作品名稱：與 GSP 談『心』

摘要：

本研究從三角形的五『心』出發，藉著改變一些條件，尋找是否有某些點亦具有類似三角形五『心』的性質，暫且可以把它們看作是三角形五『心』的兄弟姐妹們。一開始，三角形的五『心』好像是各自獨立的主題，但是經過這次的研究，發現它們彼此又互相關聯。例如：**『內心』和『傍心』都是與三角形三邊等距離的點，『內心』在三角形內部，而『傍心』則在三角形外部**；又如**要證明『垂心』存在時，可以利用『外心』來證明，證完之後又發現這個點又成了另一個三角形的『內心』**；再如從**『重心』聯想到要作三角形面積切割時，卻可以利用『角平分線』作圖來求得**等等。

另外，本研究特別著重在利用 GSP 輔助作圖，為了讓評審老師方便閱讀計算或證明的過程，本說明書會將一個圖分解成數個圖安排到各段落中，希望可以讓評審老師更容易找到各段落的重點，但也因此多了很多篇幅，希望不會造成評審老師的困擾。

用到的概念或公式：

除了課本提到的『三角形五心』的概念及相關的概念或公式（如：比例、相似形、平行線截比例線段）之外，本研究經常用到『三角形的面積公式－海龍公式』:

若 ΔABC 的三邊長分別為 a、b、c，

則 ΔABC 的面積 $=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$　（推導過程詳見『附錄』）

壹、研究動機：

在學到有關三角形『外心』的概念時，老師舉了一個例子：「**有 A、B、C 三戶人家，為了不要每天到河邊挑水，決定要打井取水，打井費用要 600 萬（很誇張吧！），可是每戶人家只有 200 萬，因此他們決定共打一口井，但是井的位置必須打在離三戶人家距離相等的地方（這樣才公平），請問：井的位置應該打在什麼地方？**」，因為三家所出的金額相同，所以井到三家的距離也要相等；可是如果三家出的打井費不同，比如說甲家出 100 萬元、乙家出 200 萬元、丙家出 300 萬元，因為丙家出的錢較多，當然可以要求距離丙家短一點，於是我們問老師，如果到三家的距離都不同時，井的位置應該在什麼地方？老師被我們一問，一時也不知道如何解決，便說：「好問題，你們何不自己研究一下呢？」後來老師教到三角形的『內心』和『重心』時，我們也想到如果把條件做一點改變時，答案又會變得如何呢？剛好老師教我們使用 GSP 來幫助課程的學習，於是我們想到可不可以利用 GSP 來幫助我們研究，因此在老師的指導下，我們展開對三角形『心』世界的相關探討。

貳、研究目的：

一、三角形『外心』的延伸探討。
二、三角形『內心』的延伸探討。
三、三角形『重心』的延伸探討。

四、三角形『垂心』的延伸探討。

五、三角形『傍心』的延伸探討。

叁、研究設備與器材：

計算紙、計算機、文具、電腦、GSP 軟體、參考書籍。

肆、研究方法與過程：

一、三角形『外心』的延伸探討：

（一）問題：如果三家分攤的打井費，甲家出 100 萬元、乙家出 200 萬元、丙家出 300 萬元，井的位置距離各家的『距離』與『出的金錢』成『反比』，也就是距離甲、乙、丙三家的距離比為 $\frac{1}{100,0000}:\frac{1}{200,0000}:\frac{1}{300,0000}=6:3:2$

（二）研究過程：

1. 若分別將甲、乙、丙三家及井的位置用 A、B、C 及 P 表示。本題的意思就是：『當 A、B、C 為定點，P 為動點時，則符合 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=6:3:2$ 時，P 的位置存在嗎？在何處？』可以用 GSP 軟體找出來嗎？
2. 我們在 GSP 上任意設定 A、B、C 三點，移動 P，利用 GSP 度量的功能，雖然可以『大約』找到 P 的位置，可是如何確定是我們的答案呢?
3. 於是我們先將問題簡化，思考：『在平面上，如果 $\overline{PA}:\overline{PB}=6:3$（也就是 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$）時，P 點在何處？』

   如下圖（圖 1），我們利用畫『同心圓』的方法，可以發現『符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ 的 P 點，不只一個，而且似乎形成一個圖形。到底是什麼圖形呢？』

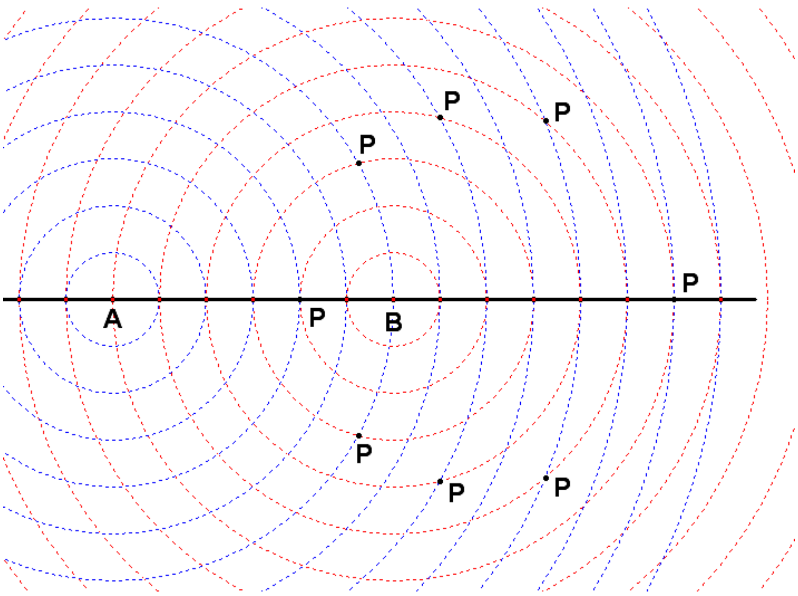

圖 1

4. 用代數的方法解出點 P 的『軌跡方程式』：若令 A 的座標為（0，0）、B 的座標為（k，0）、P 的座標為（x，y），其中 $k>0$

$\because \overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ $\therefore \sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-k)^2+y^2}=2:1$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x-k)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ 兩邊平方

$\Rightarrow 4[(x-k)^2+y^2]=x^2+y^2$ $\Rightarrow 4x^2-8kx+4k^2+4y^2=x^2+y^2$

$\Rightarrow 3x^2-8kx+3y^2+4k^2=0$ $\Rightarrow x^2-\frac{8}{3}kx+y^2=-\frac{4}{3}k^2$

$\Rightarrow (x^2-\frac{8}{3}kx+\frac{16}{9}k^2)+y^2=-\frac{4}{3}k^2+\frac{16}{9}k^2$ $\Rightarrow (x-\frac{4}{3}k)^2+y^2=\frac{4}{9}k^2$

$\Rightarrow (x-\frac{4}{3}k)^2+y^2=(\frac{2}{3}k)^2$ …………（圓方程式的特徵）

圓心為$(\frac{4}{3}k$ ，0)；半徑為$\frac{2}{3}k$

5. 一般情形：探討『若 A 的座標為（0，0）、B 的座標為（k，0），符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:1$ 的 P 點形成什麼圖形呢？（其中 $k>0$ 、 $m>0$ ）』

（m＝1 時，p 點形成 $\overline{AB}$ 的中垂線）

（1）當 $m>1$ 當，假設 P 點座標為（x，y），

$\because \overline{PA}:\overline{PB}=m:1$ $\therefore \sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-k)^2+y^2}=m:1$

$\Rightarrow m\sqrt{(x-k)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

兩邊平方： $m^2(x^2-2kx+k^2+y^2)=x^2+y^2$

$\Rightarrow m^2x^2-2m^2kx+m^2k^2+m^2y^2=x^2+y^2$

$\Rightarrow (m^2-1)x^2-2m^2kx+(m^2-1)y^2+m^2k^2=0$

同除以（ m^2-1 ），然後配方

$\Rightarrow [x^2-\frac{2m^2k}{m^2-1}x+(\frac{m^2k}{m^2-1})^2]+y^2=-\frac{m^2k^2}{m^2-1}+(\frac{m^2k}{m^2-1})^2$

$\Rightarrow (x-\frac{m^2k}{m^2-1})^2+y^2=(\frac{mk}{m^2-1})^2$ …………（圓方程式的特徵）

圓心為$(\frac{m^2k}{m^2-1}$ ，0)；半徑為$\frac{mk}{m^2-1}$

（2）當 $0<m<1$ 當

$\because \overline{PA}:\overline{PB}=m:1$ $\therefore \overline{PA}:\overline{PB}=m\times\frac{1}{m}:1\times\frac{1}{m}=1:\frac{1}{m}$

$\Rightarrow \overline{PB}:\overline{PA}=\frac{1}{m}:1(\frac{1}{m}>1)$ 只要將 A、B 互換就可以。

6、在確定圖形為『圓形』之後，我們想辦法把圓畫出來。從前面的計算中，可以得知：圓心必定是在直線 AB 上，所以直線 AB 為此圓的對稱軸。

因此符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:1$ 的 P 點，落在直線 AB 上的就是此圓的直徑的端點。

如果我們可以將它們找出來就可以畫出此圓了。

7、尺規作圖：

A、B 為兩定點，P 為直線 AB 上的動點，符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:1\ (m>1)$ 的 P 點位置為何？

