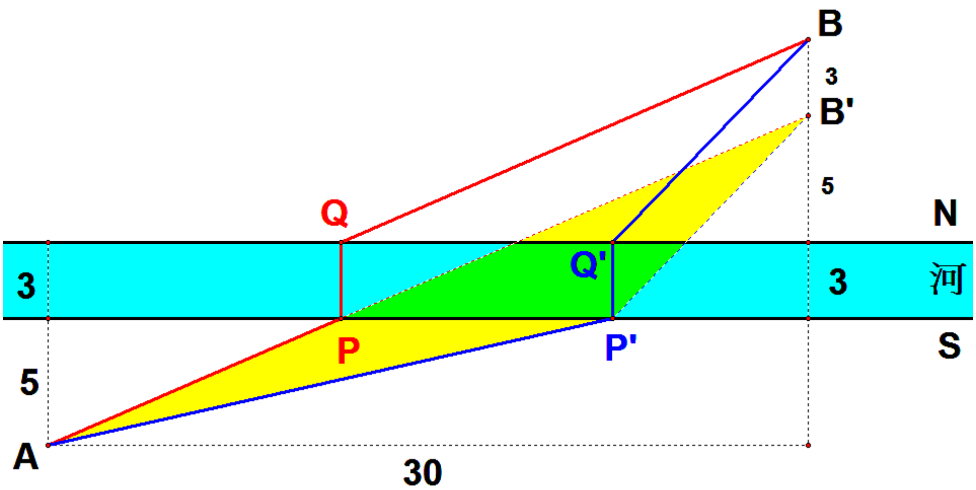
使 $\overline{BB'}=3$（一個河寬）

2° 連 $\overline{AB'}$ 與直線 S 交於一點 P，作 $\overline{PQ}\perp N$ 於 Q 點

3° 連 $\overline{QB}$，則 $\overline{PQ}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

即為最短路徑。

【證明】:



在河上再任意搭一座橋 P'Q'，

由圖中可知四邊形 BQPB'、BQ'P'B' 都是平行四邊形

所以 $\overline{QB}=\overline{B'P}$ 、 $\overline{BQ'}=\overline{B'P'}$

在 $\Delta AP'B'$ 中，$\overline{AP'}+\overline{P'B'}>\overline{AB'}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

推得 $\overline{AP'}+\overline{Q'B}>\overline{AP}+\overline{QB}$　　因為 $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$

所以 $\overline{AP'}+\overline{Q'B}+\overline{P'Q'}>\overline{AP}+\overline{QB}+\overline{PQ}$

（二）【歸納心得與疑問】：

1. 當 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 的結果為最短時，$\overline{AP}//\overline{QB}$。

所以我們可以說：要使 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 為最短，除了 $\overline{PQ}$ 的長為固定值之外，

只要找到 $\overline{PQ}\perp$ 直線 N，且 $\overline{AP}//\overline{QB}$ 即可。

2. 另一種作法是：對 B 找一個替代點 B'，讓 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 變成

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{PB'}=\overline{AP}+\overline{PB'}$ ＋（一個定值），於是要使 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 為最短，就變成

使『$\overline{AP}+\overline{PB'}$ ＋（一個定值）』為最短，所以只要讓 A、P、B' 成一直線即可。

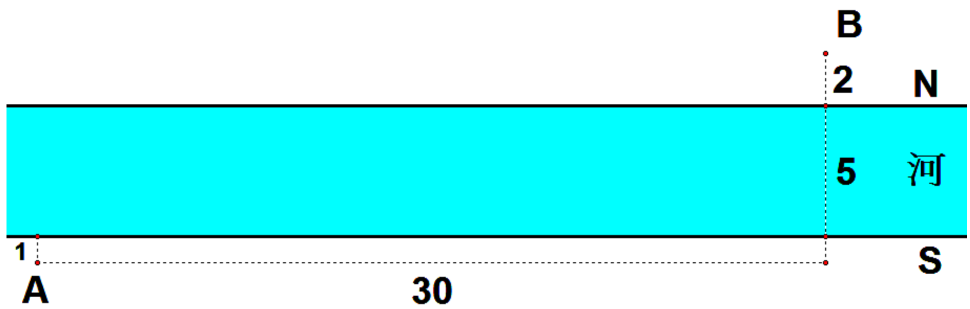
3. B' 的求法：由 B 沿著與河岸垂直的方向，向河的方向前進一個河寬長度的點，即是 B' 的位置。

4.【疑問】：如果河太寬或 B 離河太近，這樣的作法成立嗎？於是，我們想改變一些條件，觀察答案的變化。

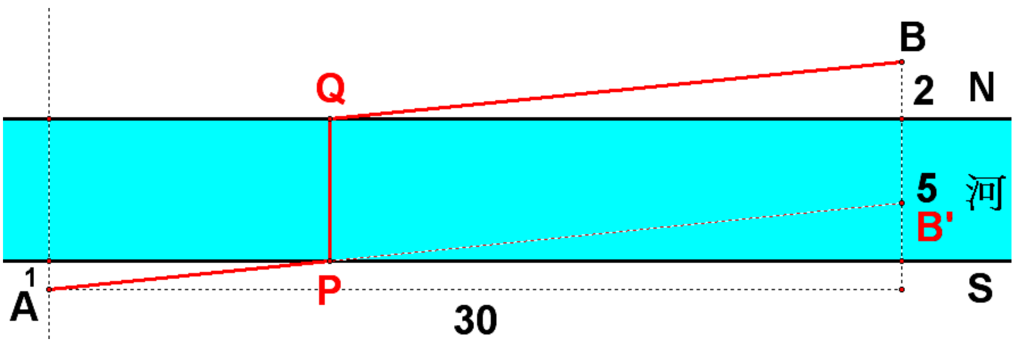
（三）改變河的位置及其他情況：

因為有以上的疑問，因此我們假設河的位置上下移時，探討『橋的位置』和『最短路徑』的變化情形：

1. B 點離河岸距離小於河寬：



【作法】：



1° 過 B 作直線垂直於直線 S，並取 B'，使 $\overline{BB'}=5$（一個河寬）

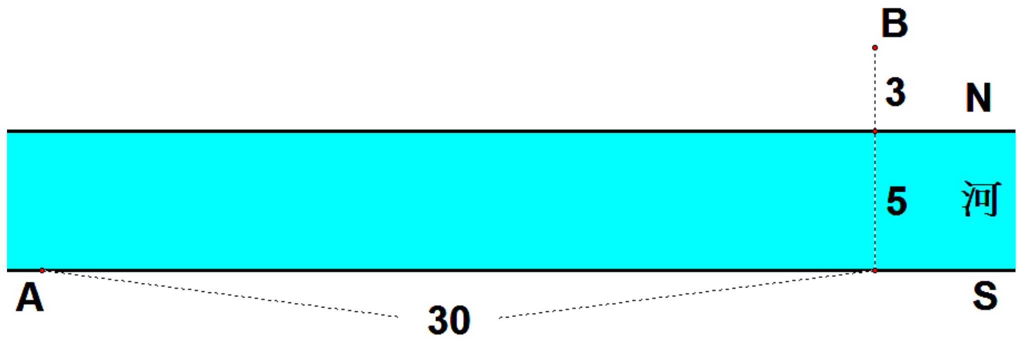
2° 連 $\overline{AB'}$ 與直線 S 交於一點 P，作 $\overline{PQ}\perp N$ 於 Q 點

3° 連 $\overline{QB}$，則 $\overline{PQ}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 即為最短路徑。

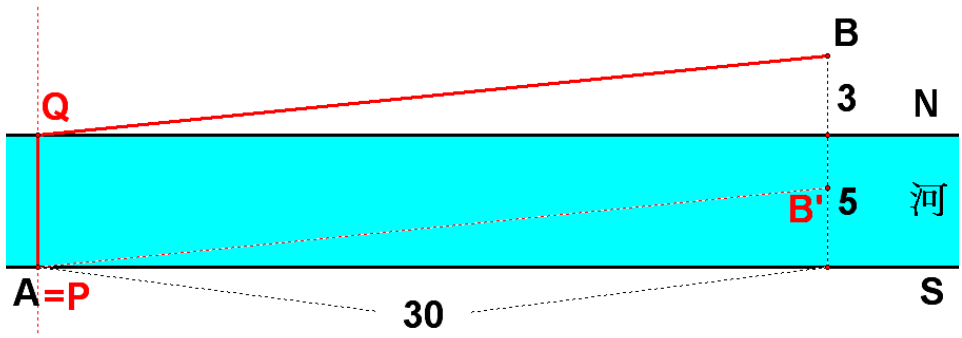
【證明】：請參考前面證明。

所以前面的作圖原則還是適用於本小題。

2. B 點離河岸距離小於河寬且 A 在岸邊：



【作法】：

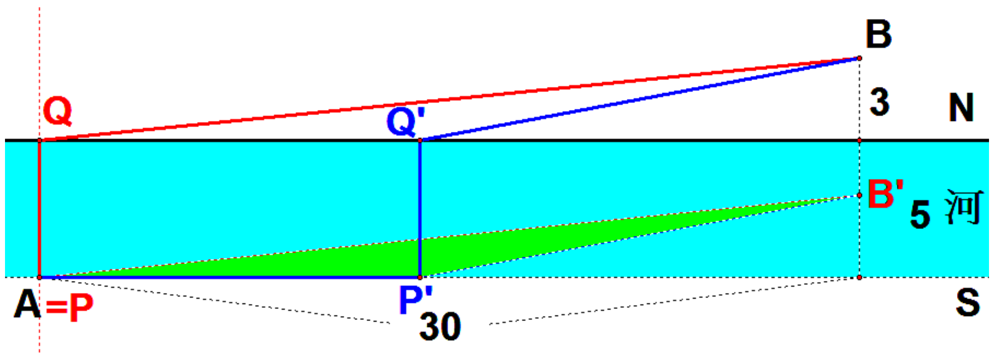


1° 過 B 作直線垂直於直線 S，並取 B'，使 $\overline{BB'}=5$（一個河寬）

2° 連 $\overline{AB'}$ 與直線 S 交於一點 P（＝A），作 $\overline{PQ}\perp N$ 於 Q 點

3° 連 $\overline{QB}$，則 $\overline{PQ}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 即為最短路徑。

【證明】：



在河上再任意搭一座橋 $P'Q'$，

由圖中可知四邊形 $BQPB'$ 、$BQ'P'B'$ 都是平行四邊形

所以 $\overline{QB}=\overline{B'P}$ 、 $\overline{BQ'}=\overline{B'P'}$

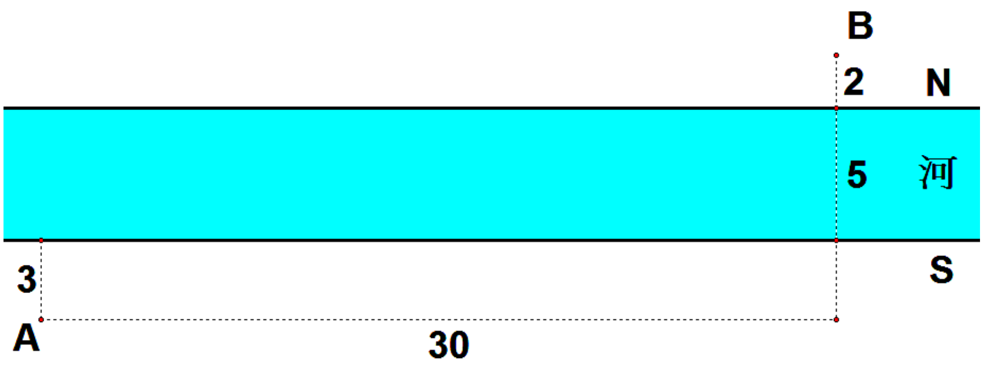
在 $\Delta AP'B'$ 中， $\overline{AP'}+\overline{P'B'}>\overline{AB'}=\overline{BQ}$

推得 $\overline{AP'}+\overline{Q'B}>\overline{QB}$　　因為 $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$

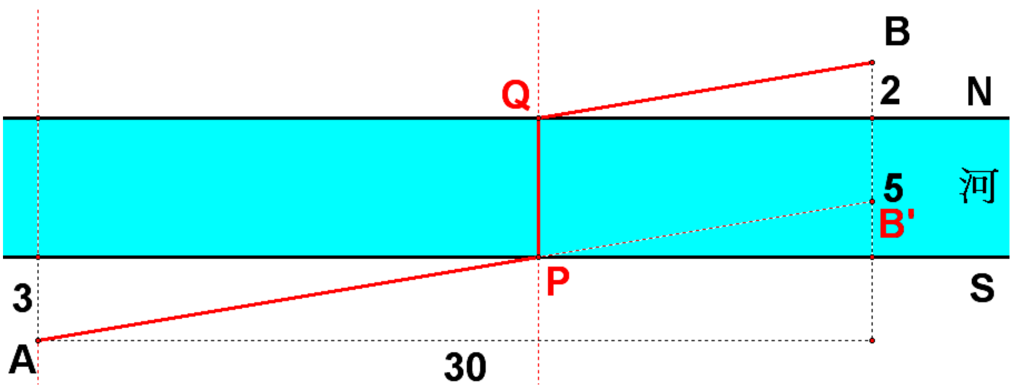
所以 $\overline{AP'}+\overline{Q'B}+\overline{P'Q'}>\overline{QB}+\overline{PQ}$（其中 $\overline{AP}=0$）

【註】：若 A 在岸邊，直接搭橋過河即可。

3. A、B 點離河岸距離的和等於河寬：



【作法】：

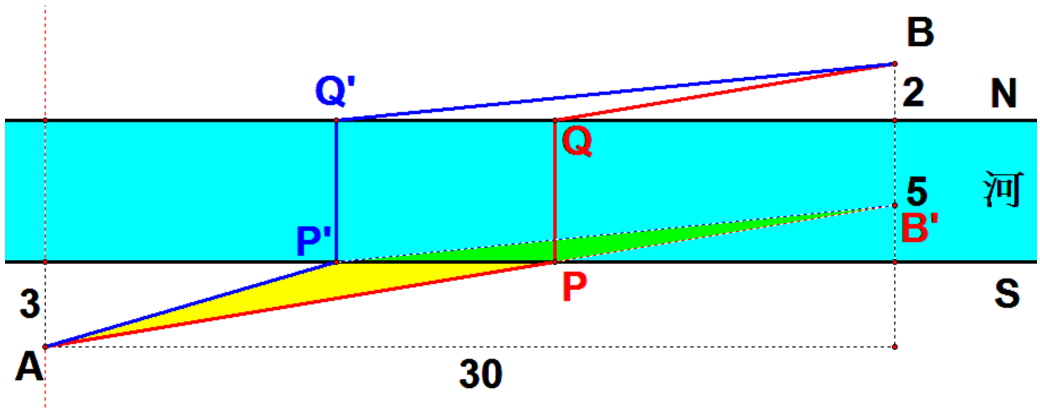


1° 過 B 作直線垂直於直線 S，並取 B'，使 $\overline{BB'}=5$（一個河寬）

2° 連 $\overline{AB'}$ 與直線 S 交於一點 P，作 $\overline{PQ}\perp N$ 於 Q 點

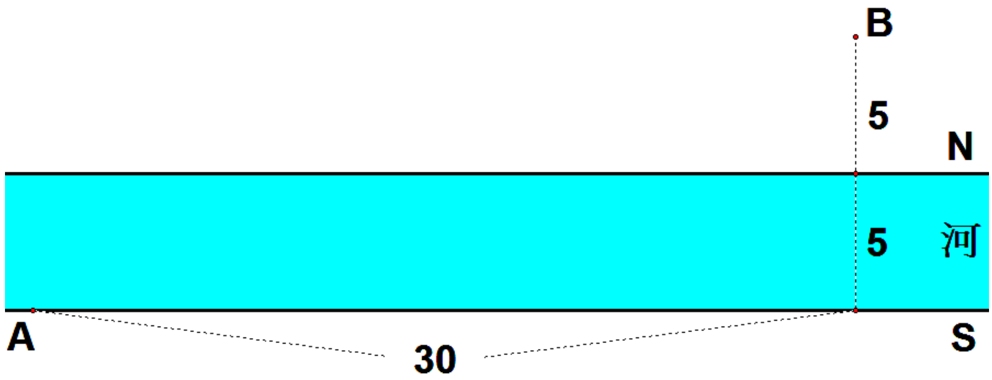
3° 連 $\overline{QB}$，則 $\overline{PQ}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 即為最短路徑。

【證明】：

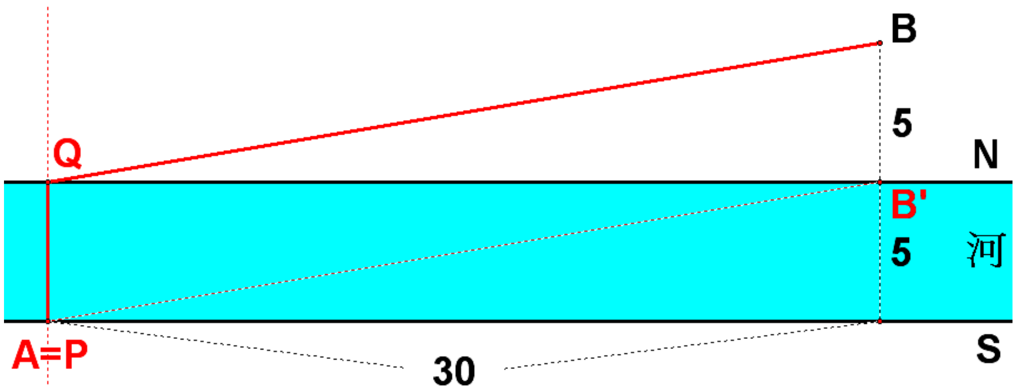


請參考前面證明。

4. B 點離河岸距離正好等於河寬且 A 在岸邊：



【作法】：



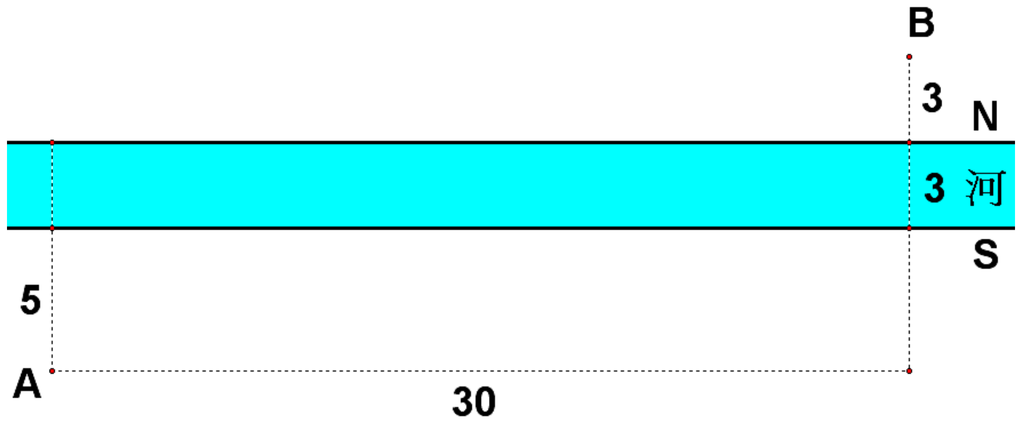
1° 過 B 作直線垂直於直線 S，並取 B'，使 $\overline{BB'}=5$（一個河寬）