（1）

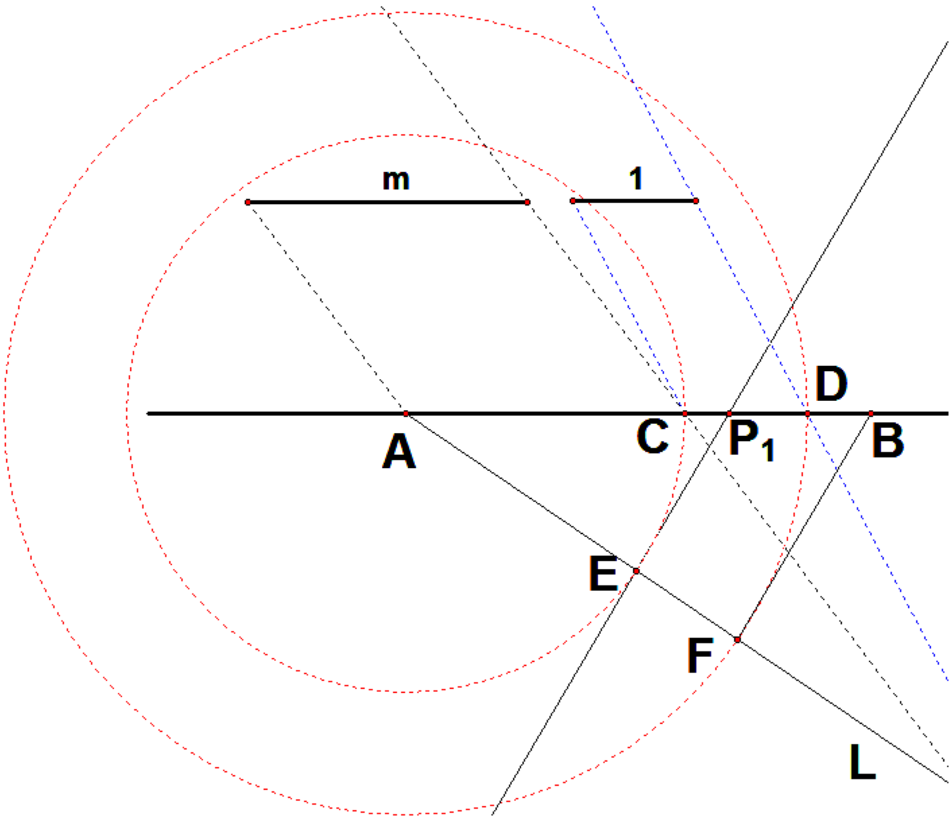

圖 2

[作法]：（Ⅰ）在直線 AB 上取 $\overline{AC}=m$ 、$\overline{CD}=1$。

（Ⅱ）過 A 點任做一直線 L，並取 E、F 點，使 $\overline{AE}=m$ 、$\overline{EF}=1$。

（Ⅲ）連 $\overline{BF}$，做 $\overline{EP_1}//\overline{BF}$ 且交 $\overline{AB}$ 於 P_1。

（Ⅳ）P_1 即為 $\overline{AB}$ 上符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:1\ (m>1)$ 的點。

(2)

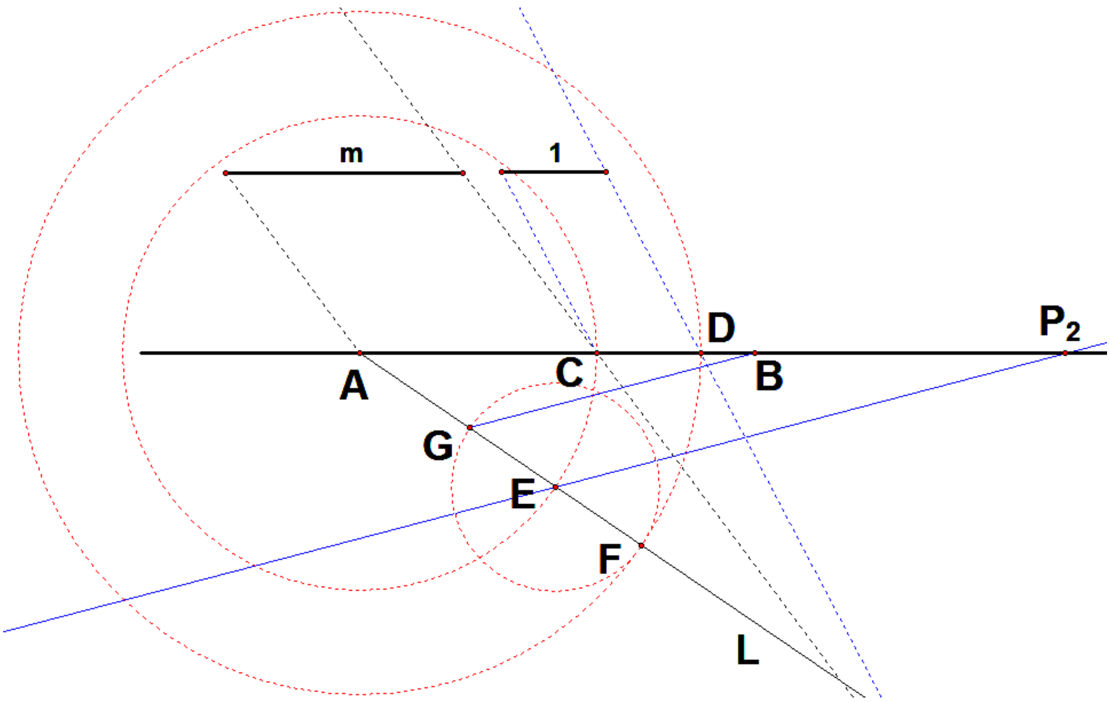

圖 3

[作法]:(Ⅰ)在直線 AB 上取 $\overline{AC}=m$ 、$\overline{CD}=1$。

(Ⅱ)過 A 點任做一直線 L,並取 E、F、G 點,使 $\overline{AE}=m$、$\overline{EF}=\overline{EG}=1$。

(Ⅲ)連 $\overline{BG}$,做 $\overline{EP_2}//\overline{BG}$ 且交直線 AB 於 P_2。

(Ⅳ)P_2 也是直線 AB 上符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:1\ (m>1)$ 的點。

8、尺規作圖：

A、B 為兩定點，P 為直線 AB 上的動點，符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:1\ (0<m<1)$ 的點 P 位置為何？

（1）

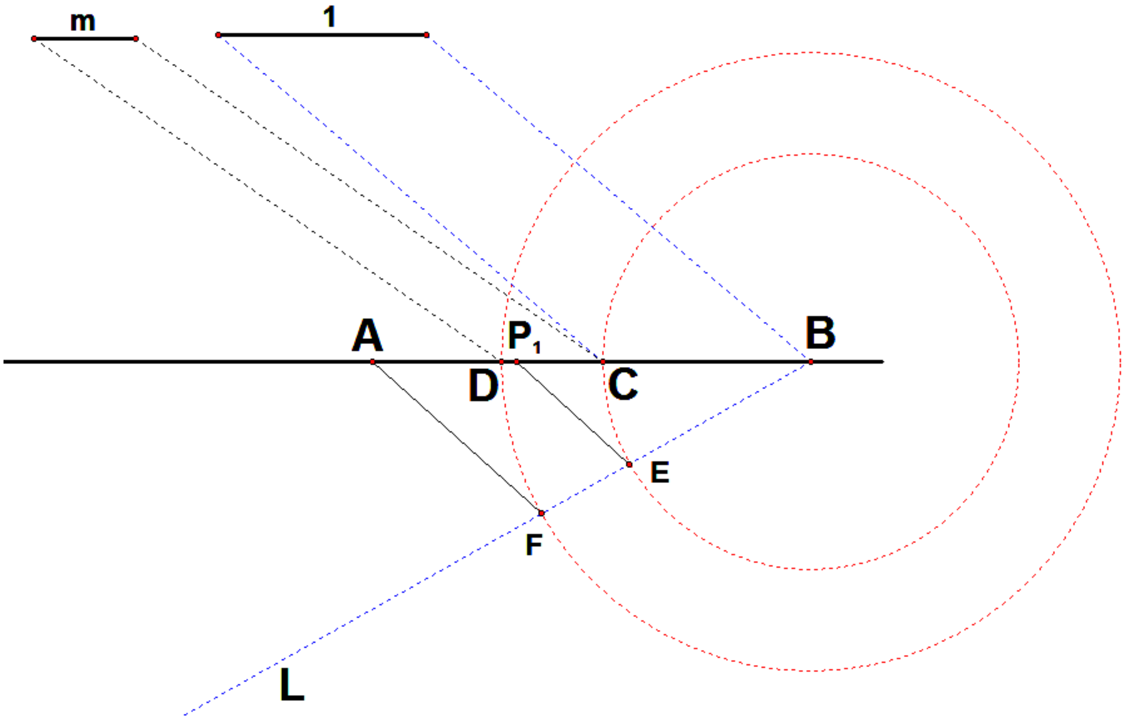

圖 4

［作法］：（Ⅰ）在直線 AB 上取 $\overline{BC}=1$、$\overline{CD}=m$ 。

（Ⅱ）過 B 點任做一直線 L，並取 E、F 點，使 $\overline{BE}=1$ 、$\overline{EF}=m$ 。

（Ⅲ）連 $\overline{AF}$ ，做 $\overline{EP_1}//\overline{AF}$ 且交 $\overline{AB}$ 於 P_1 。

（Ⅳ）P_1 即為 $\overline{AB}$ 上符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:1\ (m<1)$ 的點。

(2)