2° 連 $\overline{AB'}$ 與直線 S 交於一點 P（＝A），作 $\overline{PQ}\perp$ N 於 Q 點

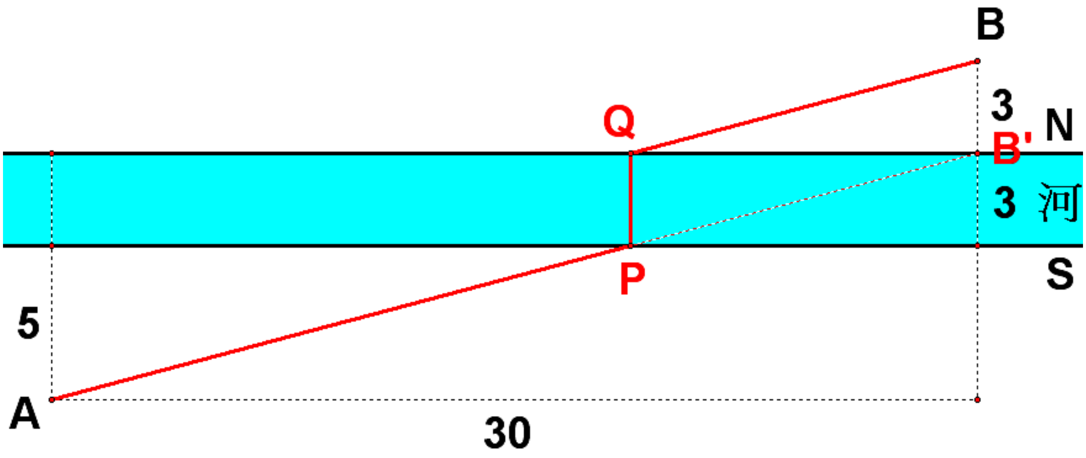
3° 連 $\overline{QB}$，則 $\overline{PQ}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 即為最短路徑。

【證明】：請參考前面證明。

5. B 點離河岸距離正好等於河寬且 A 不在岸邊：



【作法】：

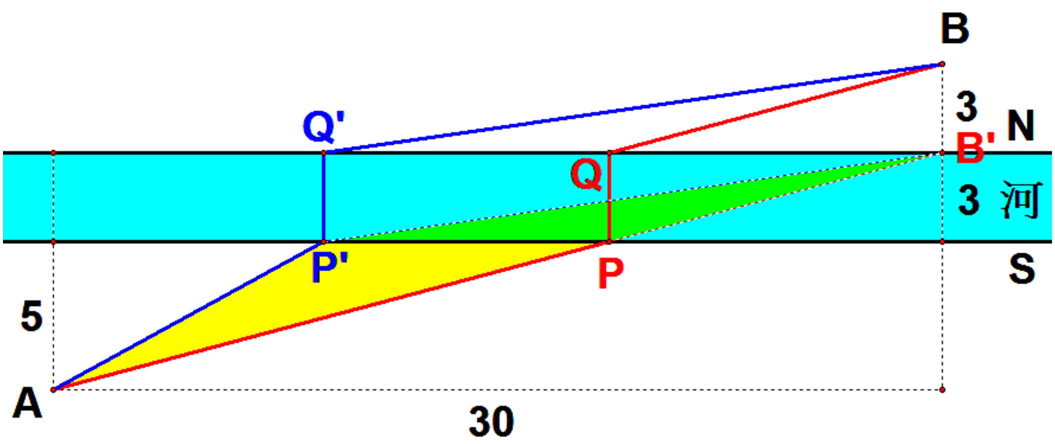


1° 過 B 作直線垂直於直線 S，並取 B'，使 $\overline{BB'}=3$（一個河寬）

2° 連 $\overline{AB'}$ 與直線 S 交於一點 P，作 $\overline{PQ}\perp$ N 於 Q 點

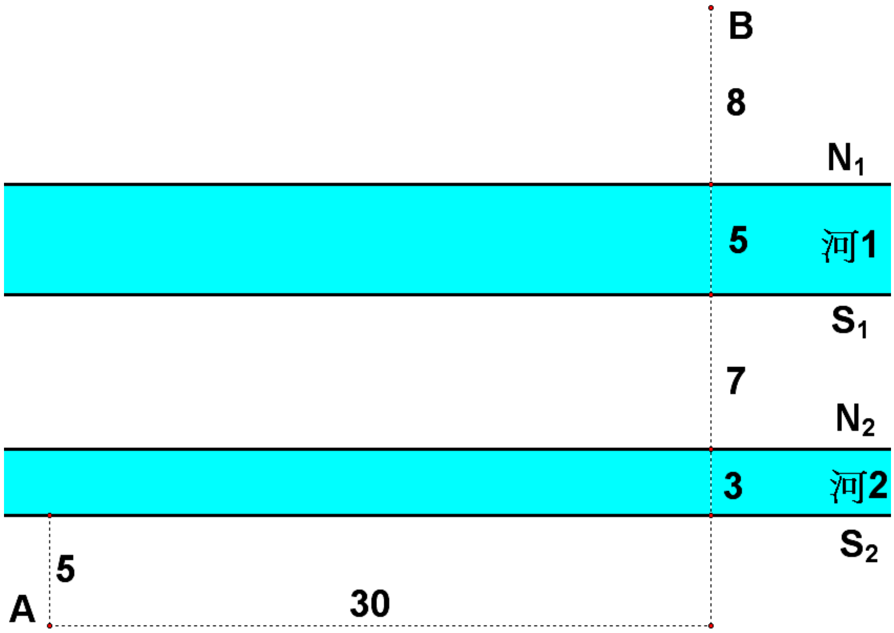
3° 連 $\overline{QB}$，則 $\overline{PQ}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 即為最短路徑。

【證明】：請參考前面證明。



二、探討河為二條時，橋應該各搭在何處才可以使總路徑為最短？

先以實例探討：

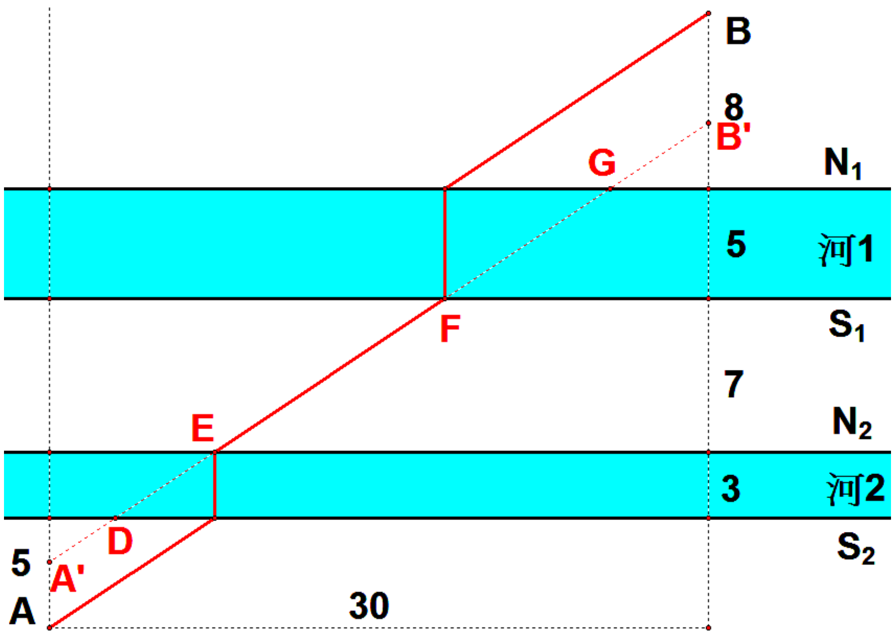


（一）第一個想法：

利用前面所得到的想法，可以想成從 A 到 B，所以 B 下降一個『河 1』的河寬（5 公尺）到 B' 點；再想成從 B' 到 A，所以 A 上升一個『河 2』的河寬（3 公尺）到 A' 點，連 $\overline{A'B'}$，可是 $\overline{A'B'}$ 與河岸共有 4 個交點（D、E、F、G)，那要在哪兩個地方搭橋呢？

經過一番討論，應該在 E、F 點搭橋，【作法】及【證明】如下：

【作法】：

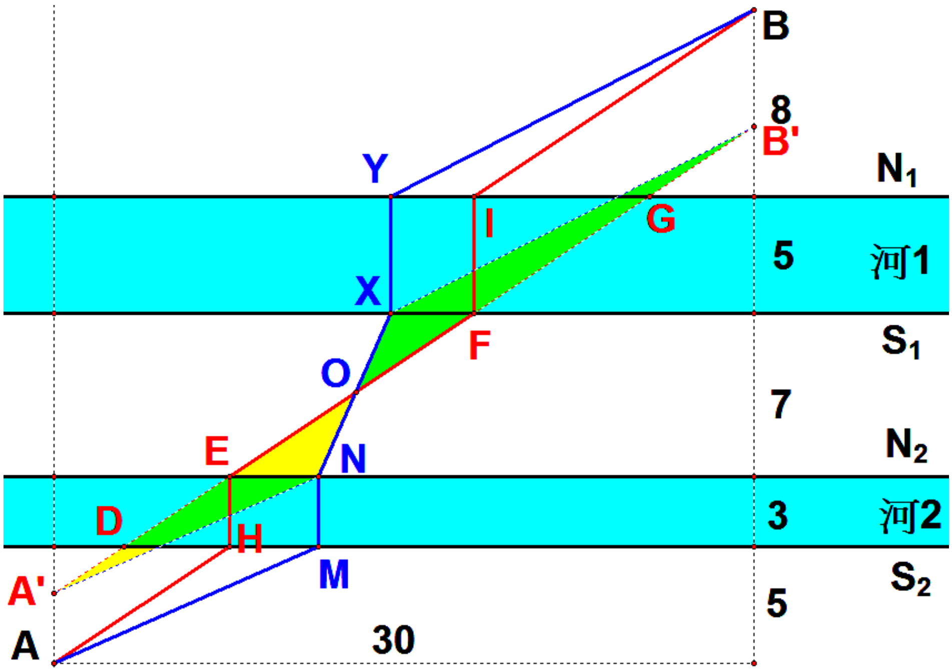


1° 過 A 作直線垂直於直線 S_2，並取 A'，使 $\overline{AA'}=3$（河 2 的寬度）

2° 過 B 作直線垂直於直線 N_1，並取 B'，使 $\overline{BB'}=5$（河 1 的寬度）

3° 連 $\overline{B'A'}$ 與直線 N_2、S_1 交於 E、F，在 E 處對河 2 搭橋、在 F 處對河 1 搭橋

【證明】：



在兩條河上再任意各搭一座橋 $\overline{MN}$、$\overline{XY}$，設 $\overline{A'B'}$ 交 $\overline{XN}$ 於 O 點

由圖中可知四邊形 AMNA'、AHEA'、BYXB'、BIFB' 都是平行四邊形

所以 $\overline{AM}=\overline{A'N}$、$\overline{AH}=\overline{A'E}$、$\overline{BY}=\overline{B'X}$、$\overline{BI}=\overline{B'F}$

在 $\Delta A'NO$ 中，$\overline{A'N}+\overline{NO}>\overline{A'O}=\overline{A'E}+\overline{EO}$；

在 $\Delta B'XO$ 中，$\overline{B'X}+\overline{XO}>\overline{B'O}=\overline{B'F}+\overline{FO}$

$\Rightarrow \overline{AM}+\overline{NO}>\overline{AH}+\overline{EO}$、$\overline{BY}+\overline{XO}>\overline{BI}+\overline{FO}$　　　兩式相加

推得 $\overline{AM}+\overline{NX}+\overline{BY}>\overline{AH}+\overline{EF}+\overline{IB}$　　再加上橋的距離

便可推出（紅色路徑＜藍色路徑）

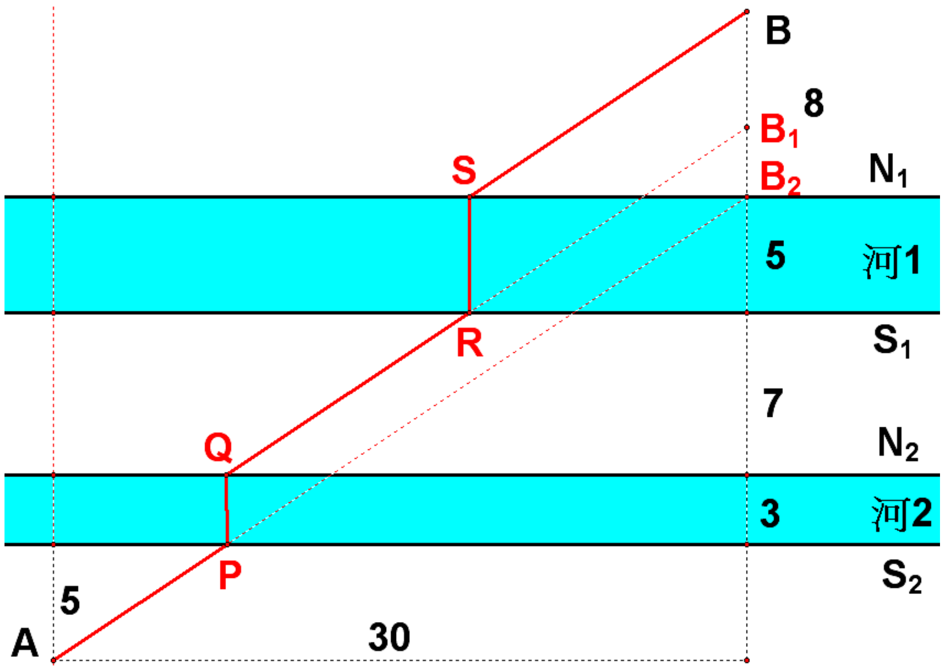
【註】：橋的位置另有別種選擇，不過證法類似。

（二）**【圖形的觀察與歸納－另一種方法】：**

因為上面這種方法在遇到『河數』較多時，較難有一般化的結論。

承第一個想法，如果將 B 下降 5 公尺（河 1 的寬度）到 B_1，則「從 A 到 B 渡兩河」轉化成「從 A 到 B_1 渡河 2」，然後再將 B_1 下降 3 公尺（河 2 的寬度）到 B_2，就變成「從 A 到 B_2 走直線」問題了。詳細作法如下：

【作法】:



1° 過 B 作直線垂直於直線 N_1，並取 B_1、B_2，使 $\overline{BB_1}=5$、$\overline{B_1B_2}=3$

2° 連 $\overline{AB_2}$ 與直線 S_2 交於一點 P，作 $\overline{PQ}\perp N_2$ 於 Q 點

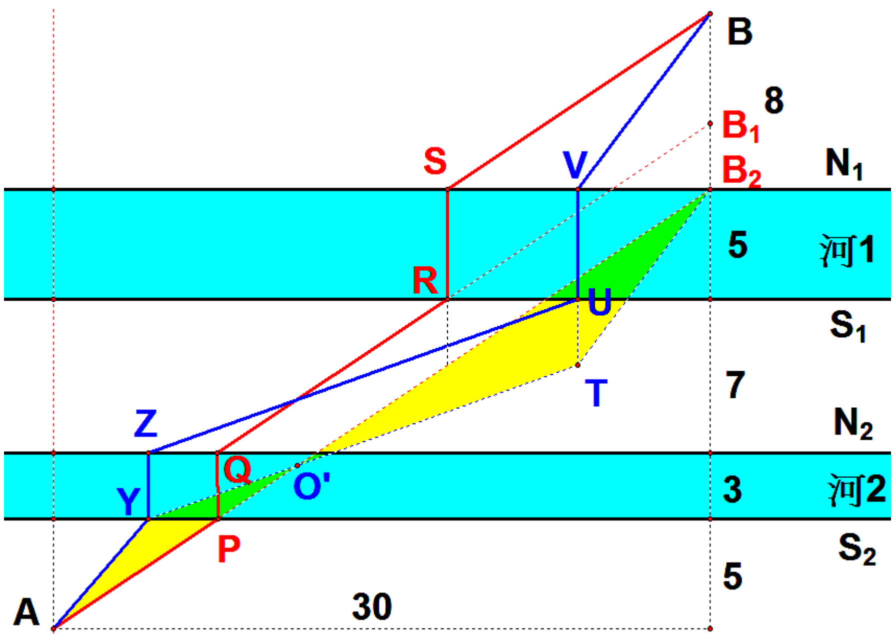
3° 再連 $\overline{QB_1}$ 與直線 S_1 交於一點 R，作 $\overline{RS}\perp N_1$ 於 S 點

4° 連 $\overline{AP}$、$\overline{QR}$、$\overline{SB}$

則 $\overline{PQ}$、$\overline{RS}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SB}$ 即為最短路徑。

【註】:本作法所得到『橋的位置』與前面作法一所得到『橋的位置』完全相同。

【證明】:



在兩條河上再任意各搭一座橋 $\overline{YZ}$ 、 $\overline{UV}$ ，過 U 作直線垂直於 N_2 並取 $\overline{UT}=\overline{YZ}$

$\overline{AB_2}$ 交 $\overline{YT}$ 於 O' 點

若略去橋的距離，則紅色路徑 $=\overline{AB_2}$ ，藍色路徑 $=\overline{AY}+\overline{YT}+\overline{TB_2}$

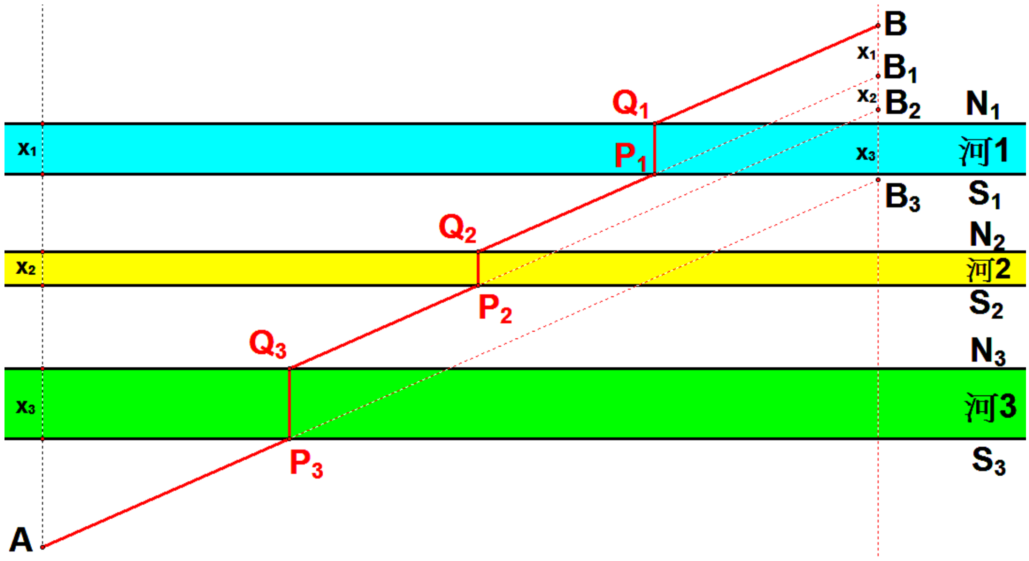
利用 $\Delta AYO'$ 、 $\Delta O'TB_2$ 便可證明紅色路徑 < 藍色路徑　　　得證