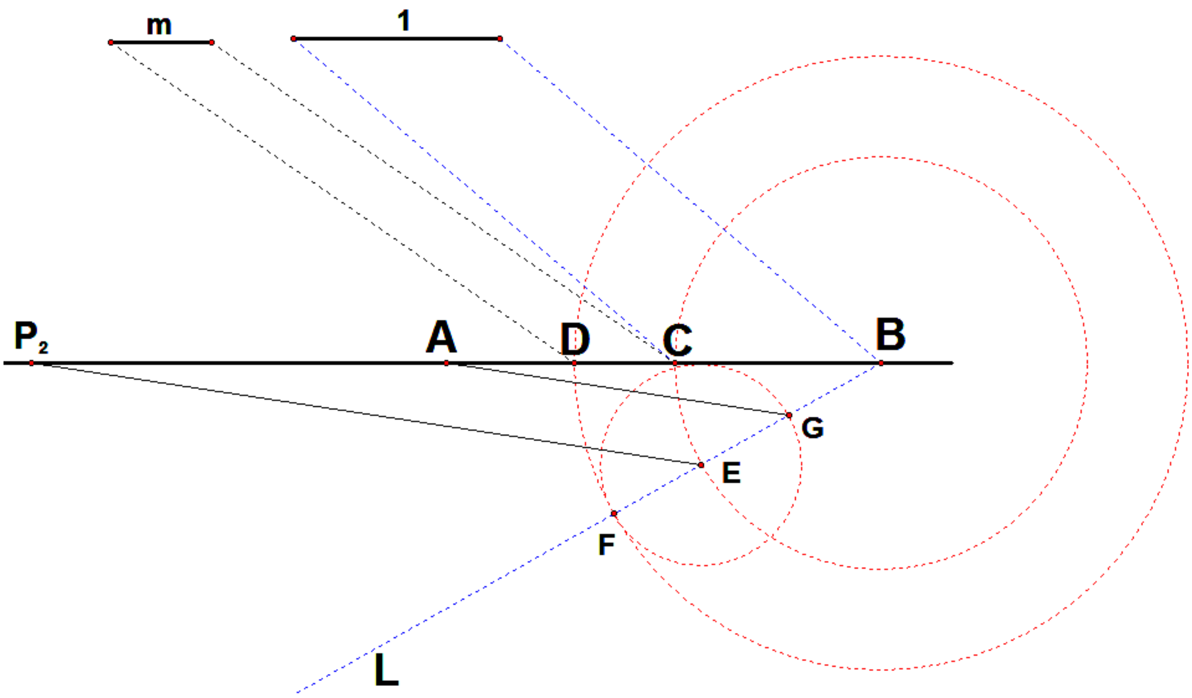

圖 5

[作法]：(Ⅰ) 在直線 AB 上取 $\overline{BC}=1$、$\overline{CD}=m$ 。

(Ⅱ)過 B 點任做一直線 L，並取 E、F、G 點，使 $\overline{BE}=1$、$\overline{EF}=\overline{EG}=m$。

(Ⅲ) 連 $\overline{AG}$ ，做 $\overline{EP_2}//\overline{AG}$ 且交直線 AB 於 P_2 。

(Ⅳ) P_2 也是直線 AB 上符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:1\ (m<1)$ 的點。

9、回到原問題：A、B、C 為平面上三點，使 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=6:3:2$ 的 P 點在何處？

（1）$\overline{PA}:\overline{PB}=6:3=2:1$

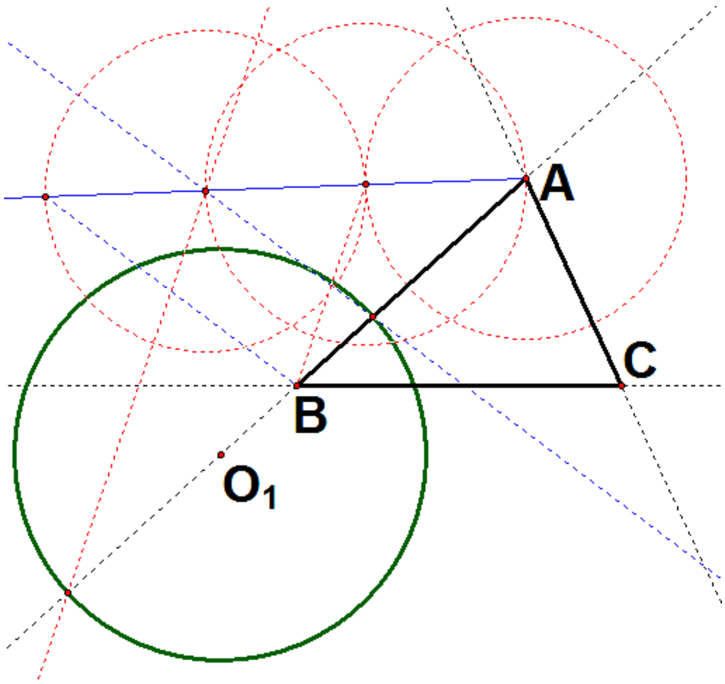

圖 6

［作法］：參考前面的作圖法

上圖中，圓 O_1 即為所求。

（2）$\overline{PB}:\overline{PC}=3:2$

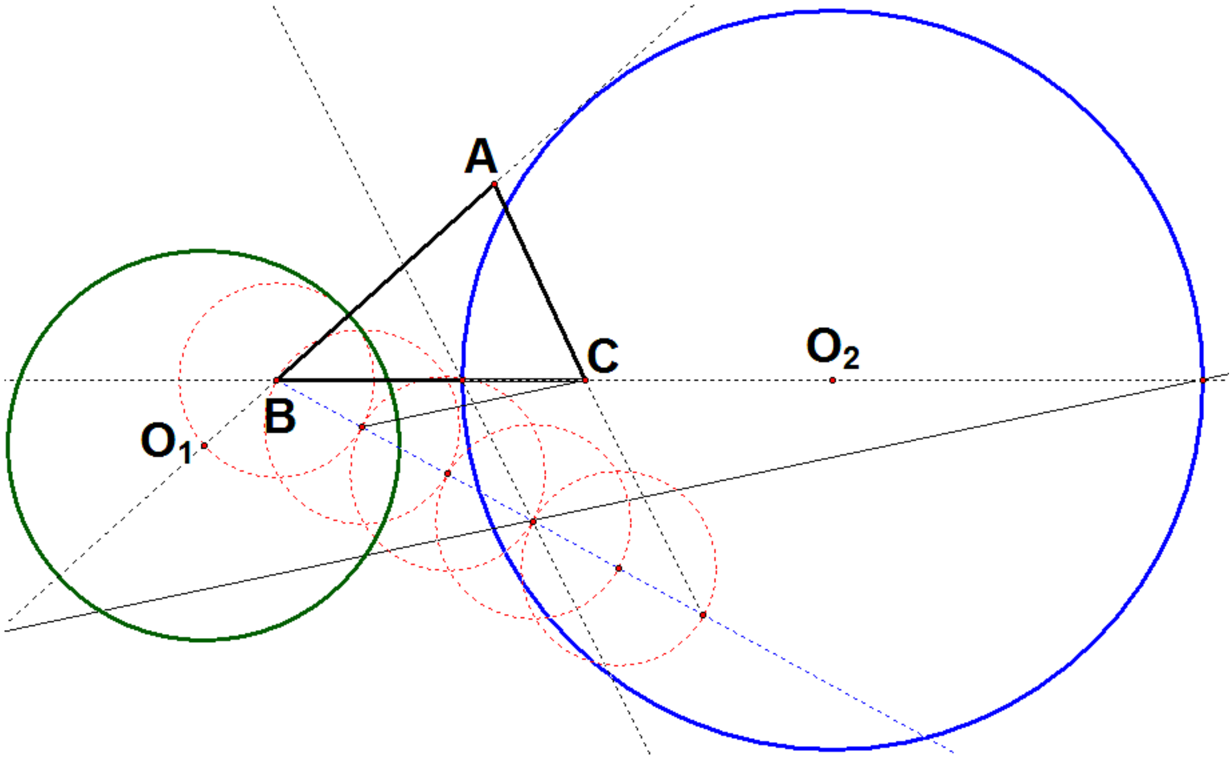

圖 7

［作法］：參考前面的作圖法

上圖中，圓 O_2 即為所求。

（3）$\overline{PA}:\overline{PC}=6:2=3:1$

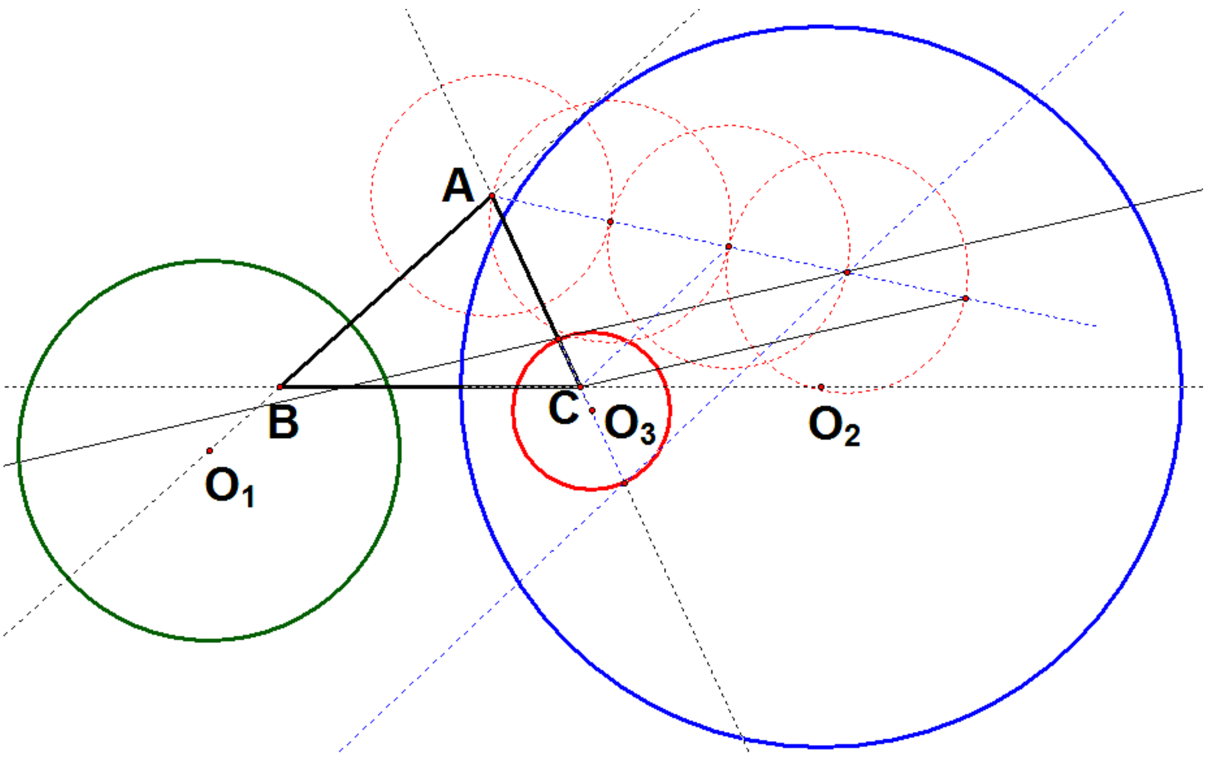

圖 8

[作法]：參考前面的作圖法

上圖中，圓 O_3 即為所求。

（4）A、B、C 為平面上三點，使 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=6:3:2$ 的 P 點在何處？

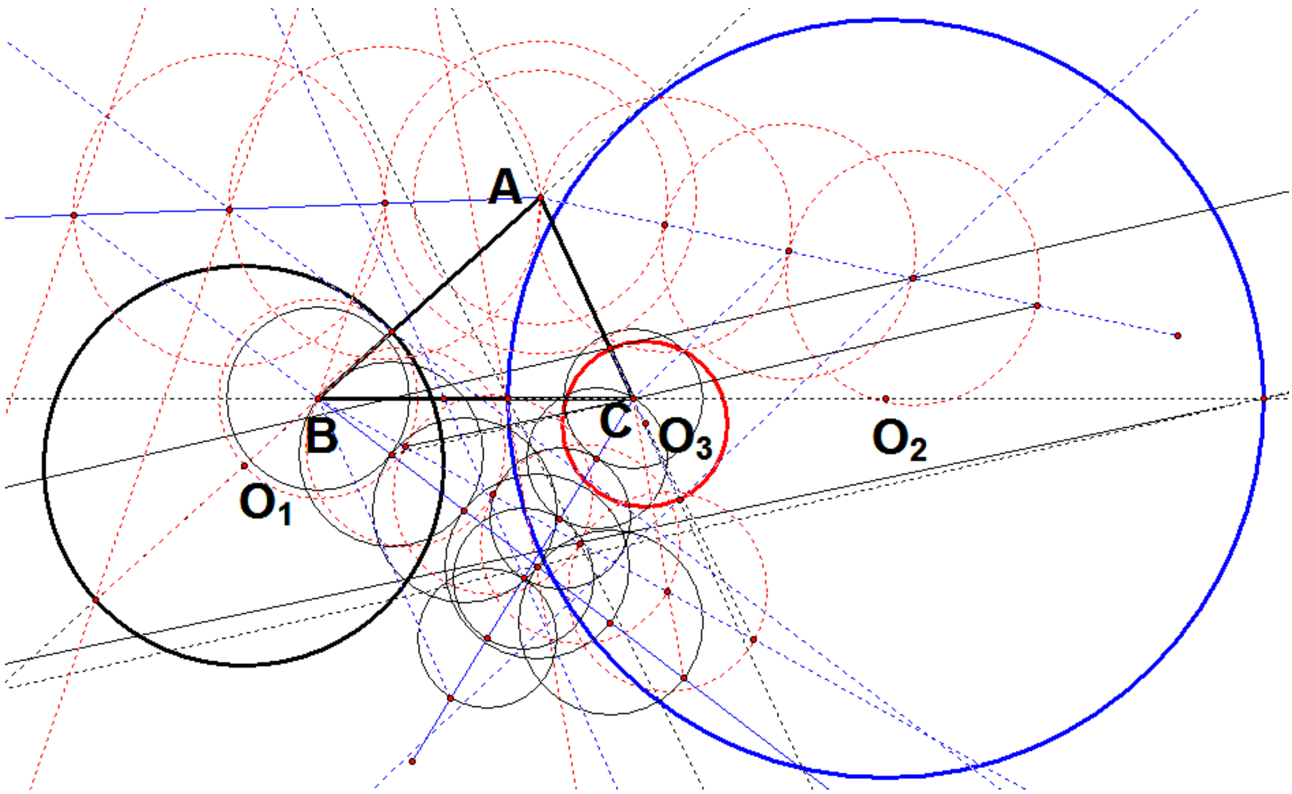

圖 9

[作法及說明]：(Ⅰ) 將 (1)、(2)、(3) 所得的圖全部呈現就是本題的圖形。

(Ⅱ) 由於上圖中圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 沒有交點，所以，若 A、B、C 三點如上圖的位置時，符合 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=6:3:2$ 的 P 點是找不到的。

(Ⅲ) 上圖中，我們特別呈現作圖時的痕跡，可以看出作圖的過程。

10、一般情況下解的討論：因為共可以得到三個圓，隨著 A、B、C 的位置不同，三個圓可能有共同點，也可能沒有，P 點是三個圓的共同點，還是只要兩個圓的交點即可呢？

經 GSP 的操作及討論，只要 P 是兩個圓的交點即可，因為若 P 點為某兩圓的交點時，則第三個圓必過此點。說明如下：

（1）

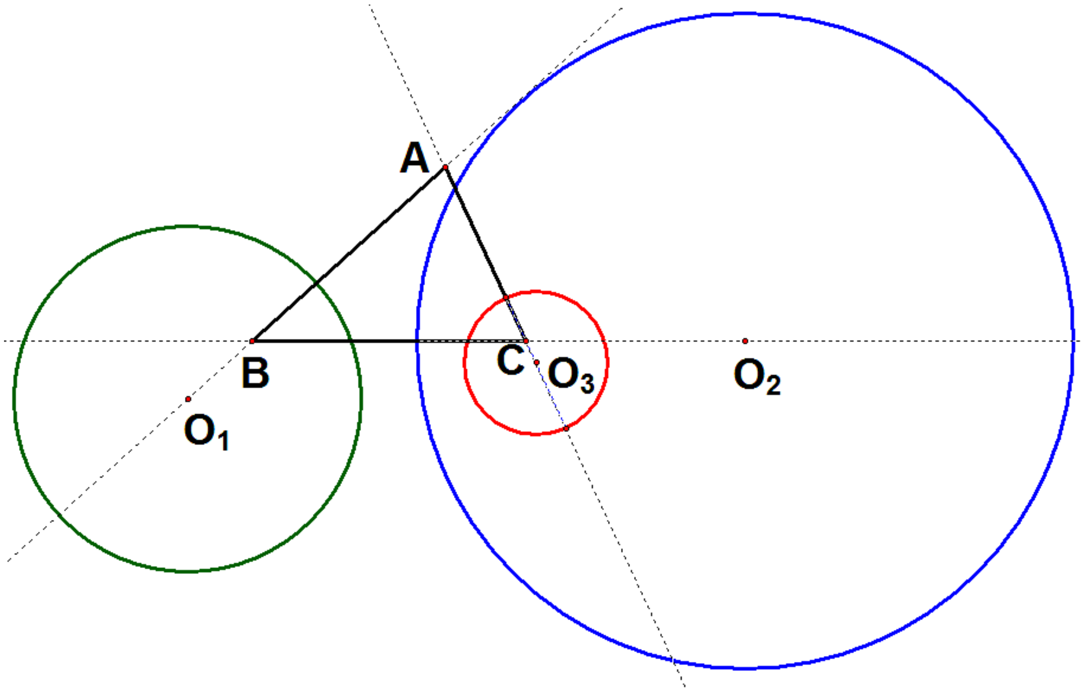

圖 10

本小題很明顯：無解。

（2）

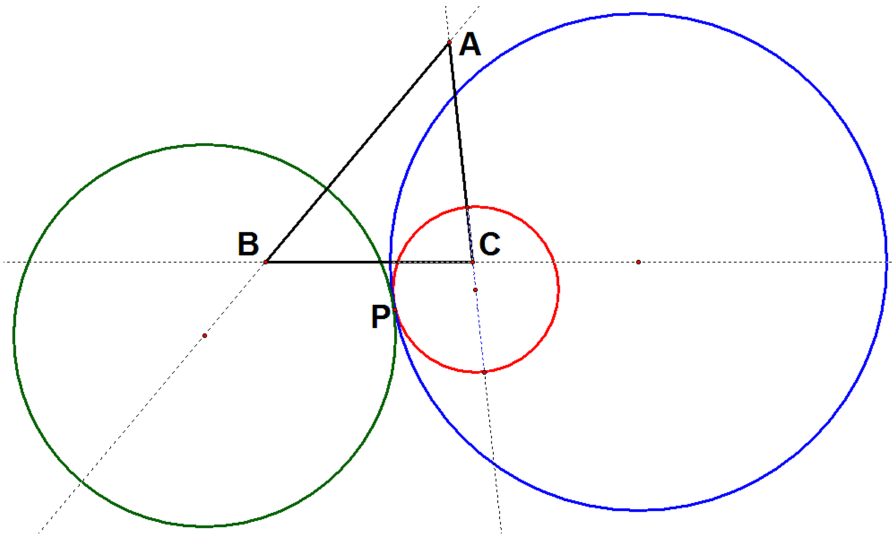

圖 11

若 P 點同時符合 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ 和 $\overline{PB}:\overline{PC}=3:2$ 時，

則 P 點必符合 $\overline{PA}:\overline{PC}=3:1$，

故本小題有一解。

（3）

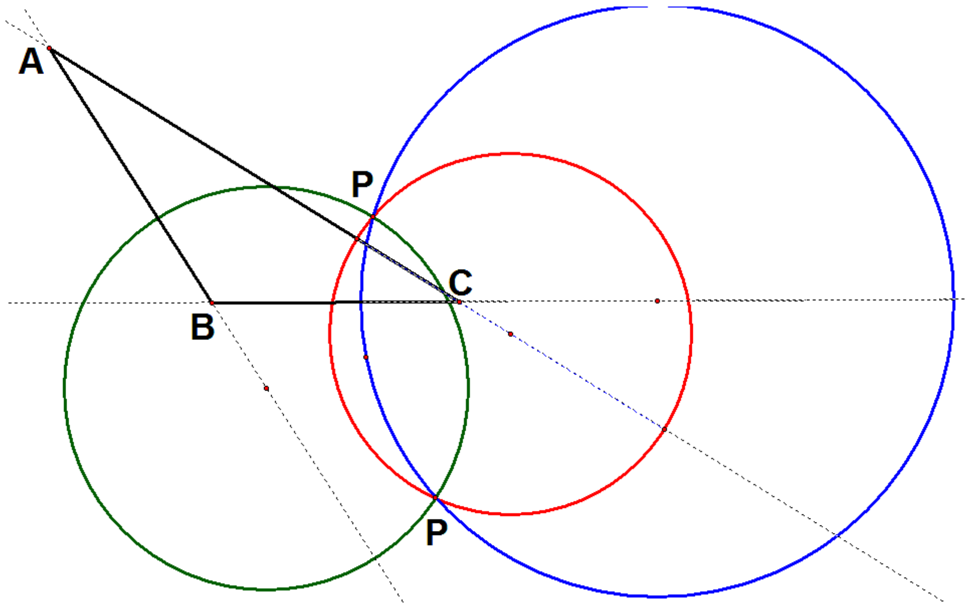

圖 12

本小題有二解。

11·[小結]：符合 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\alpha:\beta:r$（$\alpha,\beta,r$ 為正數但不可以 $\alpha=\beta$、$\beta=r$ 或 $\alpha=r$）的 P 點，不一定有解，隨著 A、B、C 的位置改變，P 點的位置及個數也會改變，解的個數可能為：0、1、2 個。