三、探討河為三條以上時，為使總路徑為最短，搭橋的原則為何？

【歸納出三條河以上的搭橋原則】：

根據上面作法二，我們採取比較一致性的作法，以下作圖以河為三條為例：

【作法】：



1° 過 B 作直線垂直於直線 N_1，並取 B_1、B_2、B_3，使 $\overline{BB_1}=x_1$、$\overline{B_1B_2}=x_2$、$\overline{B_2B_3}=x_3$

2° 連 $\overline{AB_3}$ 與直線 S_3 交於一點 P_3 ，作 $\overline{P_3Q_3}\perp N_3$ 於 Q_3 點

3° 連 $\overline{Q_3B_2}$ 與直線 S_2 交於一點 P_2 ，作 $\overline{P_2Q_2}\perp N_2$ 於 Q_2 點

4° 連 $\overline{Q_2B_1}$ 與直線 S_1 交於一點 P_1，作 $\overline{P_1Q_1}\perp N_1$ 於 Q_1 點

5° 連 $\overline{AP_3}$ 、 $\overline{Q_3P_2}$ 、 $\overline{Q_2P_1}$ 、 $\overline{Q_1B}$

則 $\overline{P_1Q_1}$ 、 $\overline{P_2Q_2}$ 、 $\overline{P_3Q_3}$ 即為橋的位置，

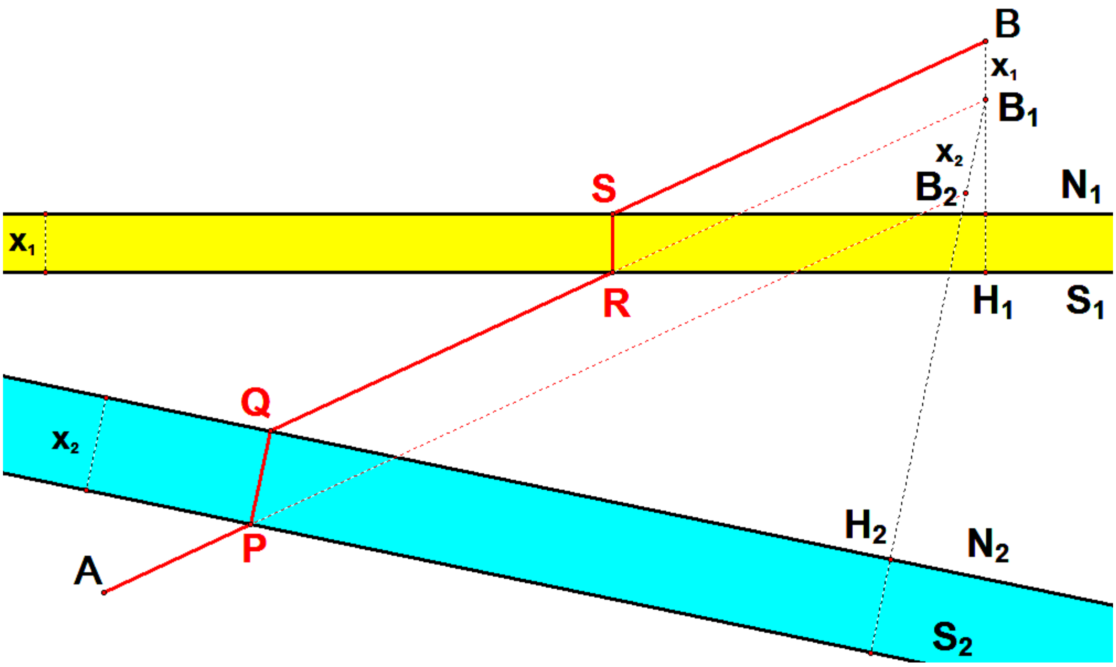
$\overline{AP_3}+\overline{P_3Q_3}+\overline{Q_3P_2}+\overline{P_2Q_2}+\overline{Q_2P_1}+\overline{P_1Q_1}+\overline{Q_1B}$ 即為最短路徑。

【證明】：請參考上面證法

四、探討河與何不平行時，為使總路徑為最短，搭橋的原則為何？

其實河與何不平行時，也可以應用上面的作圖原則做出來。

（一）以河為兩條為例：



【作法】：設河 1 的寬度為 x_1、河 2 的寬度為 x_2

1° 過 B 作直線垂直於直線 N_1，並取 B_1，使 $\overline{BB_1}=x_1$

2° 再過 B_1 作直線垂直於直線 N_2，並取 B_2，使 $\overline{B_1B_2}=x_2$

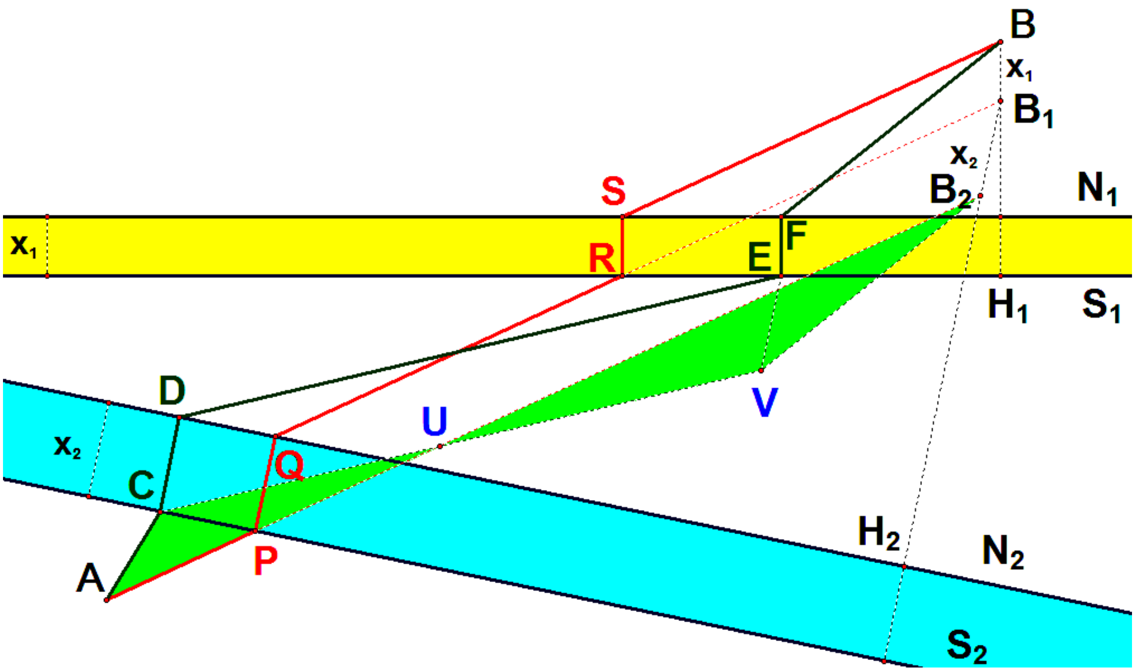
3° 連 $\overline{AB_2}$ 與直線 S_2 交於一點 P，作 $\overline{PQ}\perp N_2$ 於 Q 點

4° 再連 $\overline{QB_1}$ 與直線 S_1 交於一點 R，作 $\overline{RS}\perp N_1$ 於 S 點

5° 連 $\overline{AP}$ 、 $\overline{QR}$ 、 $\overline{SB}$ ，

則 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{RS}$ 即為橋的位置，$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SB}$ 即為最短路徑。

【證明】:



在兩條河上再任意各搭一座橋$\overline{CD}$、$\overline{EF}$，過 E 作直線垂直於N_2並取$\overline{EV}=\overline{CD}=x_2$

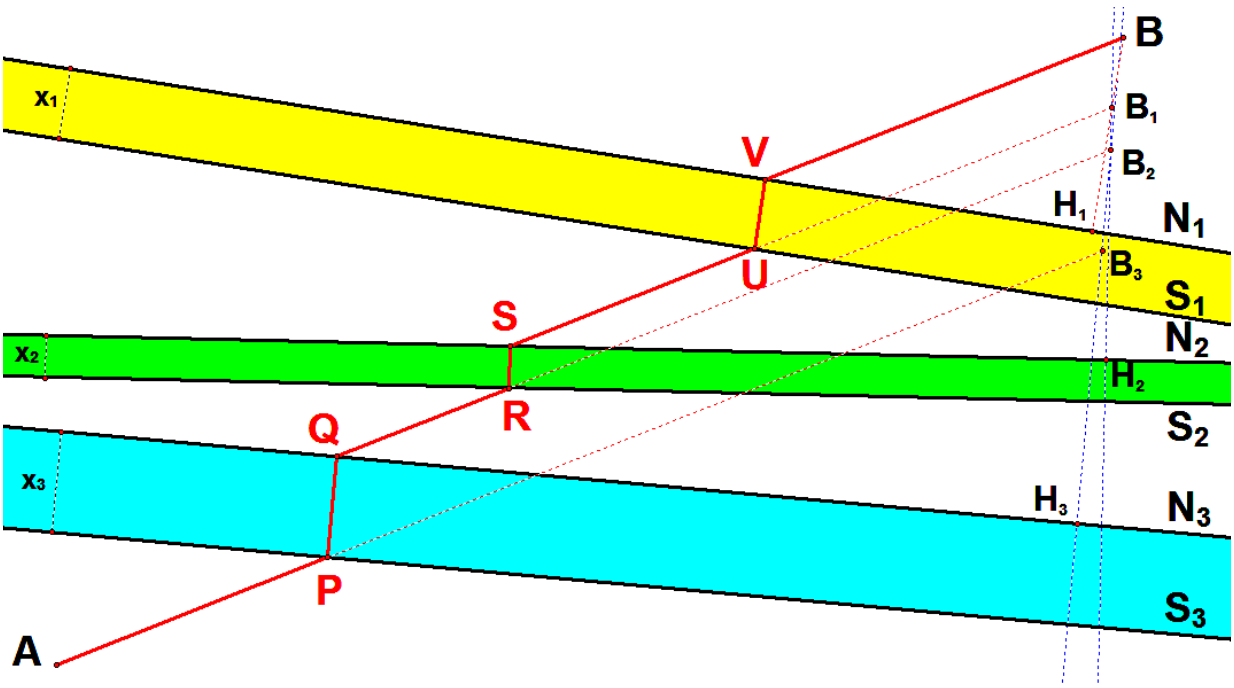
$\overline{AB_2}$交$\overline{CV}$於 U 點

若略去橋的距離，則紅色路徑$=\overline{AB_2}$，綠色路徑$=\overline{AC}+\overline{CV}+\overline{VB_2}$

利用ΔACU、ΔUVB_2便可證明紅色路徑<綠色路徑　　　得證

（二）以河為三條為例：

【作法】:

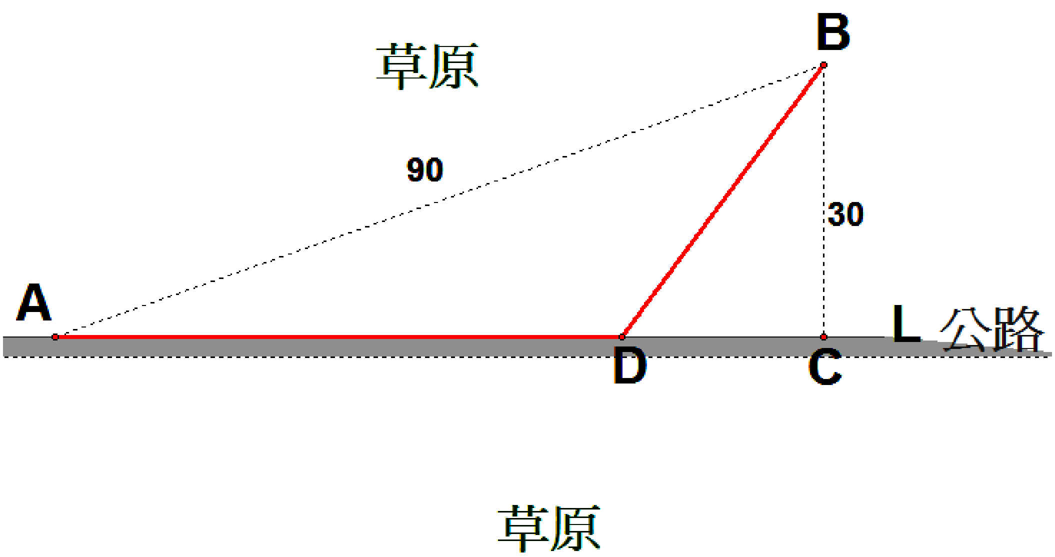


請參考上面作法。

【證明】：請參考前面證明。

五、探討同時可以在河上和陸地上行駛但兩者速度不同時，應採取何種路徑才可以使所花的時間最短？或花費的運費最少？

（一）【問題一】：一條筆直的公路 L 穿過草原，公路邊有一個衛生站 A，距離公路 30 公里的地方有一個居民聚落 B，A、B 的直線距離為 90 公里。某天，一個司機開車要從衛生站送一批急救藥品到居民聚落 B，汽車在公路上的最快速度是 60 公里/小時，而在草地上的最快速度是 30 公里/小時，問司機應以怎樣的行駛路線才能使他行車所用的時間最短？最短時間是多少？



1.【討論過程】：

（1）連 $\overline{AB}$，走 $\overline{AB}$ 當然可以是最短路徑，可以卻全部都是走草原，時間會是最短嗎?我們先試算一下：

（Ⅰ）若全部走草地，所需時間為 90÷30＝3 小時

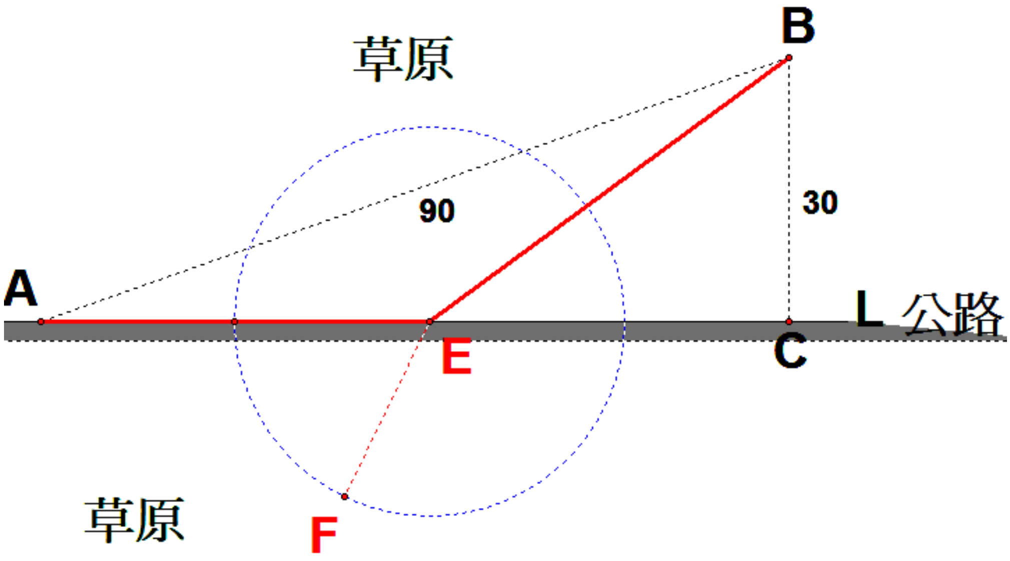
（Ⅱ）$\overline{AC}=\sqrt{90^2-30^2}=60\sqrt{2}$，如果先走一半再走草地，

則 $\overline{AD}=30\sqrt{2}$、$\overline{CD}=30\sqrt{2}$，$\overline{BD}=\sqrt{(30\sqrt{2})^2+30^2}=30\sqrt{3}$

所需時間為 $\dfrac{30\sqrt{2}}{60}+\dfrac{30\sqrt{3}}{30}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　約 2.439＜3

所以距離最短不代表時間最短。

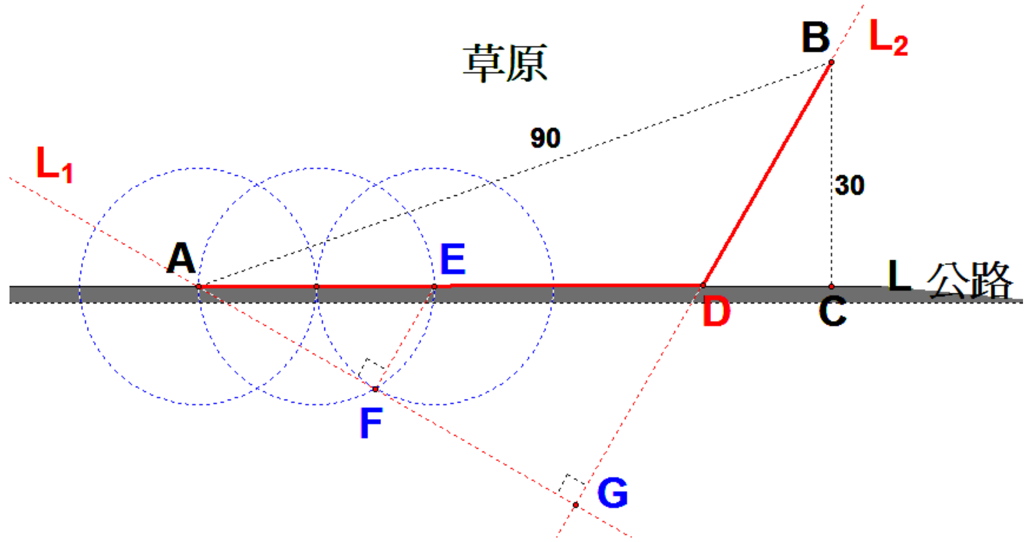
（2）【想法】：



先在 $\overline{AC}$ 任取一點 E，則所花的總時間為『公路段 $\overline{AE}$ 所花的時間』＋『草原段 $\overline{BE}$ 所花的時間』，但是因為兩者速率不同，所以不能直接看路徑的總長，如前面的計算，路徑最短但時間卻不是最短。

接著觀察到：『汽車在公路上的最快速度是 60 公里/小時，而在草地上的最快速度是 30 公里/小時』，也就是公路上的速率為草原上速率的兩倍。因此在同一段時間內，在公路上可以走 $\overline{AE}$，而在草原上則只能走 $\frac{1}{2}\overline{AE}$，若以 E 為圓心，$\frac{1}{2}\overline{AE}$ 為半徑畫圓，則走 $\overline{AE}$ 所花的時間等於圓周上某一點 F 出發走 $\overline{EF}$ 所花的時間，可是圓周上有無限多點，而且隨著 E 點的位置不同（因為 E 點未知），圓也不一樣，要如何決定 F 點的位置最有利於後面的判斷呢？經過討論後，覺得可以讓『$\angle AFE$ 保持 $90°$』，因此我們以下的作法就是『作 ΔAFE 為直角三角形，使 $\angle AFE = 90°$，且 $\overline{AE} : \overline{EF} = 2:1$』，作法如下：

(3)【作法】:

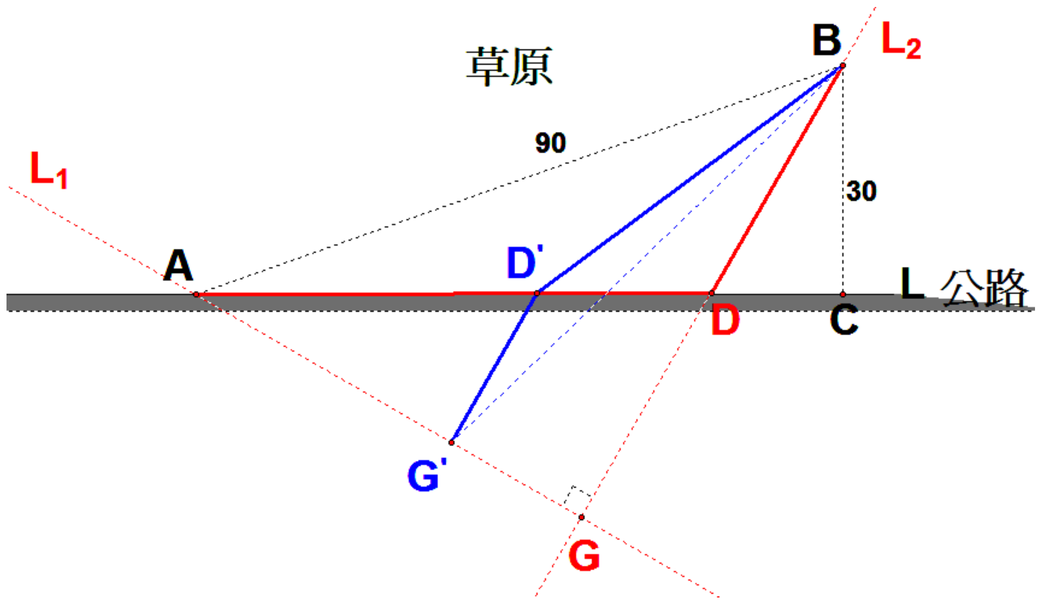


(Ⅰ)在 $\overline{AC}$ 上任取一點 E,作直角三角形 AEF,使 $\angle AFE = 90°$ 且 $\overline{AE} : \overline{EF} = 2:1$

(Ⅱ)做直線 AF(圖中直線 L_1),過 B 作直線 $L_2 \perp L_1$ 於 G,交公路 L 於 D

(Ⅲ)連 $\overline{AD}$ 、$\overline{BD}$,則 $\overline{AD} + \overline{BD}$ 即為所求之路徑。

(4)【證明】:



(Ⅰ)在 $\overline{AC}$ 上再任取一點 D',做 $\overline{D'G'} \perp L_1$ 於 G'

(Ⅱ)($\overline{AD'} + \overline{D'B}$ 所花時間)=(草原上藍色路經 $\overline{G'D'} + \overline{D'B}$ 所花時間)

>(草原上紅色路經 $\overline{GD} + \overline{DB}$ 所花時間)=($\overline{AD} + \overline{DB}$ 所花時間)得證

（5）計算最短時間：

根據前面作圖，可得 $\overline{CD}=10\sqrt{3}$ 、$\overline{AD}=60\sqrt{2}-10\sqrt{3}$ 、$\overline{BD}=20\sqrt{3}$

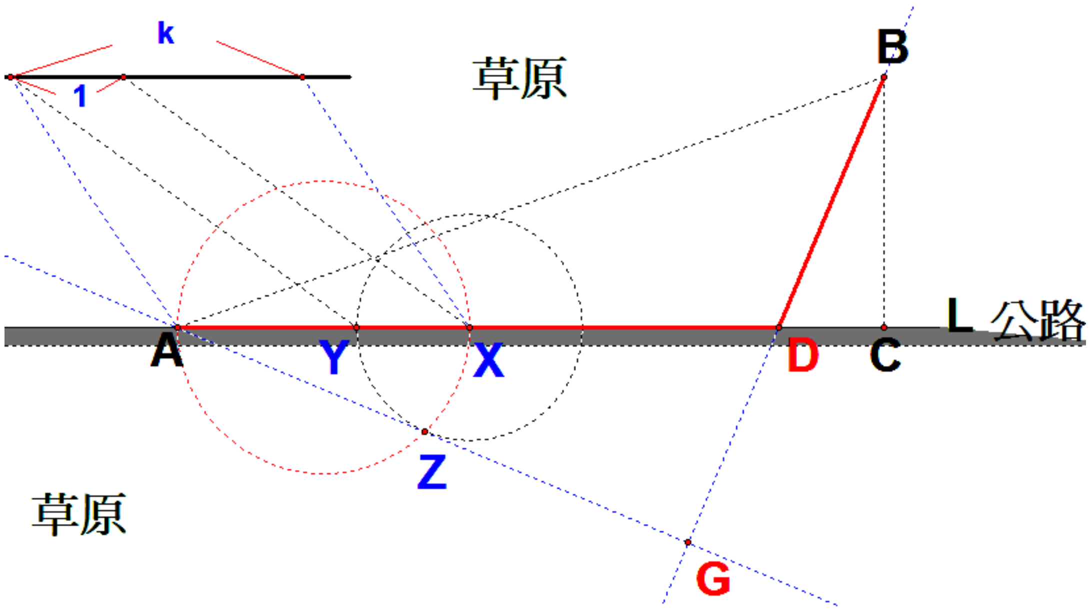
$\overline{GD}=\frac{1}{2}\overline{AD}=30\sqrt{2}-5\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{GB}=30\sqrt{2}+15\sqrt{3}$

所以最短時間 $=\frac{30\sqrt{2}+15\sqrt{3}}{30}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 小時

（6）【一般化作法】

【問題】：一條筆直的公路 L 穿過草原，公路邊有一個衛生站 A，及不在公路邊的一個居民聚落 B，若開車要從衛生站送一批急救藥品到居民聚落 B，汽車在公路上的最快速度是在草地上的最快速度的 k 倍，問司機應以怎樣的行駛路線才能使他行車所用的時間最短？



【作法】：

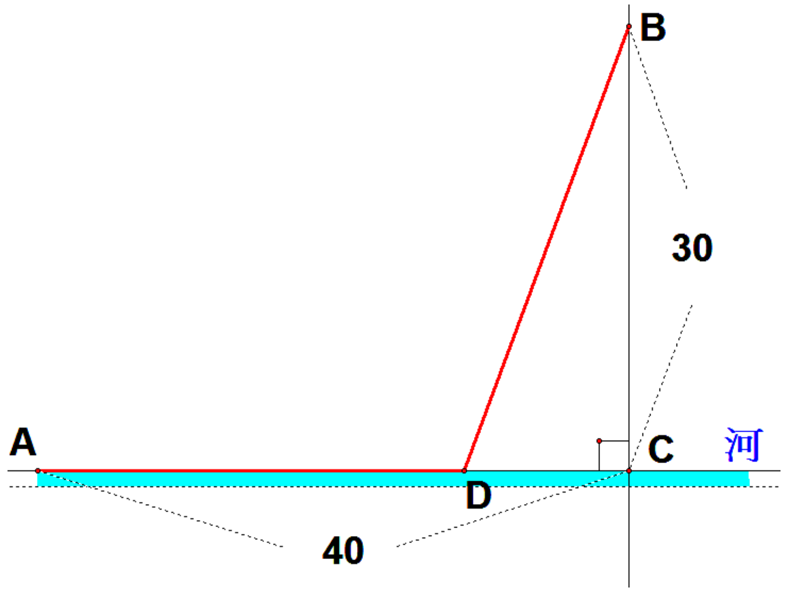
（Ⅰ）在 $\overline{AC}$ 上任取一點 X，作直角三角形 AXZ，使 $\angle AZX=90^\circ$

且 $\overline{AX}:\overline{XZ}=k:1$

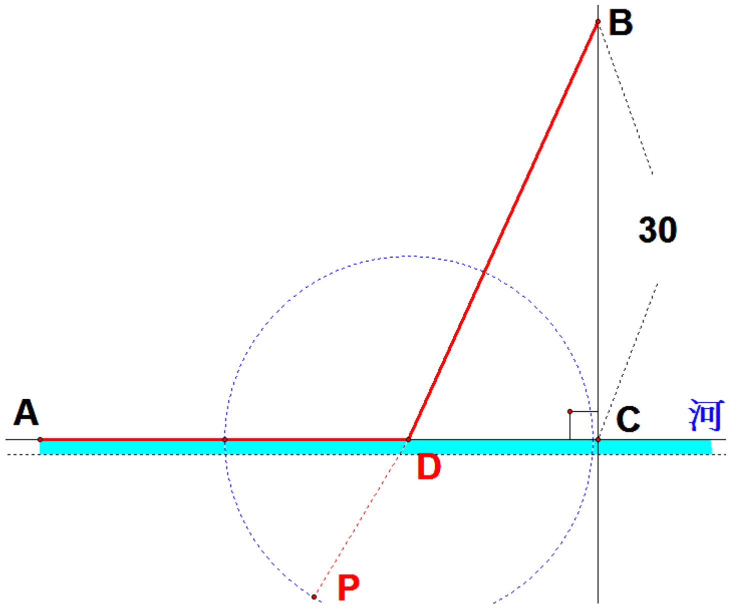
（Ⅱ）做直線 AZ，過 B 作直線 BG ⊥ 直線 AZ 於 G，交公路 L 於 D

（Ⅲ）連 $\overline{AD}$ 、$\overline{BD}$，則 $\overline{AD}+\overline{BD}$ 即為所求之路徑。

（二）【問題二】：由沿河城市 A 運貨物到河岸 30 公里的地點 B，按沿河距離計算，B 離 A 的距離 $\overline{AC}$ 為 40 公里。如果水路運費是公路運費的一半，應該怎樣確定在河岸的 D 點，從 B 點築一條公路到 D，才能使由 A 到 B 的運費最少？



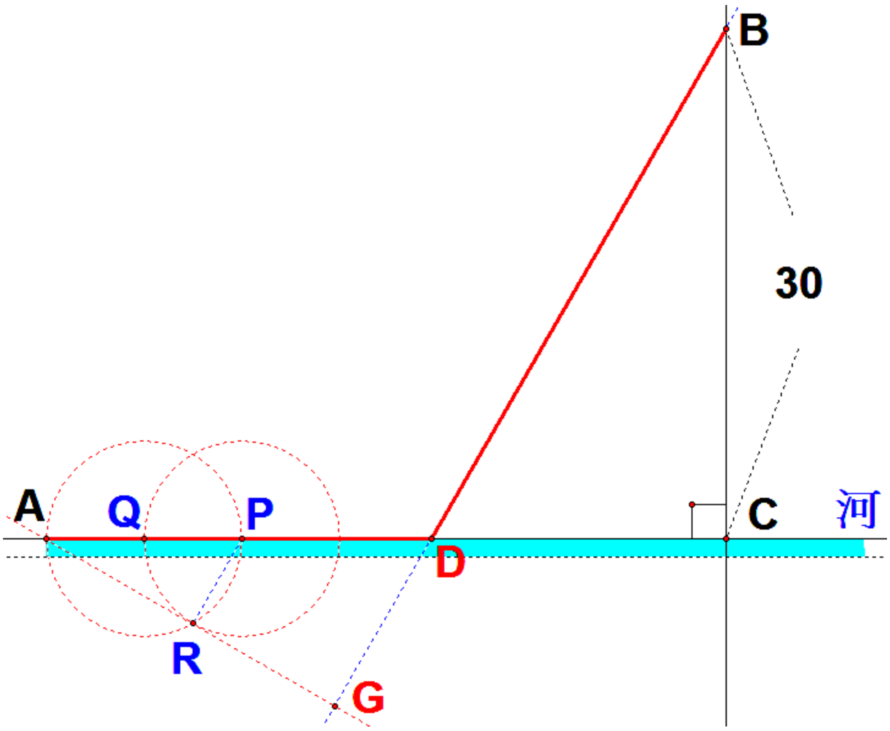
【想法】：



1. 先在 $\overline{AC}$ 任取一點 D，則所花的總運費為『$\overline{AD}$ 段所花的水運費』＋『$\overline{BD}$ 段所花的陸運費』，但是因為兩者單位運費不同，所以不能直接看路徑的總長。
2. 接著觀察到：『水路運費是公路運費的一半』。在相同運費下，在河上的距離是陸地上的 2 倍。因此在水路 $\overline{AD}$ 所花的水運費等於陸地上 $\frac{1}{2}\overline{AD}$ 所花的陸運費。
3. 若以 D 為圓心，$\frac{1}{2}\overline{AD}$ 為半徑畫圓，則走 $\overline{AD}$ 所花的水運費等於圓周上某一點 P 出

發走$\overline{PD}$所花的運費。因為有前題的經驗，可以讓『$\angle APD$保持$90°$』，作法如下：

【作法】：



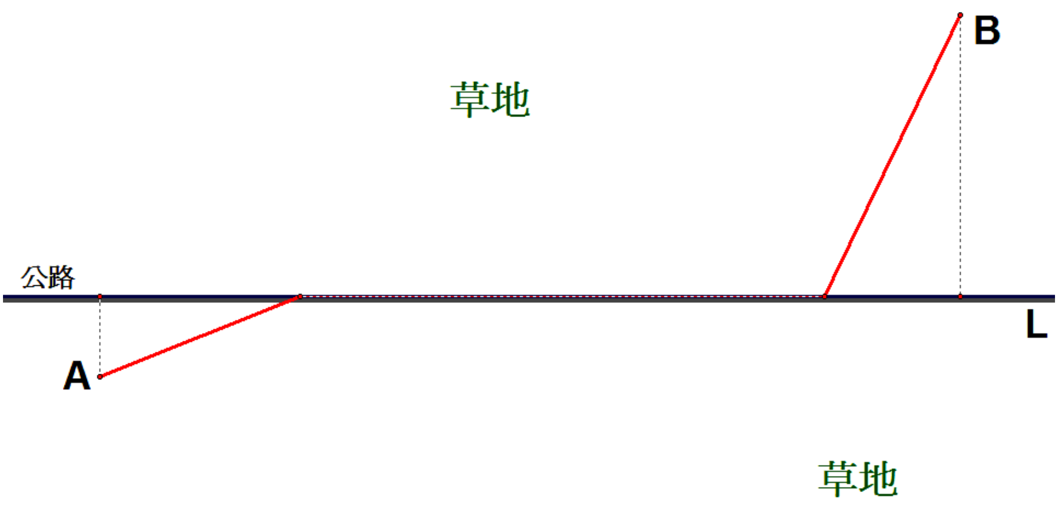
（Ⅰ）在$\overline{AC}$上任取一點 P，作直角三角形 APR，使$\angle ARP = 90°$且$\overline{AP} : \overline{PR} = 2:1$

（Ⅱ）做直線 AR，過 B 作直線$BG \perp$直線 AR 於 G，交$\overline{AC}$於 D

（Ⅲ）連$\overline{AD}$、$\overline{BD}$，則$\overline{AD} + \overline{BD}$即為所求之路徑。

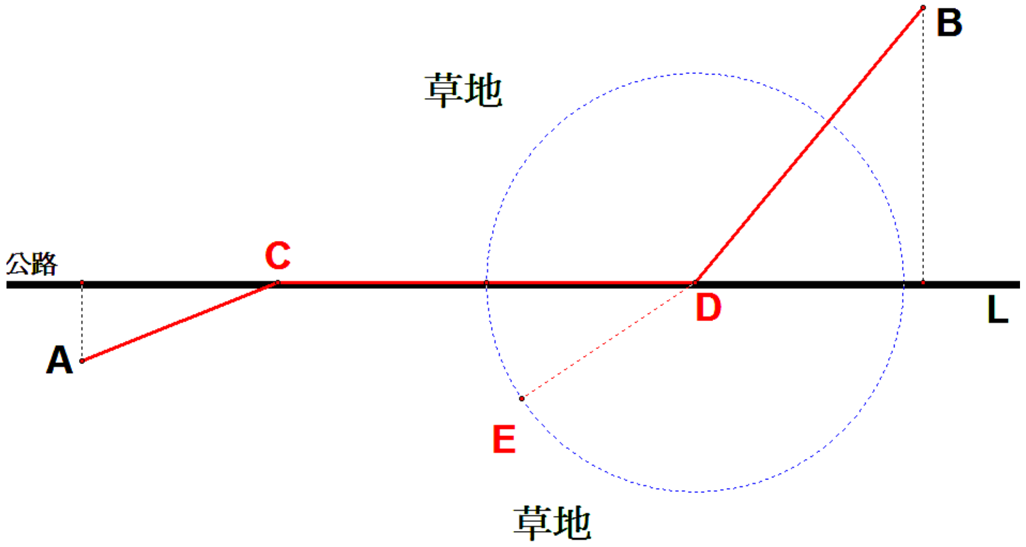
【證明】：請參考前面證明。

（三）【問題三】：一條筆直的公路 L 穿過草地，A、B 兩個居民點位於公路的兩側，某人駕車從 A 地到 B 地去，已知汽車在公路上的速度是草地上速度的 2 倍，問他的行駛路線如何才能使他行車所用的時間最少？



【想法】:

1. 這一題和【問題一】類似，汽車在公路上的速度和草地上速度不同，但是『**A 點不在公路邊**』，所以必須先走一段草地，再走公路，最後還要接草地。



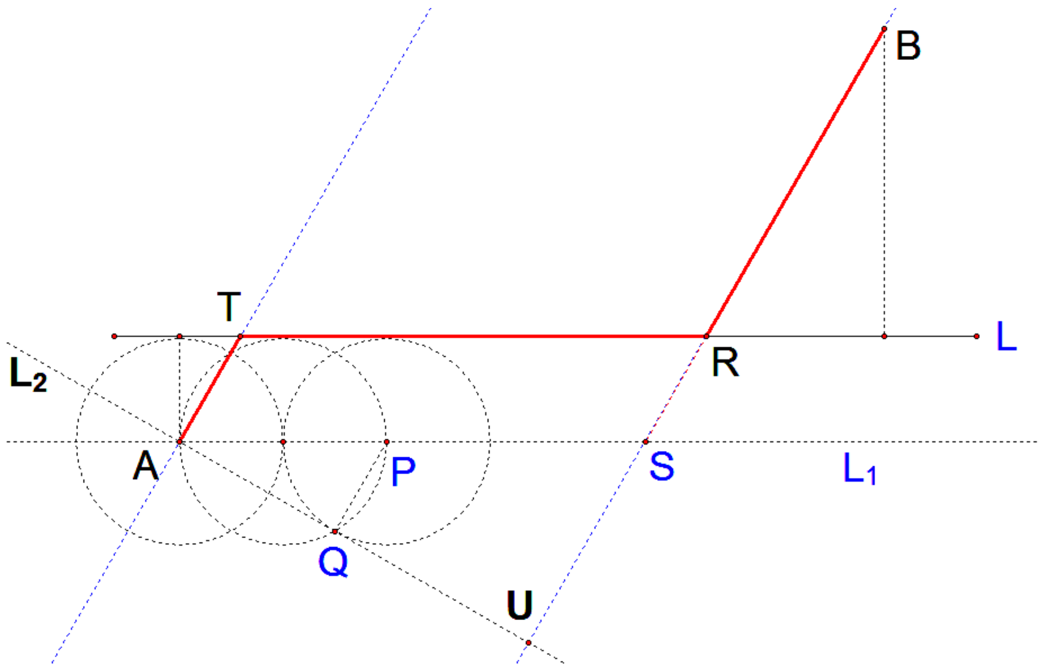
2. 在 L 上任取 C、D 兩點，因為汽車在公路上的速度是草地上速度的 2 倍

所以在相同時間走公路段 $\overline{CD}$，在草地上只能走 $\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}$，

以 D 為圓心，$\frac{1}{2}\overline{CD}$ 為半徑畫圓，在相同時間下，公路段 $\overline{CD}$ 可以換成草地上的 $\overline{DE}$，

可是：$\overline{AC}$、$\overline{DE}$、$\overline{DB}$ 三段如何接起來呢？

再加點什麼東西但又不改變他們的和，於是想到前面的『搭橋過河問題』:
『畫平行線』。
作法如下：
【作法】:



（Ⅰ）過 A 點作直線 L_1 / L，並任取一點 P，作直角三角形 APQ，使 $\angle AQP = 90°$ 且 $\overline{AP} : \overline{PQ} = 2:1$

（Ⅱ）做直線 AQ（圖中直線 L_2），過 B 作直線 $\perp L_2$ 於 U，交 L 於 R

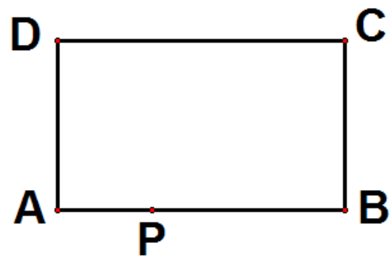
（Ⅲ）過 A 點作 $\overline{AT} // \overline{BU}$ 且交 L 於 T

（Ⅵ）則 $\overline{AT} + \overline{TR} + \overline{RB}$ 即為所求之路徑。

【證明】：請參考前面證明。

六、探討矩形內反射路徑的最短周長：

（一）【問題】：如下圖，矩形 ABCD 中，$\overline{AB} = a$，$\overline{BC} = b$，在 $\overline{AB}$ 上有一點 P，試在 $\overline{AD}$ 上取一點 Q、$\overline{DC}$ 上取一點 R、$\overline{CB}$ 上取一點 S，使 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{SP}$ 為最小；並求 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{SP}$ 的最小值。



（二）【想法】：可以想成由 P 點發射一道光束，光束經 $\overline{AD}$、$\overline{CD}$、$\overline{BC}$ 反射後回到 P 點。根據【預備知識三】知道光的反射符合最短路徑原則，於是就可以找到本題的解題關鍵。

光束要經 $\overline{AD}$、$\overline{CD}$、$\overline{BC}$ 反射後回到 P 點，利用『逆向思考』：

1. 若光束要由 R 點射出經 $\overline{BC}$ 反射後打到 P 點，則從 R 點射出必須打在 P 點對 $\overline{BC}$ 的對稱點 P_1；
2. 若光束要由 Q 點射出經 $\overline{CD}$ 反射後打到 P_1 點，則從 Q 點射出必須打在 P_1 點對 $\overline{CD}$ 的對稱點 P_2；
3. 若光束要由 P 點射出經 $\overline{AD}$ 反射後打到 P_2 點，則從 P 點射出必須打在 P_2 點對 $\overline{AD}$ 的對稱點 P_3；

於是作法如下：

（三）【作法】：1. 以直線 BC 為對稱軸，作 P 的對稱點 P_1。

2. 以直線 CD 為對稱軸，作 P_1 的對稱點 P_2 。
3. 以直線 AD 為對稱軸，作 P_2 的對稱點 P_3 。

4. 連 $\overline{PP_3}$ 與直線 AD 交於 Q。

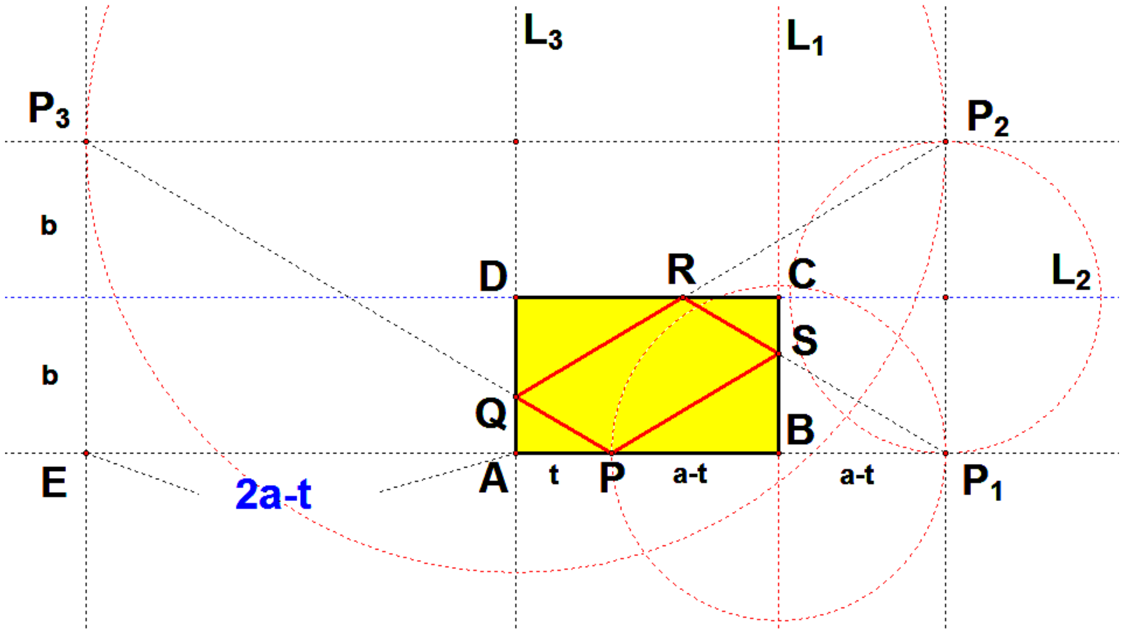
5. 連 $\overline{QP_2}$ 與直線 CD 交於 R。

6. 連 $\overline{RP_1}$ 與直線 BC 交於 S。

7. 則 Q、R、S 點即為所求。

由『對稱』性質可知：$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$ **的最小值＝**$\overline{PP_3}=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$

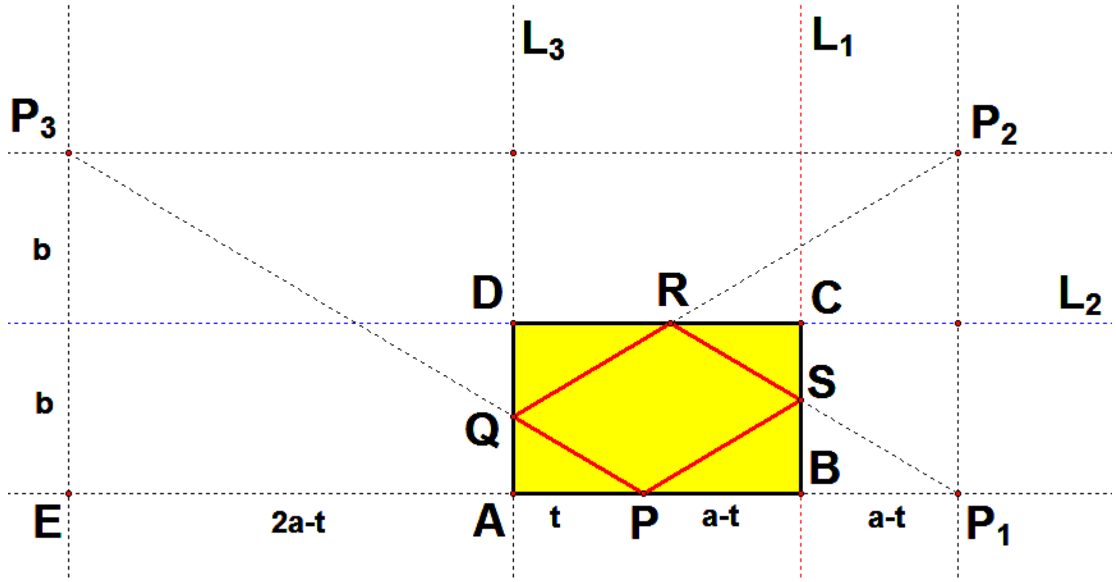
【註】：以上作法是採『順時針方向』的反射路徑，另有『逆時針方向』的反射路徑，所得路徑相同。

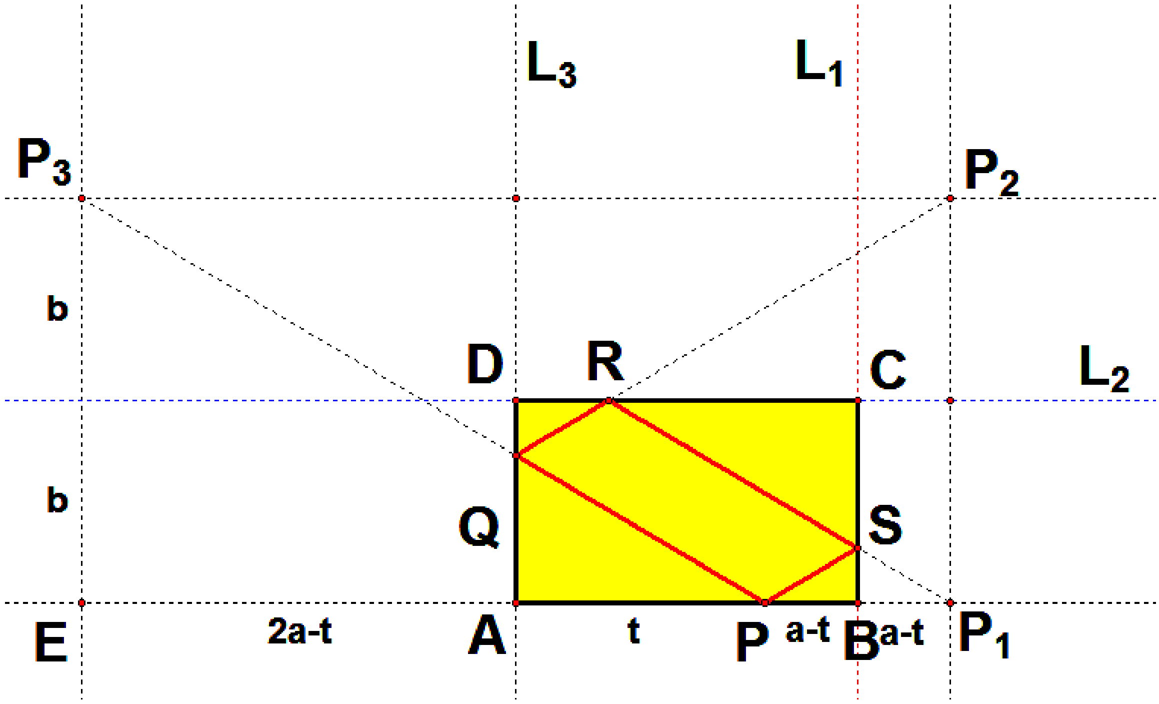


（四）延伸探討：

1. 由前面計算所得到的答案發現：$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$ 的最小值$=2\sqrt{a^2+b^2}$ 只與矩形的邊長有關，與 P 點位置無關。

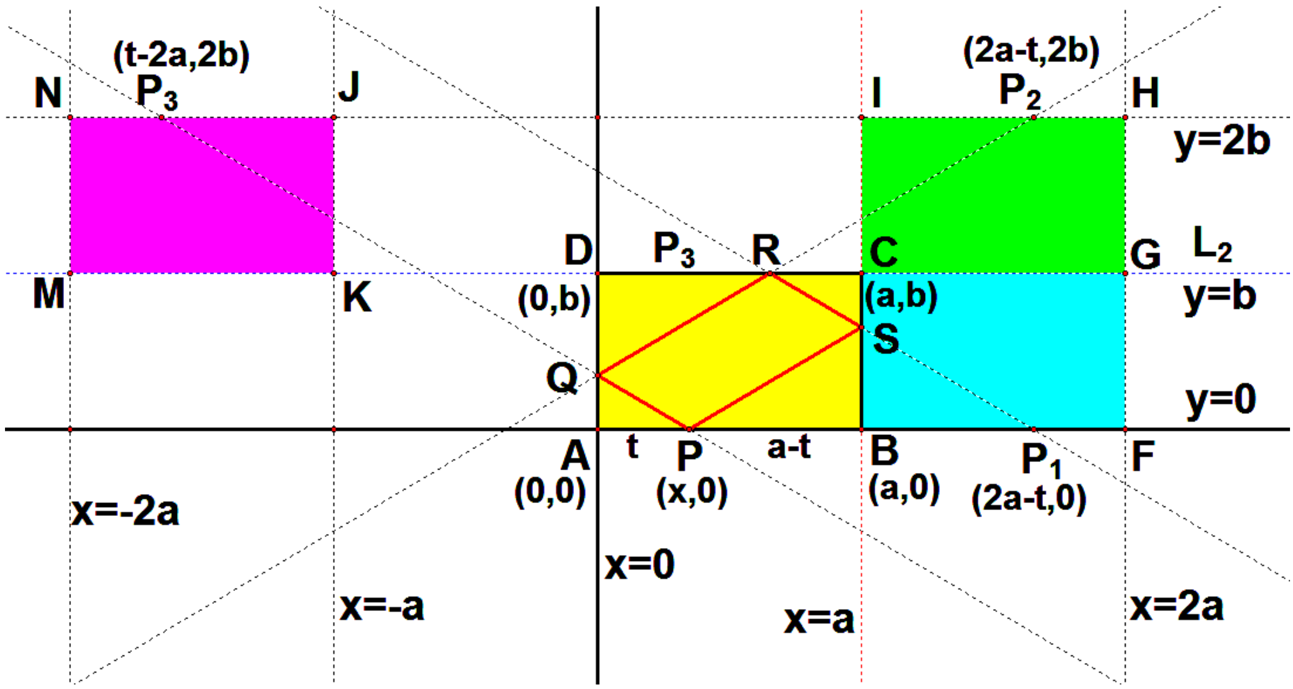
我們任意移動 P 點的位置，果然如此。【請看以下二圖】





2. 另外，我們也**任意改變矩形的長、寬比，發現其最短路徑必定存在。**

以下，我們以『座標法』驗證：設矩形的長、寬分別為 a、b



（1）先求直線 PP_3 的方程式，得 $y=-\dfrac{b}{a}x+\dfrac{bt}{a}$，

直線 PP_3 與 y 軸的交點 Q 為（0，$\dfrac{bt}{a}$）

因為 $0<t<a$，所以 $0<\dfrac{bt}{a}<b$，

因此 Q 點確實落於 $\overline{AD}$ 上

（2）再求直線 QP_2 的方程式，得 $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{bt}{a}$，

直線 QP_2 與直線 CD： $y=b$ 的交點為 R（a－t，b）

因為 $0<t<a$，所以 $0<a-t<a$，

因此 R 點確實落於 $\overline{CD}$ 上

（3）最後求直線 RP_1 的方程式，得 $y=-\dfrac{b}{a}x+(2b-\dfrac{bt}{a})$，

直線 RP_1 與直線 BC： $x=a$ 的交點為 S（a，$b-\dfrac{bt}{a}$）

因為 $0<t<a$，所以 $0<b-\dfrac{bt}{a}<b$，

因此 S 點確實落於 $\overline{BC}$ 上

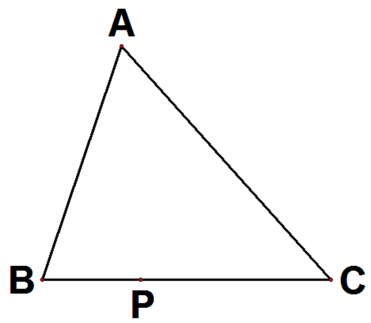
由此可證明『矩形的內反射路徑必定存在』。

七、探討三角形內反射路徑的最短周長：

在探討完矩形內反射路徑的最短周長問題後，那三角形內反射路徑，是否也像矩形內反射路徑一樣，有規律呢?