二、三角形『內心』的延伸探討：

（一）原始問題：「**小明的媽媽在一個三角形的廣場的某個點（如圖）擺攤賣珍珠奶茶，可是在廣場週邊三條路上行走的人，有的走得近，有的要走很遠，小明的媽媽傷透腦筋，於是就問小明，有沒有哪一個位置到三條道路都一樣的距離呢？**」

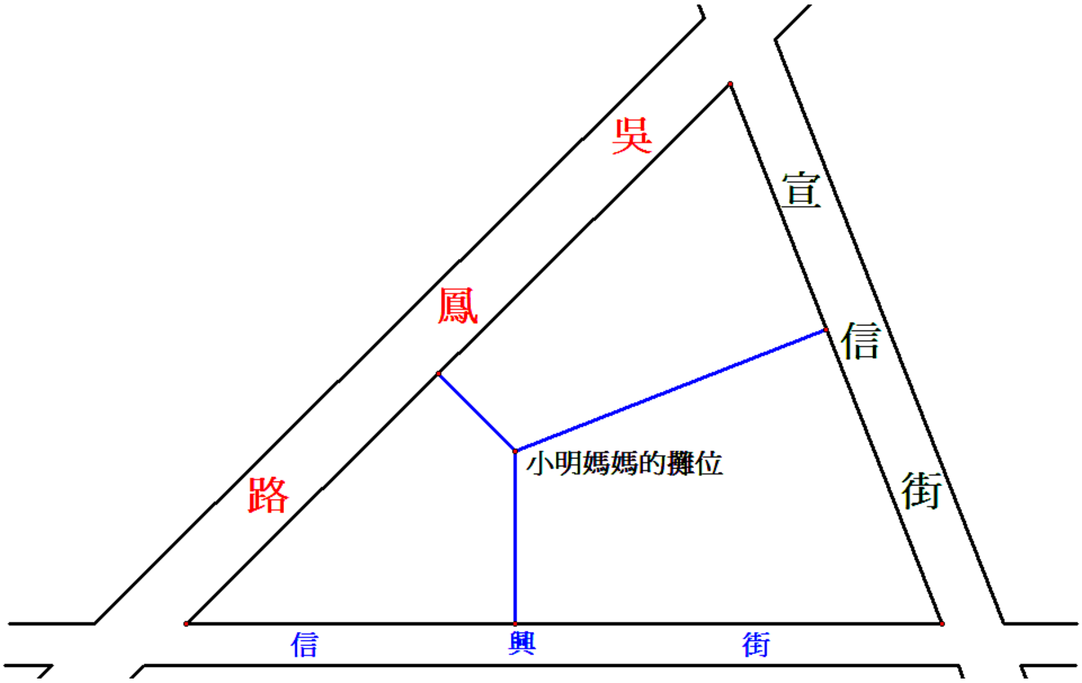

圖 13

本題的解法是：做三角形的內角平分線，由此可得三條內角平分線的交點，就是三角形的『內心』；而三角形的『內心』到三角形的三邊等距。

因此我們第一個聯想到：若 P 點到三邊不等距呢？

1. 定義符號：若 A、B、P 為不共線的相異三點，P 點到 $\overline{AB}$（或直線 AB）的距離，

   以 $d(P,\overline{AB})$ 表示。

2. 問題：給定三角形 ABC，則滿足 $d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})$ ： $d(P,\overline{AC})$ ＝6：3：2

   （這組比例是我們任意假設以方便研究的）的 P 點存在嗎?

（1）先考慮 ΔABC 內部的點：

$d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})$ ＝6：3＝2：1，

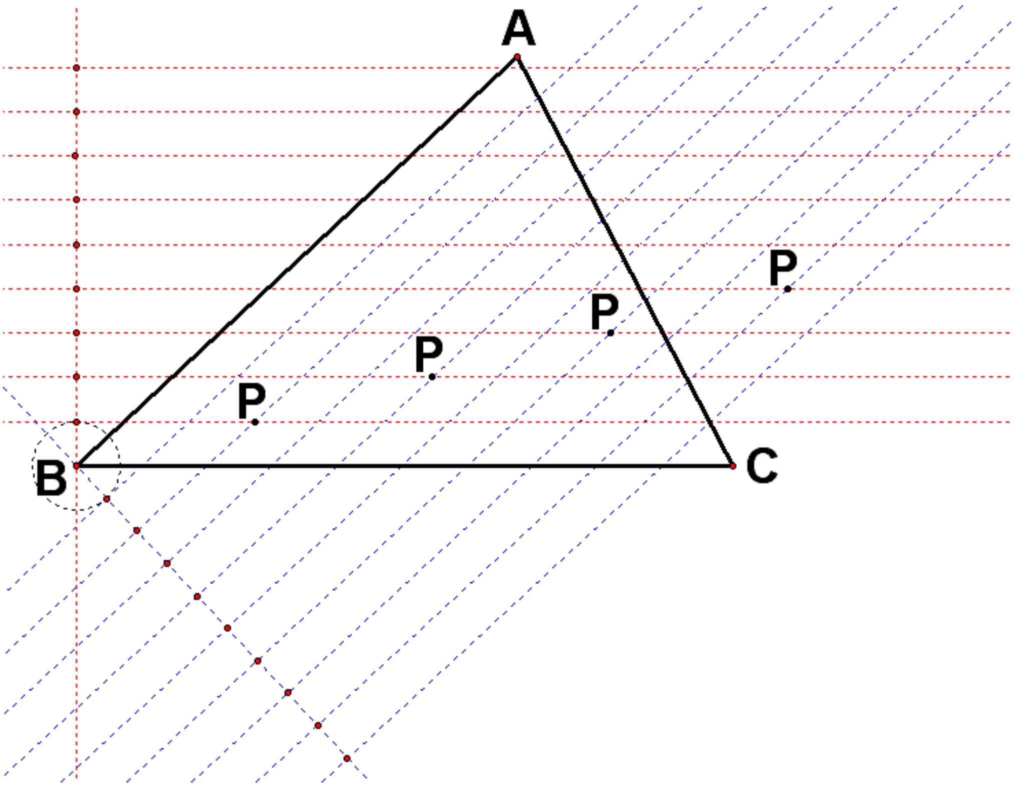

圖 14

［作法說明與觀察］：上圖中

（Ⅰ）紅色直線都與 $\overline{BC}$ 平行，且兩兩距離都是 1 單位長。

（Ⅱ）藍色直線都與 $\overline{AB}$ 平行，且兩兩距離都是 1 單位長。

（Ⅲ）將符合 $d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})$ ＝2：1 的 P 點點出來，即圖中的 P 點。

（Ⅳ）發現：P 點似乎成一直線。

推論如下：

（2）［定理一］：如下圖，若 P 點滿足 $d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})$ ＝m：n，Q 為射線 $\overrightarrow{BP}$ 之任一點

則 $d(Q,\overline{AB})$ ： $d(Q,\overline{BC})$ ＝m：n

（也就是說只要有一點成立，就整條線都成立）

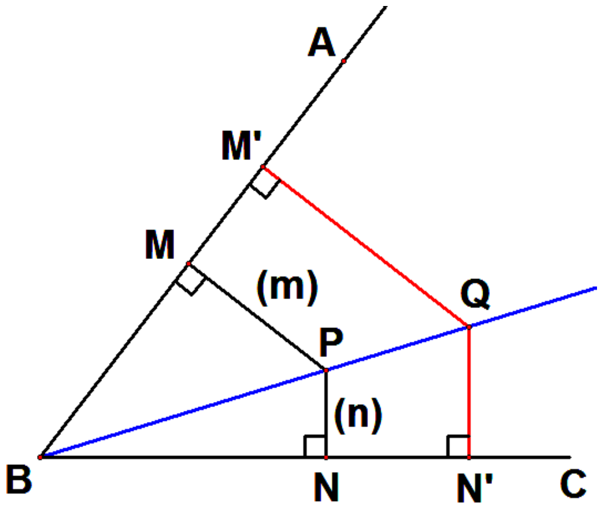

圖 15

［證明］：$\because \overline{MP}//\overline{M'Q}$ $\therefore \overline{MP}:\overline{M'Q}=\overline{BP}:\overline{BQ}$

同理 $\overline{PN}:\overline{QN'}=\overline{BP}:\overline{BQ}$

$\Rightarrow \overline{MP}:\overline{M'Q}=\overline{PN}:\overline{QN'}$

$\Rightarrow \overline{M'Q}\times\overline{PN}=\overline{QN'}\times\overline{MP}$ 同除以（$\overline{PN}\cdot\overline{QN'}$）

$\Rightarrow \dfrac{\overline{M'Q}}{\overline{QN'}}=\dfrac{\overline{MP}}{\overline{PN}}=\dfrac{m}{n}$ 得證

（3）［定理二］：如下圖，若 P 點滿足 $d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{BC})$ ＝m:n，R 為不在射線 $\overrightarrow{BP}$ 之任一點

則 $d(R,\overline{AB})$ ： $d(R,\overline{BC})\neq$ m:n（線外的點都不會成立）

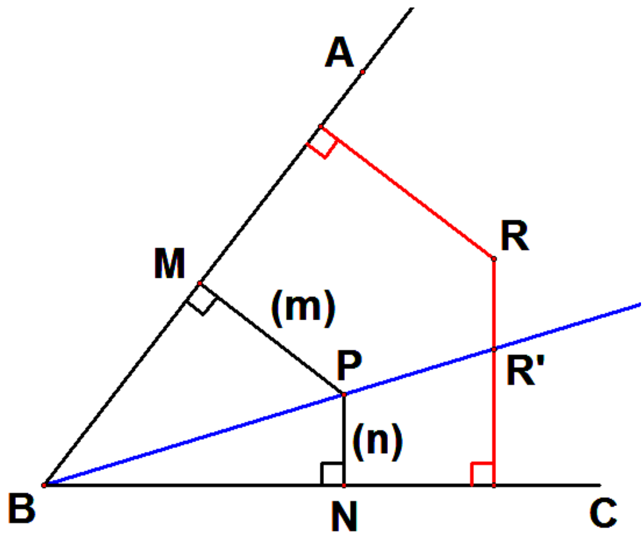

圖 16

[證明]:(Ⅰ)由圖中可知:∵R' 在射線 $\overrightarrow{BP}$ 上,根據[定理一]