【問題】：在 ΔABC 的 $\overline{BC}$ 邊上有一個 P 點，試在 $\overline{AB}$ 上取一點 Q，$\overline{AC}$ 上取一點 R，使

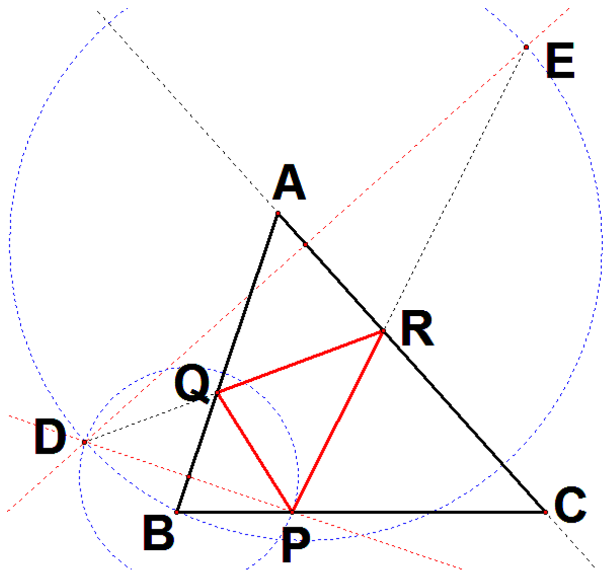
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 為最小；並求 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 的最小值。



（一）內反射三角形的作法：

隨便畫一個 ΔABC，在 $\overline{BC}$ 邊上任取一點 P，畫出其內反射三角形，可以有三個畫法：

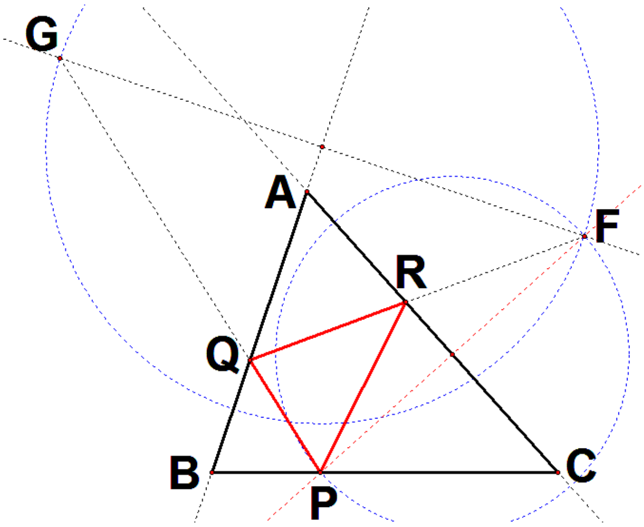
【方法一】:



1. 以直線 AB 為對稱軸，作 P 的對稱點 D
2. 以直線 AC 為對稱軸，作 D 的對稱點 E
3. 連 $\overline{PE}$ 交 $\overline{AC}$ 於 R
4. 連 $\overline{RD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q

則 ΔPQR 即為所求。

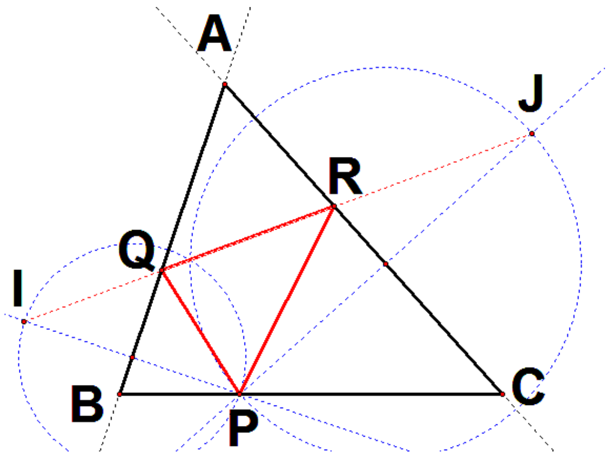
【方法二】:



1. 以直線 AC 為對稱軸，作 P 的對稱點 F
2. 以直線 AB 為對稱軸，作 F 的對稱點 G
3. 連 $\overline{PG}$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q
4. 連 $\overline{QF}$ 交 $\overline{AC}$ 於 R

則 ΔPQR 即為所求。

【方法三】:



1. 以直線 AB 為對稱軸，作 P 的對稱點 I
2. 以直線 AC 為對稱軸，作 P 的對稱點 J
3. 連 $\overline{IJ}$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q、交 $\overline{AC}$ 於 R

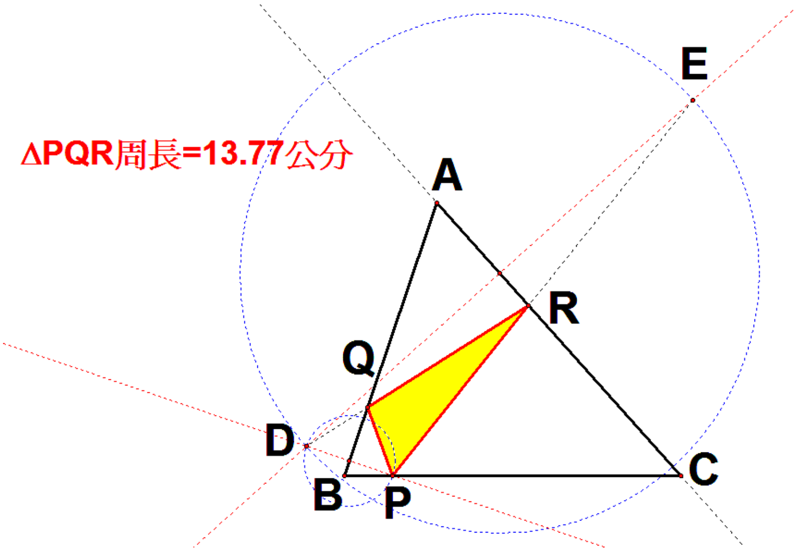
則 ΔPQR 即為所求。

（三）疑問

【疑問一】：移動 P 點，觀察內反射路徑存在嗎?其內反射路徑周長固定嗎?

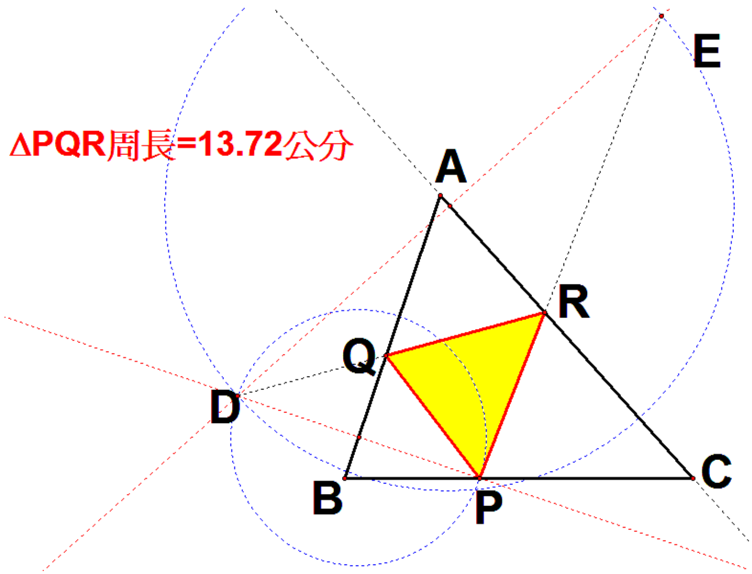
我們利用 GSP 移動 P 點時，內反射路徑不一定存在；且 P 點由 B 移到 C 的過程中，內反射路徑周長先由小變大，再變小。請參考下列各圖：

1.



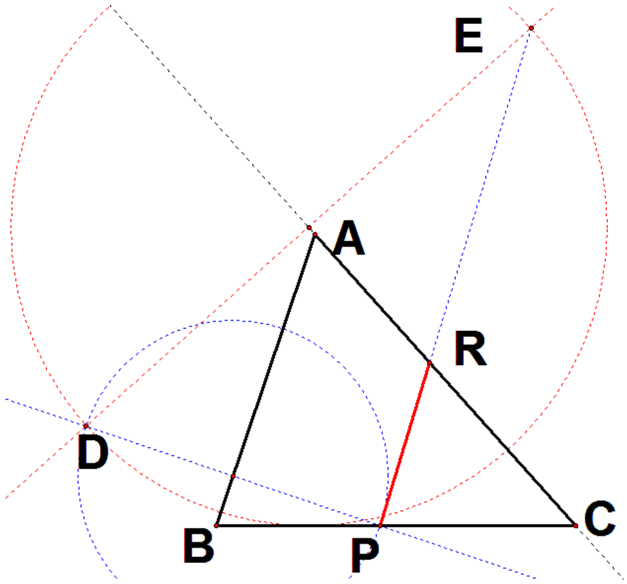
順時針內反射路徑存在。

2.



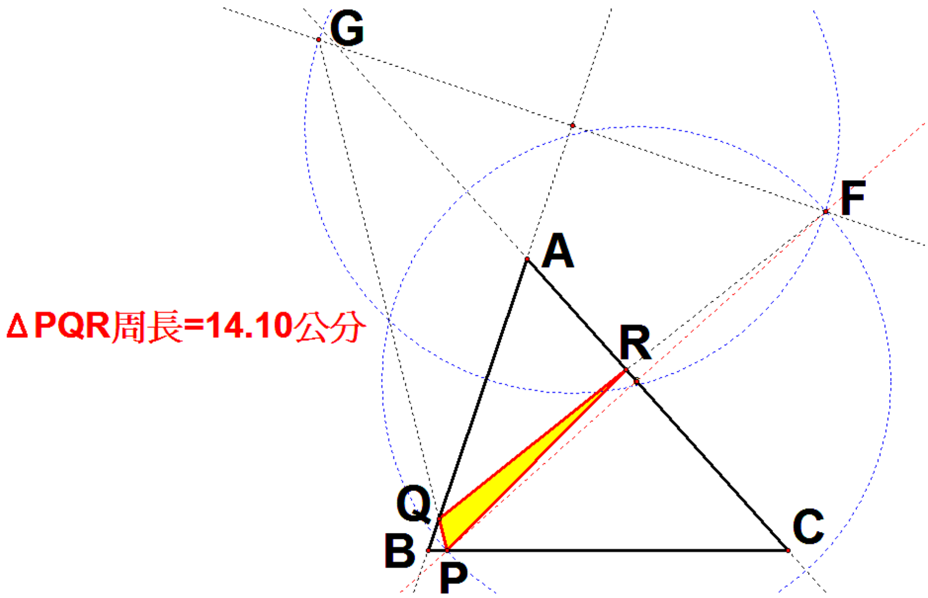
順時針內反射路徑存在。

3.



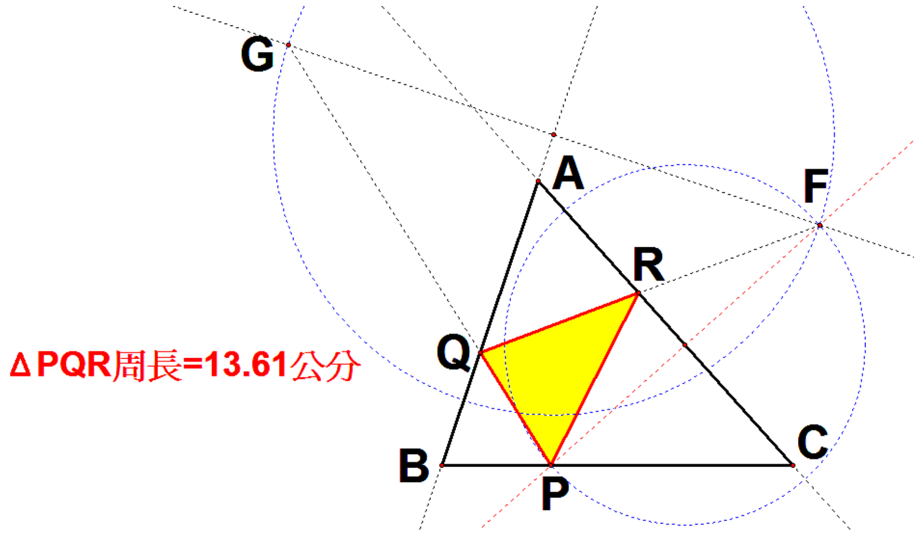
順時針內反射路徑不存在，因為$\overline{ED}$與$\overline{AB}$不相交。

4.



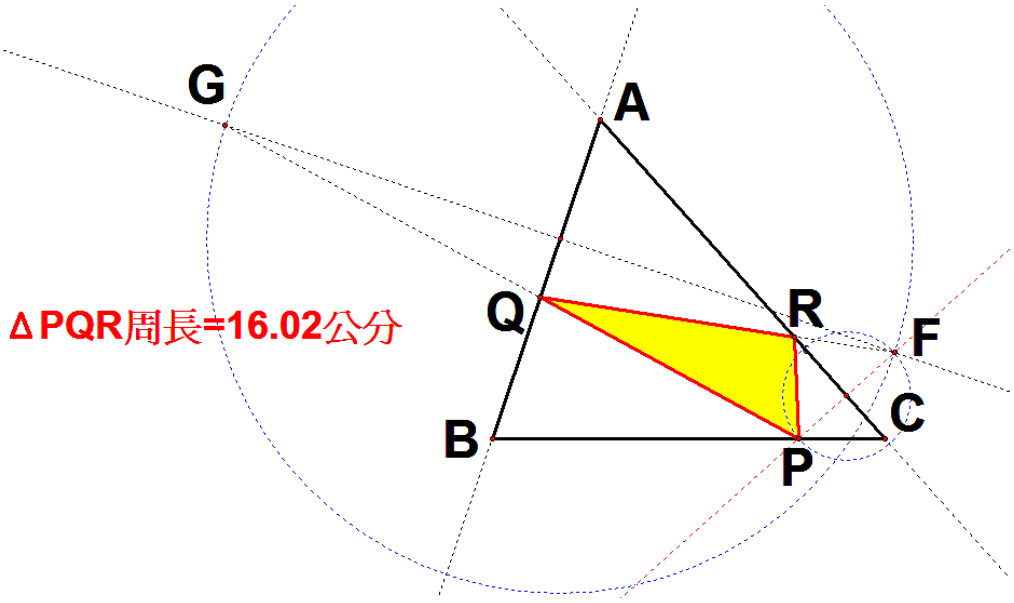
逆時針內反射路徑存在。

5.



逆時針內反射路徑存在。

6.



逆時針內反射路徑存在。

【疑問二】：改變 ΔABC 的形狀，內反射路徑存在嗎?其內反射路徑周長固定嗎?

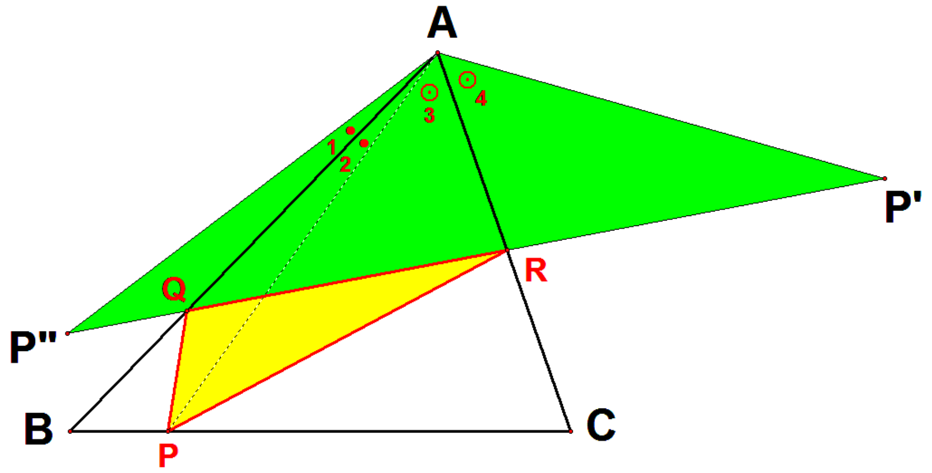
內反射路徑不一定存在；內反射路徑周長亦不固定。

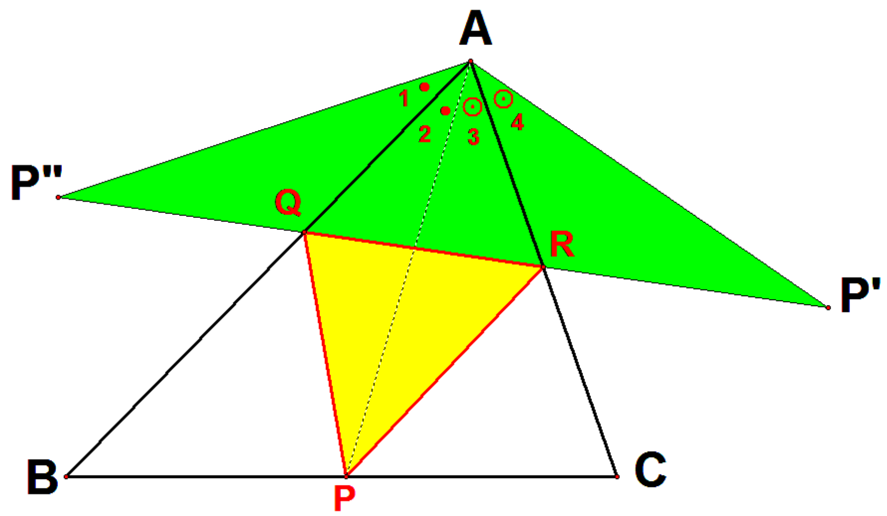
（四）：探討若 ΔABC 之內反射路徑存在時，何時最小？

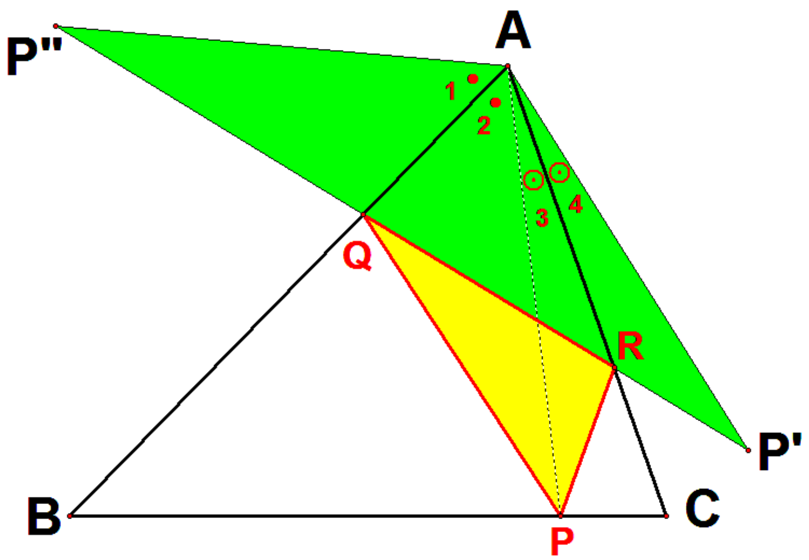
下面我們以直線 AC 為對稱軸，作 P 的對稱點 P'；以直線 AB 為對稱軸，作 P 的對稱點 P"

連 $\overline{P'P''}$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q、交 $\overline{AC}$ 於 R，並設 ΔABC 的三邊長 $\overline{AB}=c$ 、 $\overline{AC}=b$ 、 $\overline{BC}=a$

移動 P 點由 B 到 C，不管 P 點的位置如何，恆有以下事實：







1. $\angle P'AP'' = 2\angle BAC$：**是一個定值**

【證明】：根據對稱性，得 $\angle 1 = \angle 2$ 、 $\angle 3 = \angle 4$

$$\Rightarrow \angle P'AP'' = 2(\angle 2 + \angle 3) = 2\angle BAC$$

2. $\Delta P'AP''$是一個等腰三角形。($\overline{AP'}=\overline{AP''}$)

【證明】: 根據對稱性，得 $\overline{AP'}=\overline{AP}=\overline{AP''}$

3. 內反射 ΔPQR 的周長＝ $\overline{P'P''}$

【證明】: 根據對稱性，得 $\overline{PR}=\overline{P'R}$ 、 $\overline{PQ}=\overline{P''Q}$

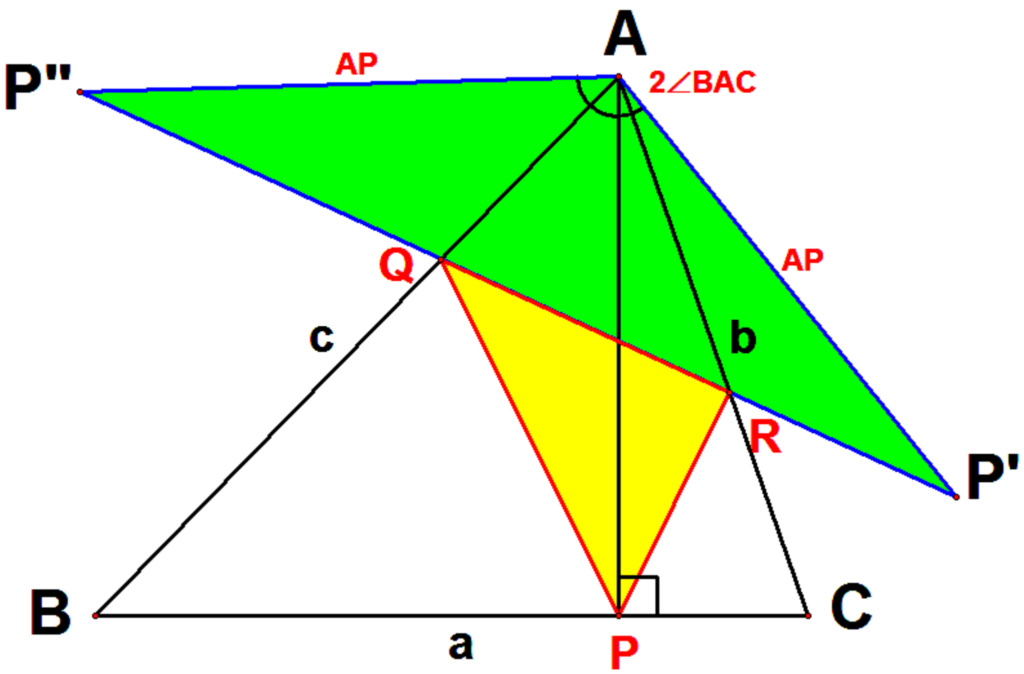
內反射 ΔPQR 的周長＝ $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P''Q}+\overline{QR}+\overline{P'R}=\overline{P'P''}$

4. 求 $\overline{P'P''}$ 的最小值：

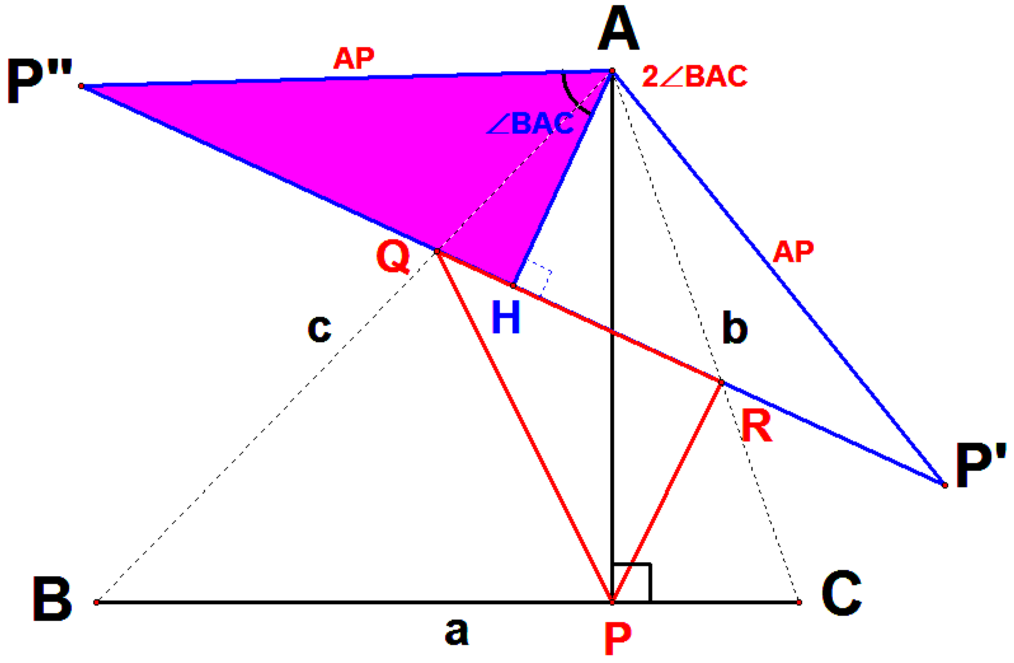
（1）由上面的證明可知：不管 P 點如何移動，$\Delta P'AP''$ 一定是一個等腰三角形，且頂角為 $2\angle BAC$，腰長為 $\overline{AP}$，而內反射三角形 PQR 的周長＝ $\overline{P'P''}$，正好是 $\Delta P'AP''$ 的底邊長。

因為頂角的大小固定，如果要讓底邊最短，只要讓腰長 $\overline{AP}$ 最短就可以了，

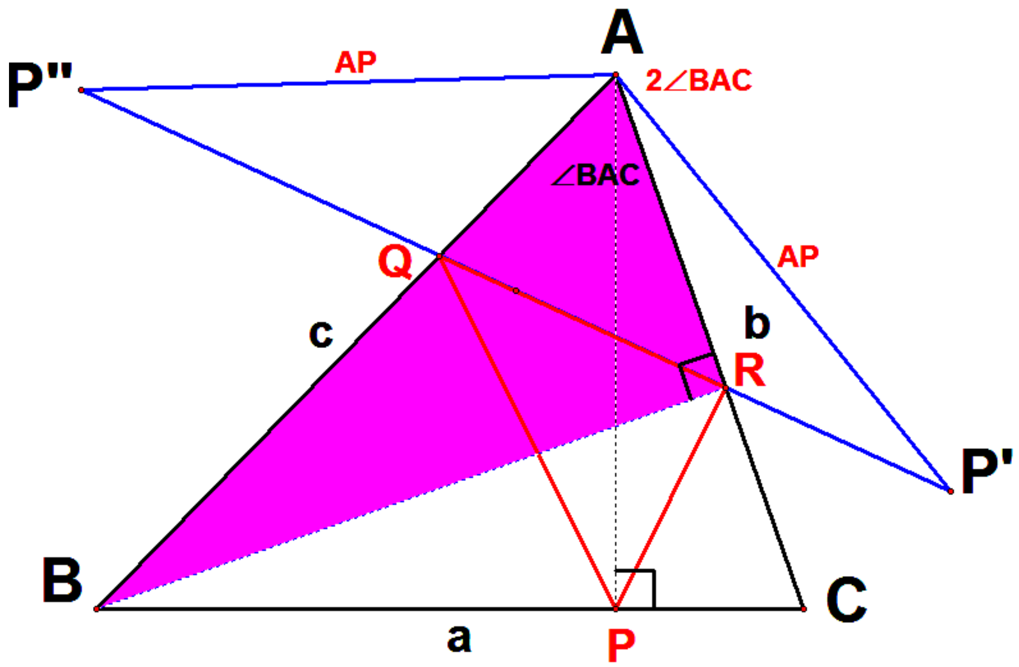
而 $\overline{AP}$ 要如何最短呢?只要取 $\overline{AP}\perp\overline{BC}$ 就好了。



（2）如下圖，作 $\overline{AH}\perp\overline{P'P''}$，則 $\angle P''AH=\frac{1}{2}\angle P'AP''=\angle BAC$



（3）如下圖，連 $\overline{BR}$ ，可得 $\overline{BR}\perp\overline{AC}$



可得 $\Delta ARB\sim\Delta AHP''\Rightarrow\overline{AB}:\overline{BR}=\overline{AP''}:\overline{HP''}$

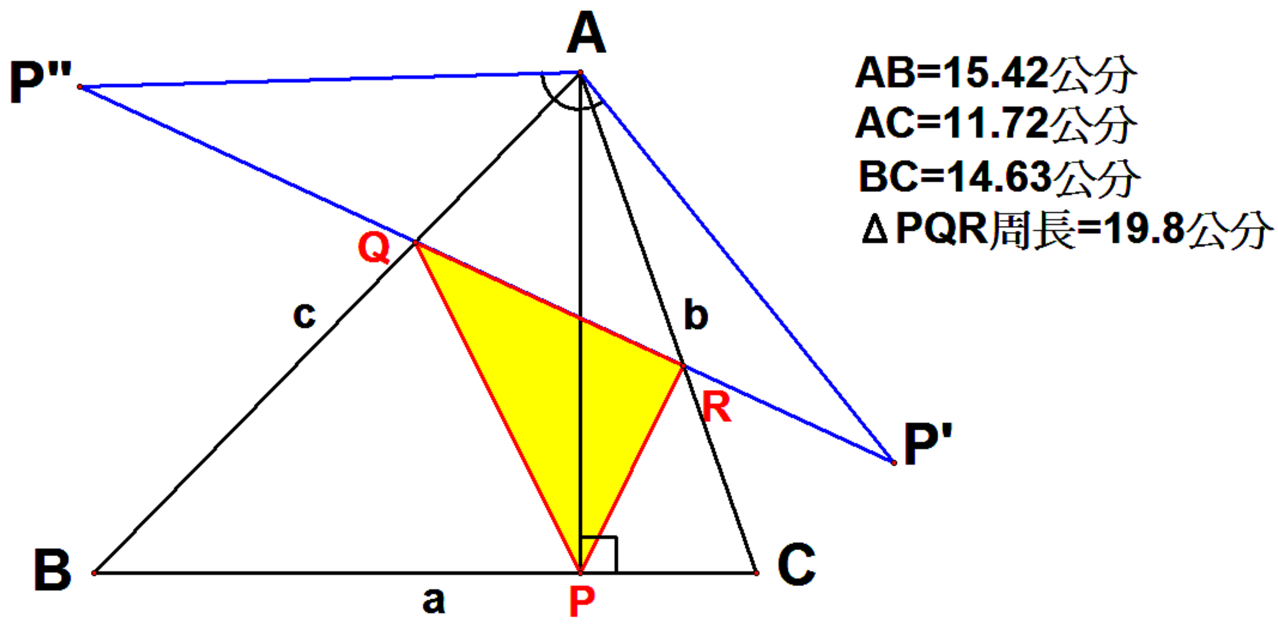
$$c:\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2b}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a}:\overline{P''H}$$

$$c\times\overline{P''H}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4ab}$$

$$\overline{\mathrm{P}''H}=\frac{(a+b+c)(\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{a})(a+\mathrm{c}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c})}{4abc}$$

$$\overline{\mathrm{P}'\mathrm{P}''}=2\overline{\mathrm{P}''H}=\frac{(a+b+c)(\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{a})(a+\mathrm{c}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c})}{2abc}$$

5.【驗證】用 GSP 量測功能

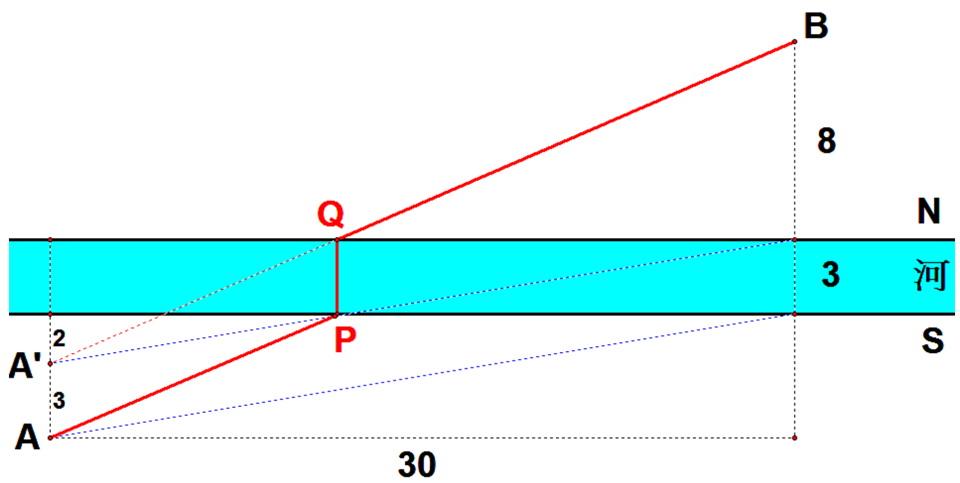


將 c＝15.42、b＝11.72、a＝14.63 代入上面公式，
得 ΔPQR 的周長為 19.79785342901…

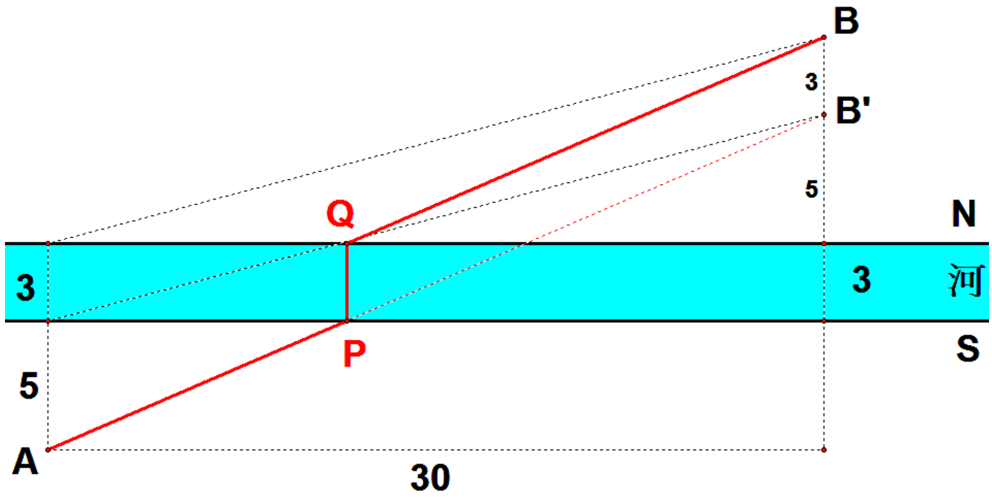
伍、研究結果：

一、河為一條時的搭橋原則：

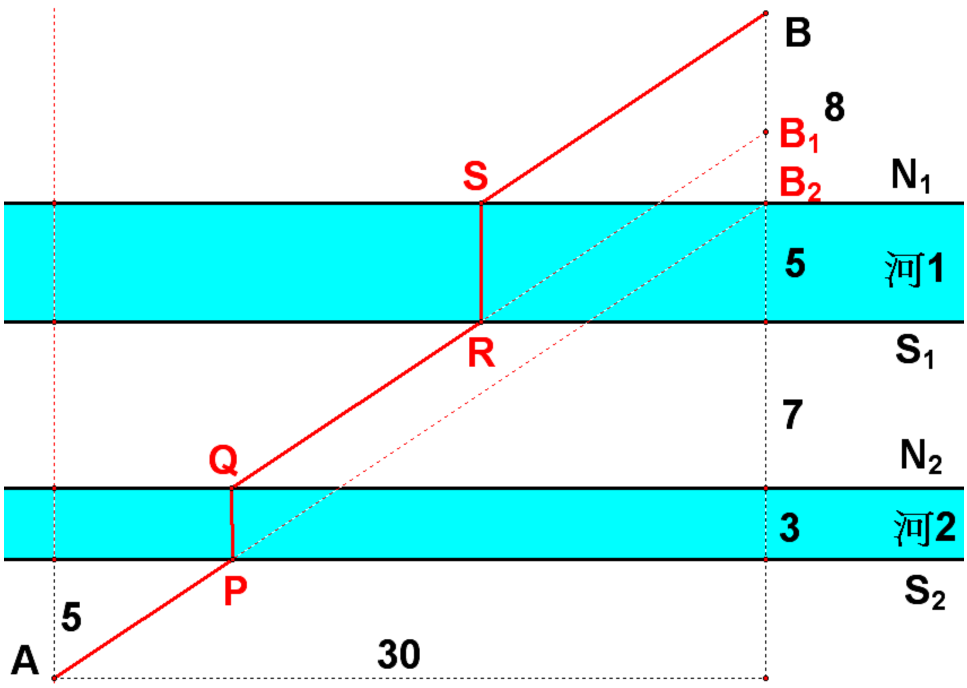
1.



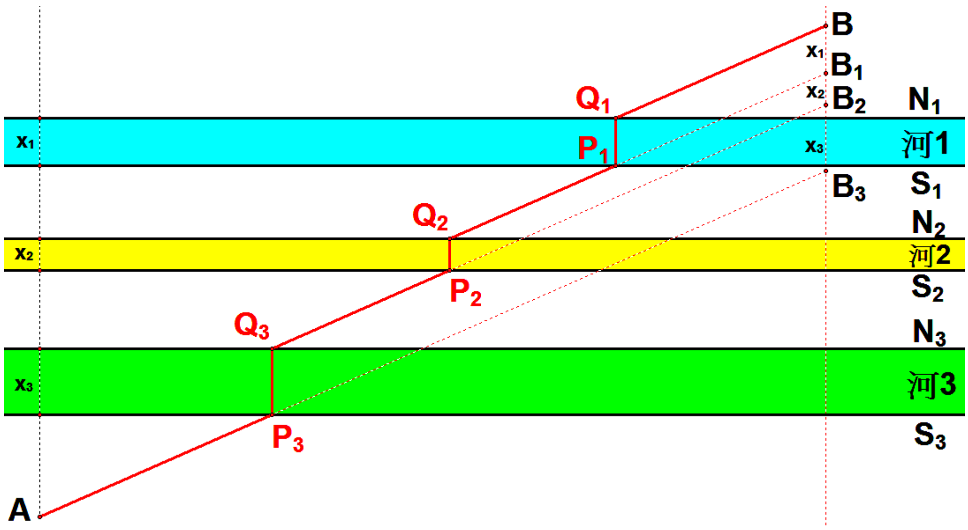
2.