$d(R',\overline{AB})$: $d(R',\overline{BC})$ =m:n

也就是 $\dfrac{d(R',\overline{AB})}{d(R',\overline{BC})}=\dfrac{m}{n}$

但是 $d(R,\overline{AB}) < d(R',\overline{AB})$; $d(R,\overline{BC}) > d(R',\overline{BC})$

$\Rightarrow \dfrac{d(R,\overline{AB})}{d(R,\overline{BC})} < \dfrac{d(R',\overline{AB})}{d(R',\overline{BC})} = \dfrac{m}{n}$ (因為分子變小、分母變大)

也就是 $d(R,\overline{AB})$: $d(R,\overline{BC}) \neq$ m:n

(Ⅱ)

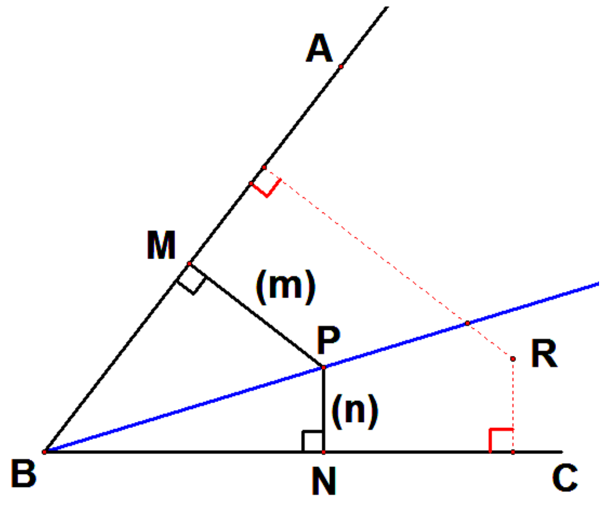

圖 17

同理可證

(4)如何以尺規作圖找出一個 P 點符合 $d(P,\overline{AB})$: $d(P,\overline{BC})$ =2:1:

經過我們的討論,我們找到兩種方法

（Ⅰ）方法一

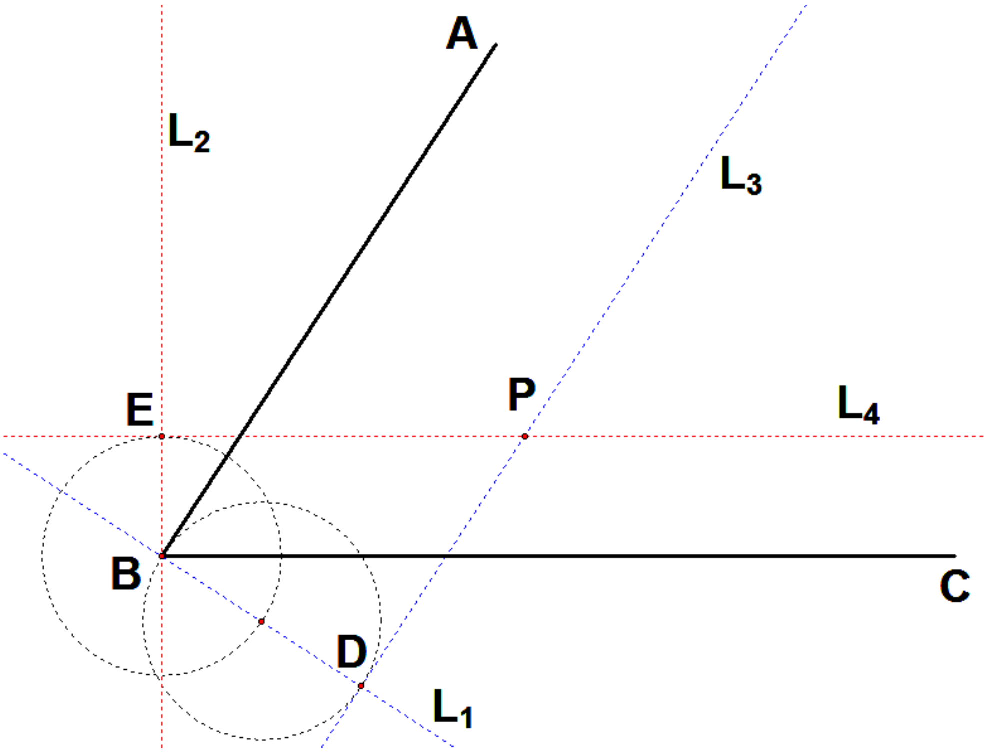

圖 18

［作法］：1° 過 B 作直線 $L_1 \perp \overline{AB}$，並取 $\overline{BD}=2$ 單位長。

2° 過 B 作直線 $L_2 \perp \overline{BC}$，並取 $\overline{BE}=1$ 單位長。

3° 過 D 作直線 $L_3 // \overline{AB}$ 。

4° 過 E 作直線 $L_4 // \overline{BC}$ 。

5° L_3 、L_4 交於 P 點，則 P 點即為所求。

［證明］：1° $\because L_3 // \overline{AB}$ $\therefore d(P,\overline{AB})=\overline{BD}=2$

2° 同理 $d(P,\overline{BC})=\overline{BE}=1$

3° $\Rightarrow d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})=2:1$ 故得證

（Ⅱ）方法二

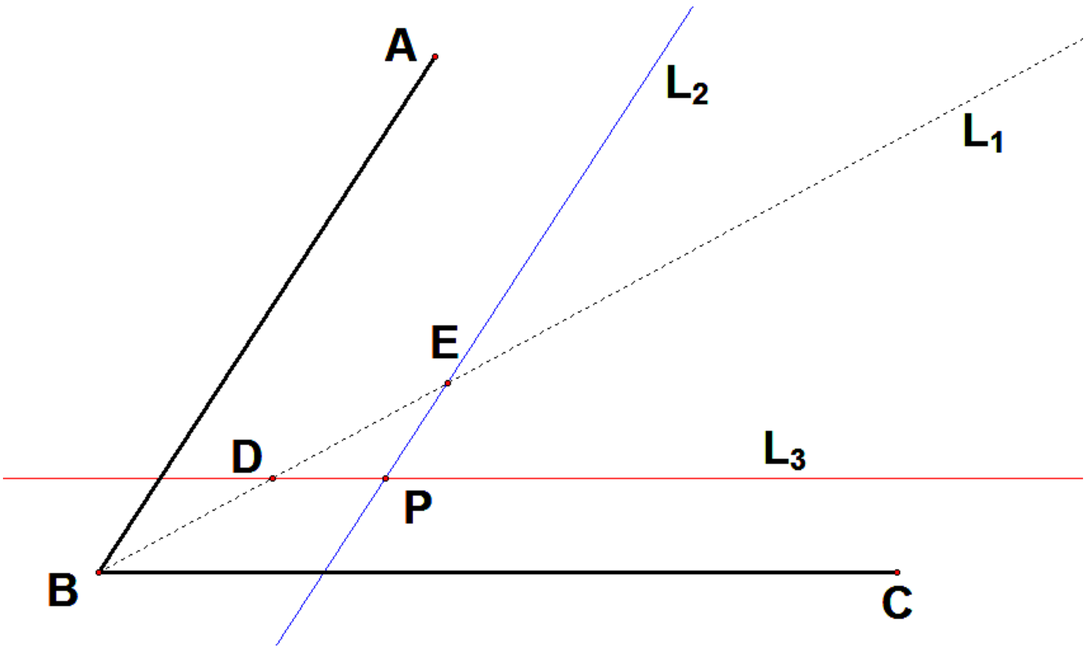

圖 19

［作法］： 1° 作 $\angle ABC$ 的平分線 L_1，並取 $\overline{BD}=\overline{DE}=1$ 單位長。

2° 過 E 作直線 $L_2 // \overline{AB}$ 。

3° 過 D 作直線 $L_3 // \overline{BC}$ 。

4° L_3 、L_2 交於 P 點，則 P 點即為所求。

［證明］：$1^\circ \because L_2 // \overline{AB}$ $\therefore d(P,\overline{AB})=d(E,\overline{AB})$

$2^\circ \because L_3 // \overline{BC}$ $\therefore d(P,\overline{BC})=d(D,\overline{BC})$

$3^\circ \because$ D 點在 $\angle ABC$ 的平分線上 $\therefore d(D,\overline{BC})=d(D,\overline{AB})$

$4^\circ \Rightarrow d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})=d(E,\overline{AB}):d(D,\overline{AB})=\overline{BE}:\overline{BD}=2:1$

故得證

（5）解決問題：給定三角形 ABC，

則滿足 $d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})$ ： $d(P,\overline{AC})$ ＝6：3：2 的 P 點存在嗎?

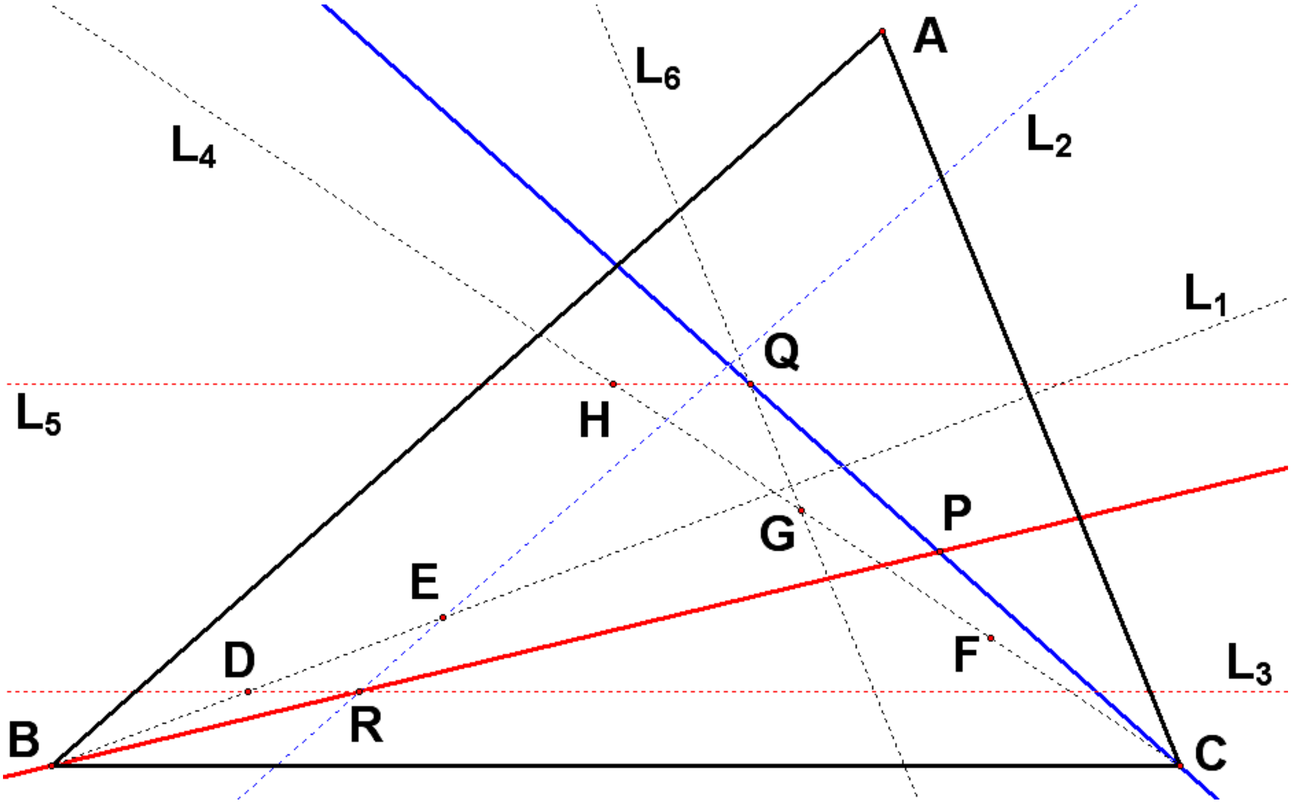

圖 20

［作法］：參考前面的作圖法

（Ⅰ）作 $\angle ABC$ 的平分線 L_1，並取 $\overline{BD}=\overline{DE}$ 。

（Ⅱ）過 E 作直線 $L_2 // \overline{AB}$ 、過 D 作直線 $L_3 // \overline{BC}$ 。

（Ⅲ） L_3 、 L_2 交於 R 點，做直線 BR。

....

（Ⅳ）作 $\angle ACB$ 的平分線 L_4 ，並取 $\overline{CF}=\overline{FG}=\overline{GH}$ 。

（Ⅴ）過 H 作直線 $L_5 // \overline{BC}$ 、過 G 作直線 $L_6 // \overline{AC}$ 。

（Ⅵ） L_5 、 L_6 交於 Q 點，做直線 CQ。

（Ⅶ）直線 BR、CQ 的交點 P 即為所求。

3. 問題：給定三角形 ABC，則滿足 $d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})$ ： $d(P,\overline{AC})$ ＝6：3：2 的 P 點，

若考慮 P 點可以在給定三角形的外面呢？P 點存在嗎?

其實只要應用前面討論的作圖法，就可以將這樣的點找到。

因為要考慮的點在給定三角形 ABC 的外面，所以我們將 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 延長，並將三角形 ABC 外面的平面分成 6 區，如下圖。

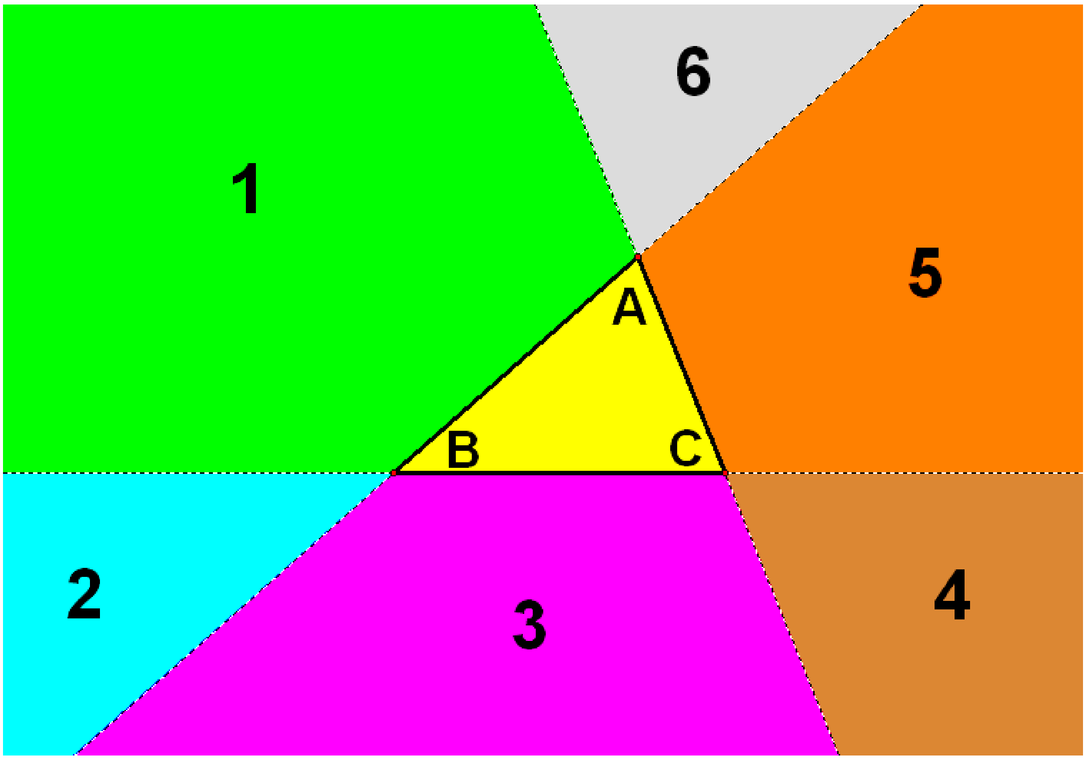

圖 21

下圖為第 1 區的作圖法

參考前面的作圖法

下圖中：直線 BP_1 上的點 P 都符合 $d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC}) = 2:1 = 6:3$ ；

直線 AP_2 上的點 P 都符合 $d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{AC}) = 3:1 = 6:2$