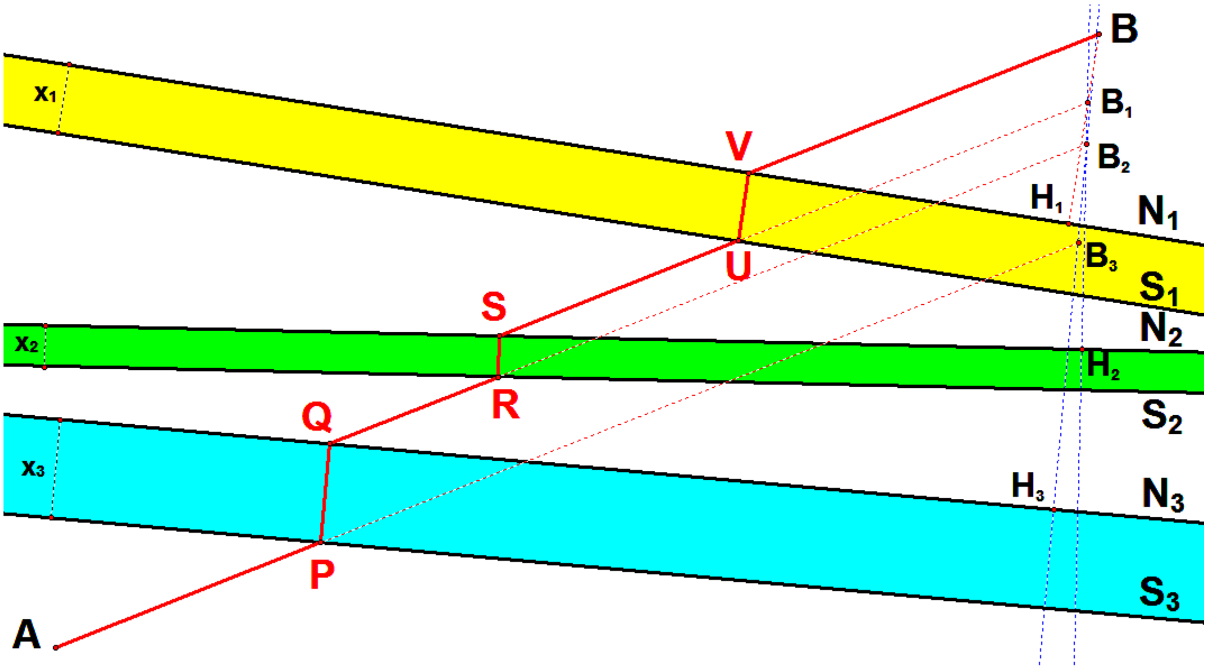
二、河為二條時的搭橋原則：



三、河為三條以上時的搭橋原則：(以三條為例)

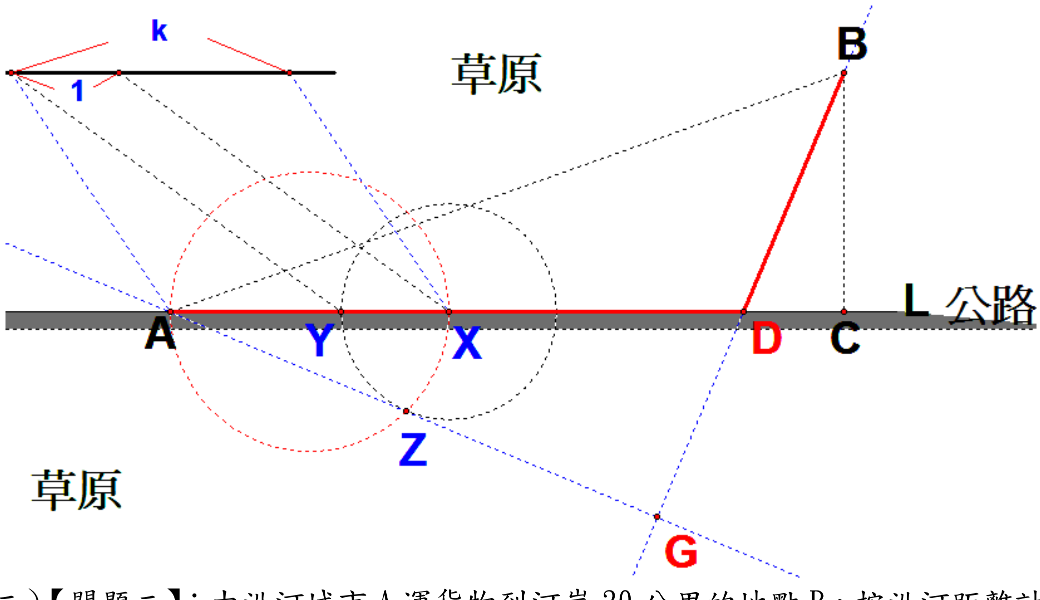


四、河與何不平行時的搭橋原則：（以三條為例）

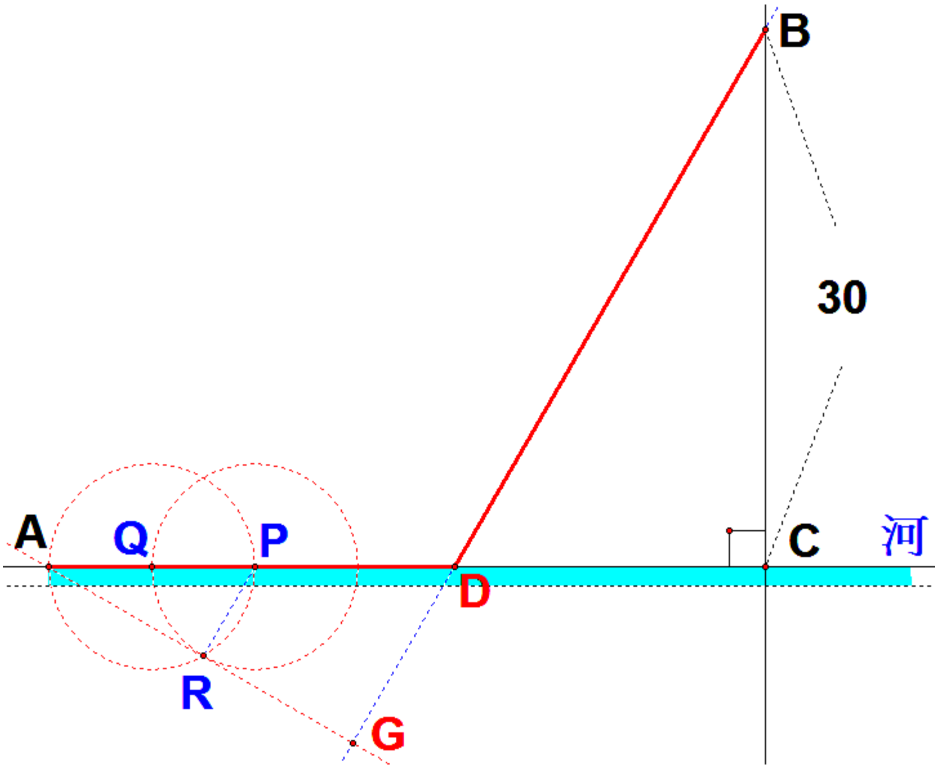


五、探討同時可以在河上和陸地上行駛但兩者速度不同時，應採取何種路徑才可以使所花的時間最短？或花費的運費最少？

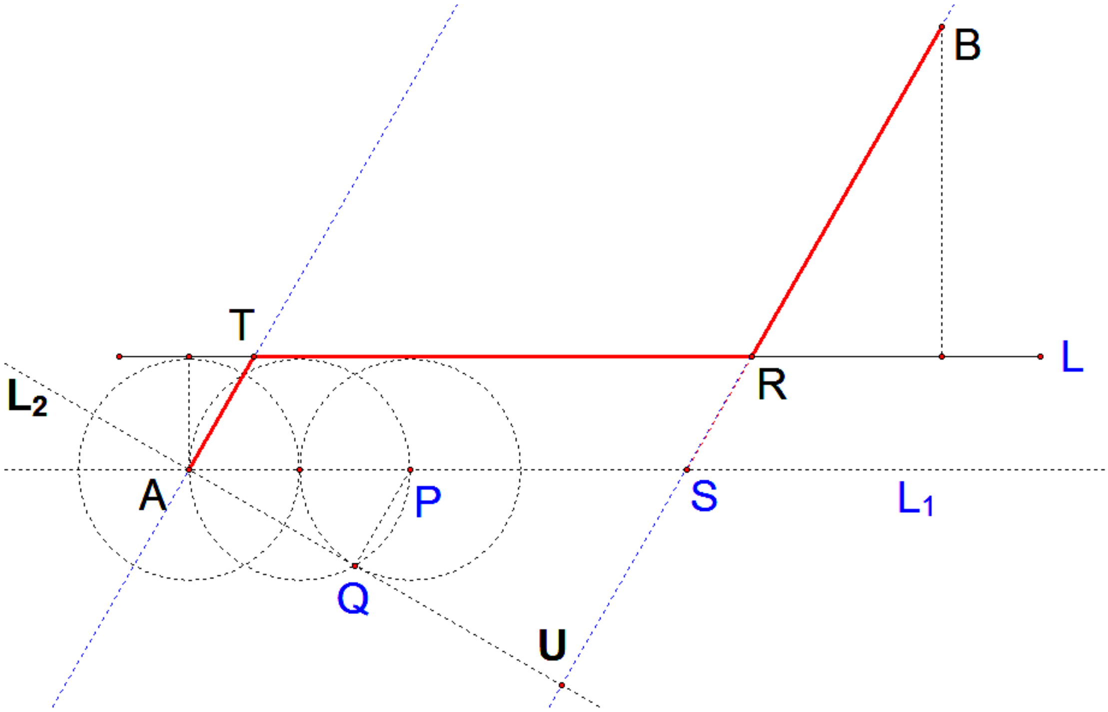
（一）【問題一】：一條筆直的公路 L 穿過草原，公路邊有一個衛生站 A，及不在公路邊的一個居民聚落 B，若開車要從衛生站送一批急救藥品到居民聚落 B，汽車在公路上的最快速度是在草地上的最快速度的 k 倍，問司機應以怎樣的行駛路線才能使他行車所用的時間最短？



（二）【問題二】：由沿河城市 A 運貨物到河岸 30 公里的地點 B，按沿河距離計算，B 離 A 的距離 $\overline{AC}$ 為 40 公里。如果水路運費是公路運費的一半，應該怎樣確定在河岸的 D 點，從 B 點築一條公路到 D，才能使由 A 到 B 的運費最少?



（三）【問題三】：一條筆直的公路 L 穿過草地，A、B 兩個居民點位於公路的兩側，某人駕車從 A 地到 B 地去，已知汽車在公路上的速度是草地上速度的 2 倍，問他的行駛路線如何才能使他行車所用的時間最少？

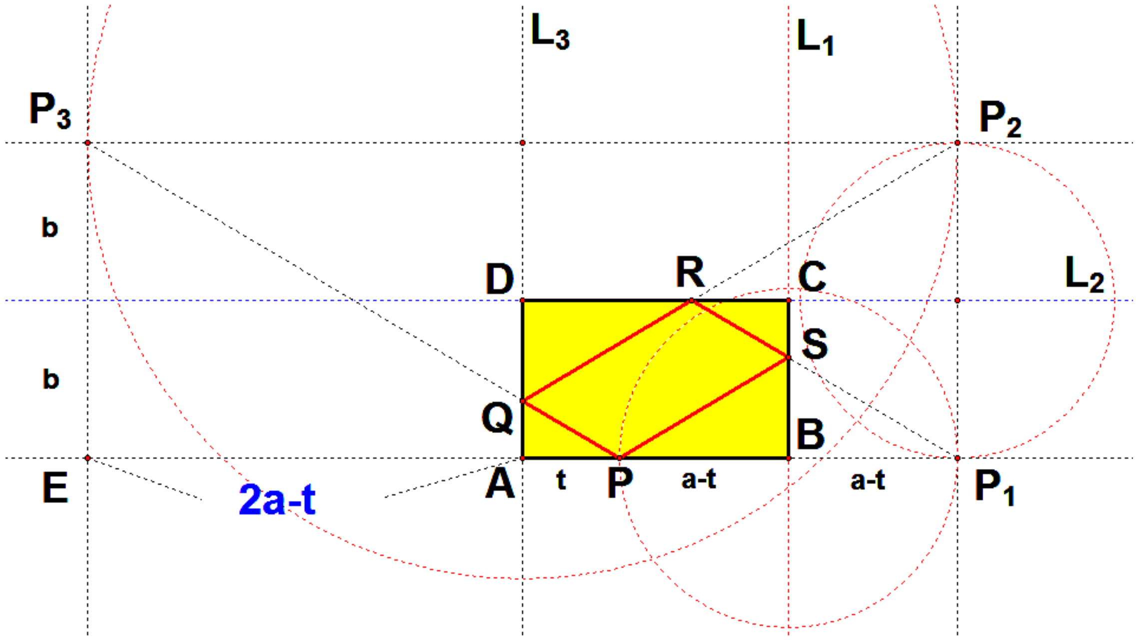


六、矩形內反射路徑的最短周長：

【問題】：如下圖，矩形 ABCD 中，$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，在 $\overline{AB}$ 上有一點 P，試在 $\overline{AD}$ 上取一點 Q、$\overline{DC}$ 上取一點 R、$\overline{CB}$ 上取一點 S，使 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$ 為最小；並求

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$ 的最小值。

1. 作法：



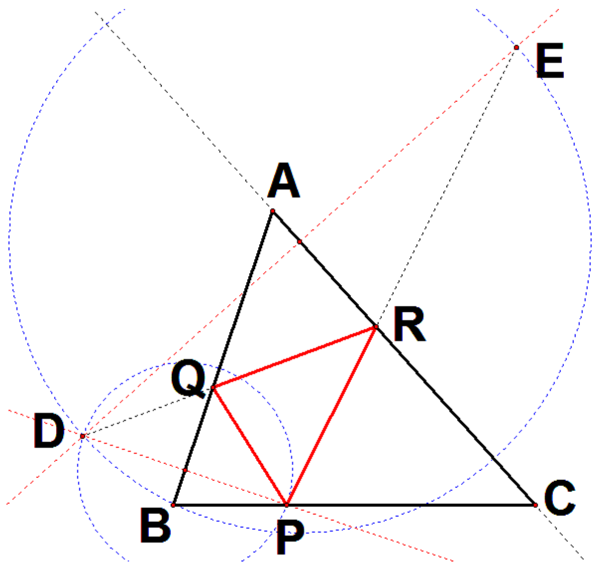
2. 最短周長＝$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$ 的最小值＝$2\sqrt{a^2+b^2}$（對角線的和）

七、三角形內反射路徑的最短周長：

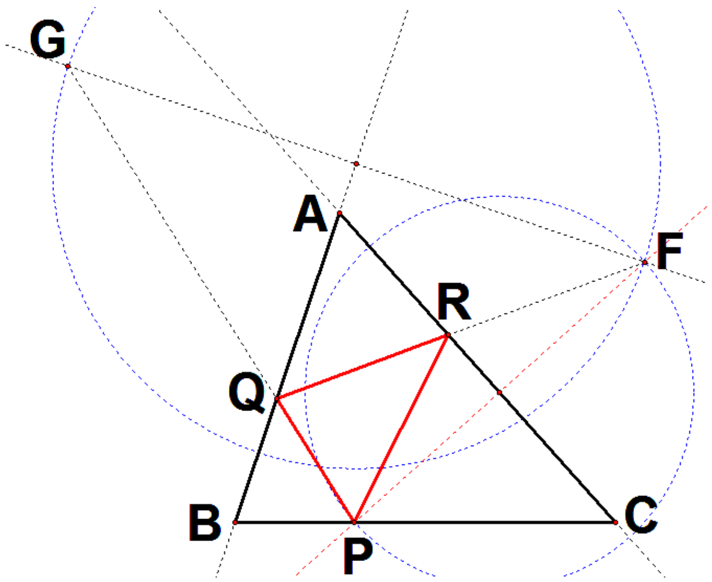
在 ΔABC 的 $\overline{BC}$ 邊上有一個 P 點，試在 $\overline{AB}$ 上取一點 Q，$\overline{AC}$ 上取一點 R，使 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 為最小；並求 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 的最小值。

1. 內反射三角形作法：

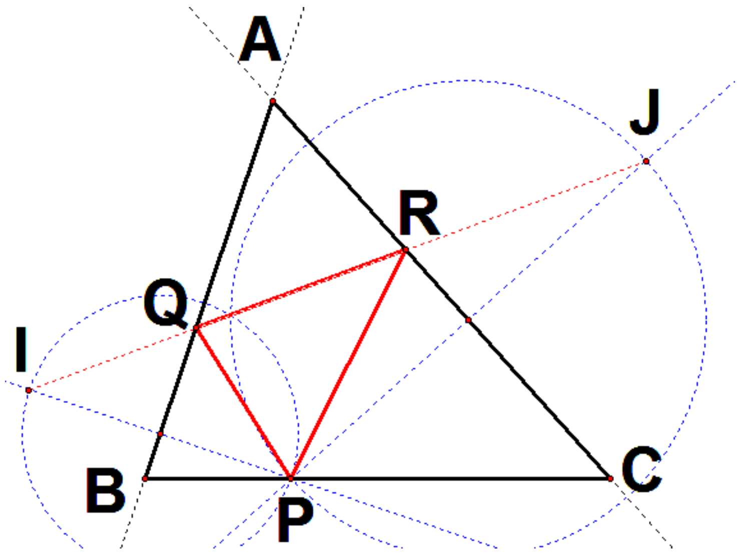
（1）



（2）



（3）



2. 移動 P 點，觀察內反射路徑存在嗎?其內反射路徑周長固定嗎?

移動 P 點時，內反射路徑不一定存在；且 P 點由 B 移到 C 的過程中，內反射路徑周長先由小變大，再變小。

3. 改變 ΔABC 的形狀，內反射路徑存在嗎?其內反射路徑周長固定嗎?

內反射路徑不一定存在；內反射路徑周長亦不固定。

4. 若 ΔABC 之內反射路徑存在時，何時最小？

設 ΔABC 的三邊長 $\overline{AB}=c$ 、 $\overline{AC}=b$ 、 $\overline{BC}=a$

內反射路徑的最短周長＝$\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}$

柒、參考資料：

1. 陳冒海主編－國中數學第四冊－民國 101 年 2 月再版－出版地:台灣－南一書局出版－P38~200－民國 101 年 2 月出版

2. 陳惠民編著—國中資優數學第 4 冊—出版地:台灣—華普學生文摘出版—P44、45、104、105、122
3. 張奠宙、戴再平主編—用國中數學解日常生活中的問題—2004 年 12 月一版二刷—出版地：台灣—九章出版社出版－2004 年 12 月出版
4. 嚴鎮軍主編—初中數學競賽教程—1995 年 10 月初版二刷—出版地：台灣—九章出版社出版—P306－1995 年 10 月出版
5. 趙文敏著—幾何學概論—民國 77 年 10 月 2 版—出版地：台灣—九章出版社出版—P130~131－民國 77 年 10 月出版
6. 沈康身著—歷史名題賞析 3—2010 年 11 月初版一刷—出版地：台灣—稻田出版社出版—2010 年 11 月出版