但因為直線 BP_1 、直線 AP_2 在第 1 區不相交，故第 1 區沒有解。

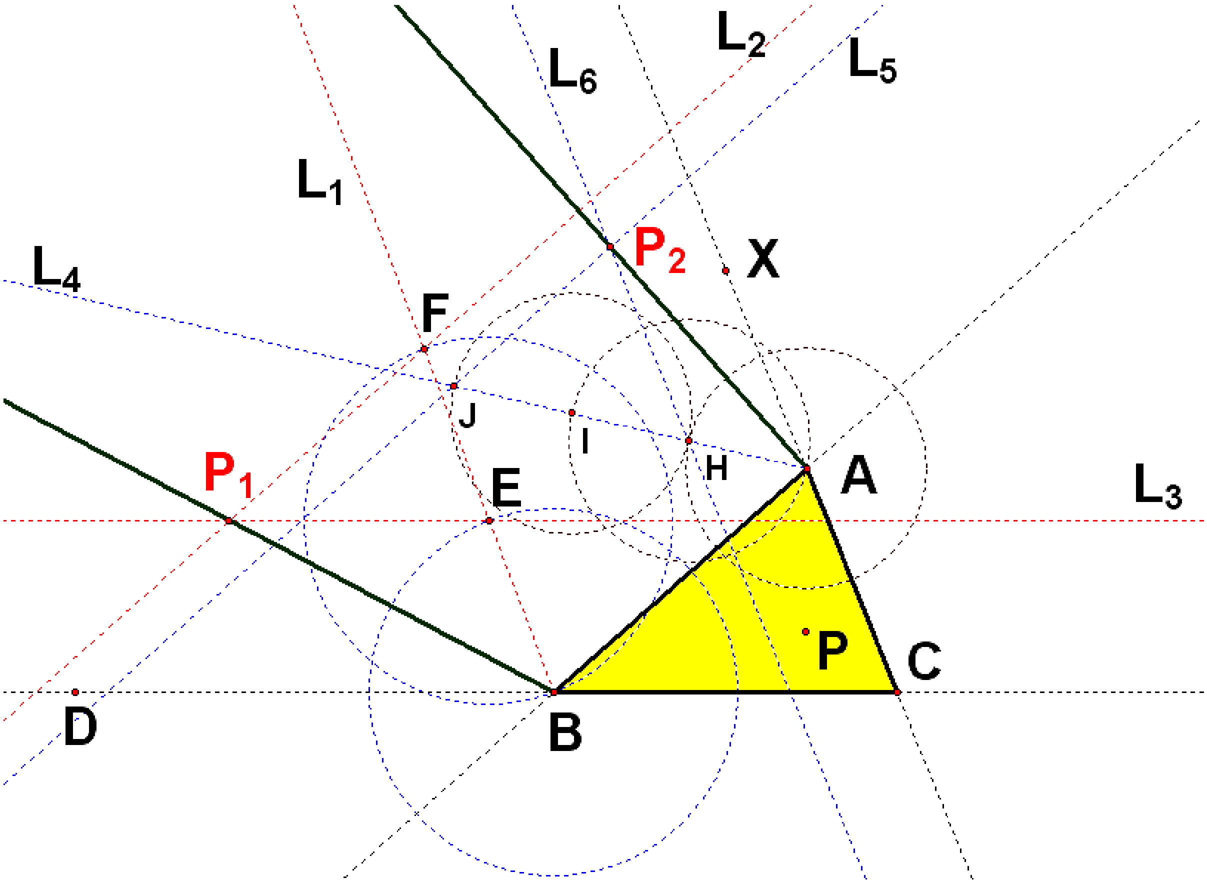

圖 22

再仿照前面的作圖法，完成下圖

在下圖中，我們隱藏所有的作圖痕跡，由圖中可看出：在三角形 ABC 的外面共有三個 P 點符合要求。

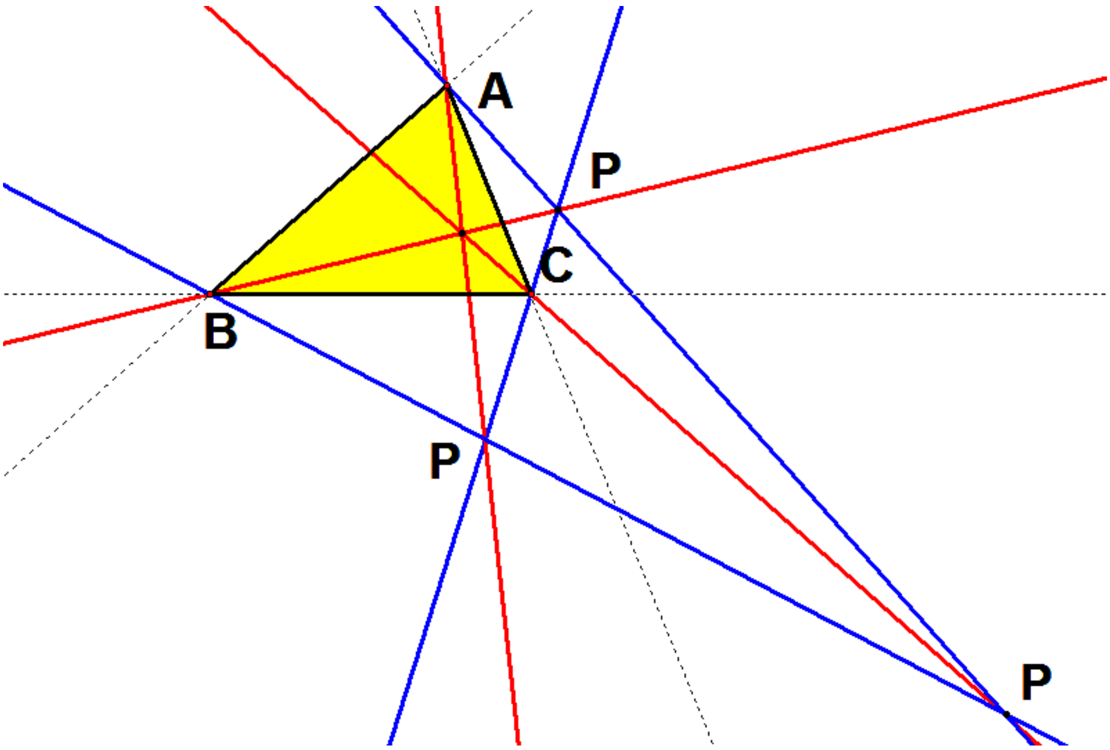

圖 23

（二）第二個聯想：

由『內心』的概念或定義，可知『內心』是三角形的三個內角平分線的交點，且此點到三角形的三邊等距。

因為是三個內角平分線的交點，所以『內心』必定在三角形的『內部』。也就是說：若 I 為 ΔABC 的『內心』，則 I 必定在 ΔABC 的內部；

且 $d(I,\overline{AB}) = d(I,\overline{BC}) = d(I,\overline{AC})$

因此，我們聯想到：ΔABC 的『外部』，是否另有 P 點，

滿足 $d(P,\overline{AB}) = d(P,\overline{BC}) = d(P,\overline{AC})$ 呢?

經過畫圖討論後，發現這種點共有三個，即是 ΔABC 的『傍心』。

後面我們會特別針對 ΔABC 的『傍心』做探討。

三、三角形『重心』的延伸探討：

（一）第一個聯想：由三角形『重心』的定義，三角形的三中線的交點。如下圖：

G 就是 ΔABC 的重心。

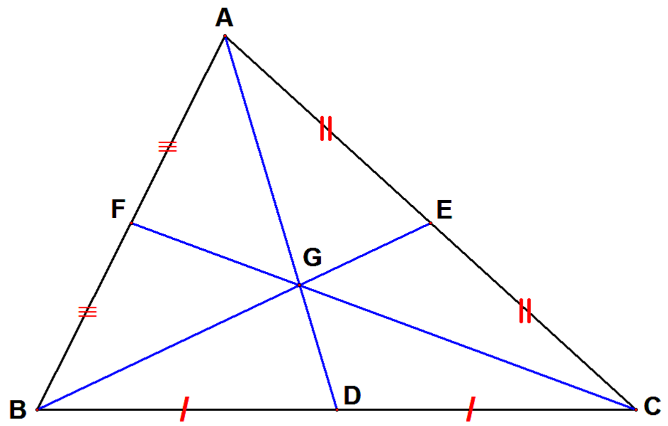

圖 24

由上圖可知：三中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 G 點，

也可以說：在 ΔABC 中，兩中線 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 G 點，則連接直線 AG 後，必通過

第三邊 $\overline{BC}$ 的中點 D。

因此，我們的第一個聯想是：如果 E、F 分別是 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上某個特殊比例的點，

P 點為 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 的交點，則連接直線 AP 後，是否必通過第三邊 $\overline{BC}$ 上的某特定點

D 呢?（如下圖）

[問題]：若已知$\overline{AE}:\overline{EC}$和$\overline{AF}:\overline{FB}$時，是否就可以得到$\overline{BD}:\overline{DC}$呢?

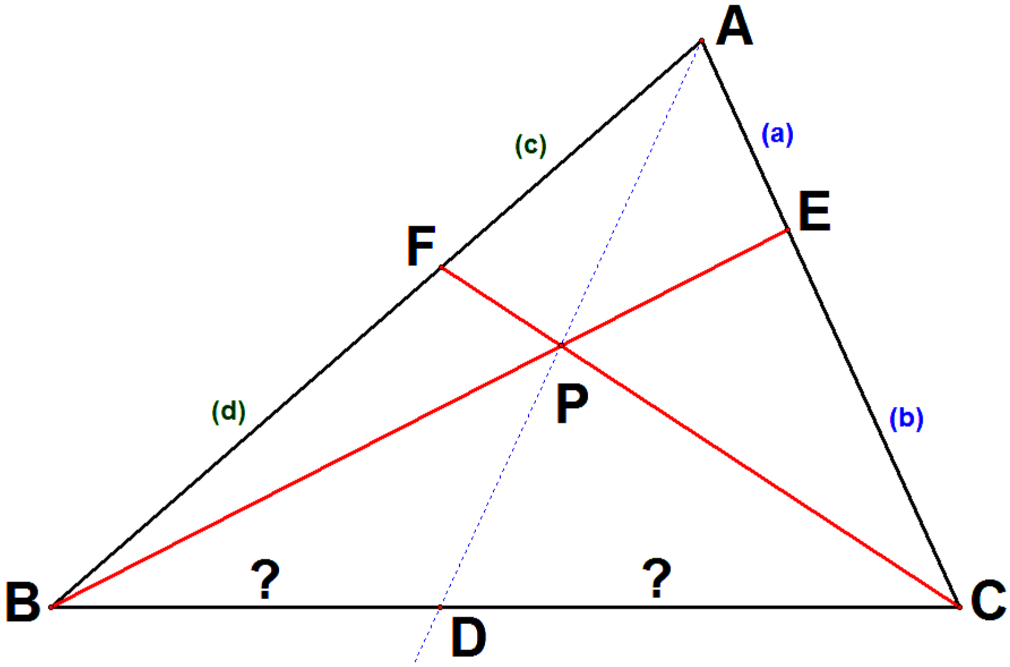

圖 25

1. 先用 GSP 以實例測試：

先任意做ΔABC，在$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上各取 E、F 點使$\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$；$\overline{AF}:\overline{FB}=2:3$

P 點為$\overline{BE}$、$\overline{CF}$的交點，連接直線 AP 後，交$\overline{BC}$上的 D 點，

我們固定$\overline{BC}$，任意移動 A 點位置，發現：D 點並不因 A 點的移動而改變位置，

也就是$\overline{BD}:\overline{DC}$為固定的。(請參考以下三圖)

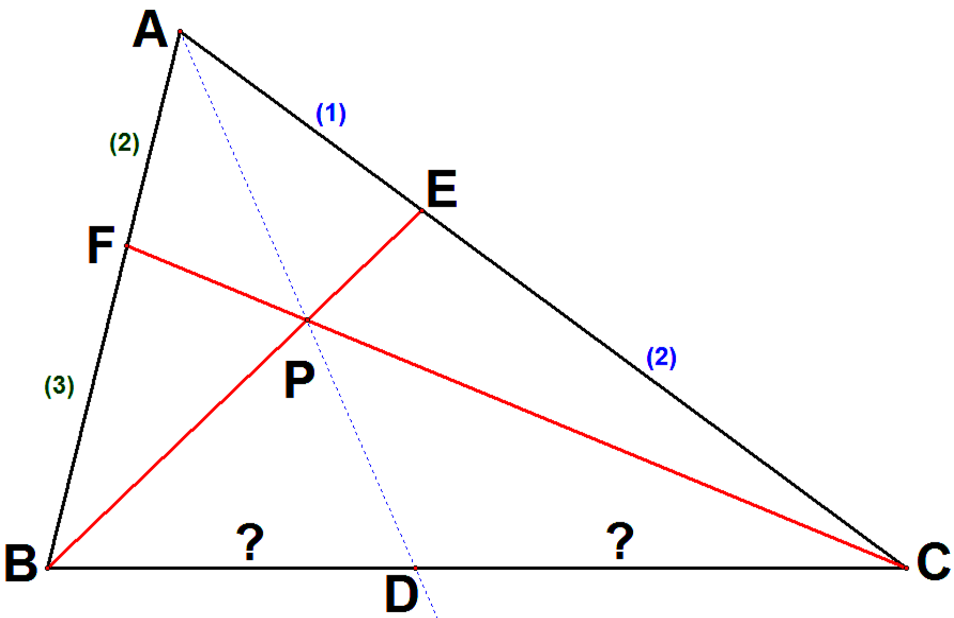

圖 26

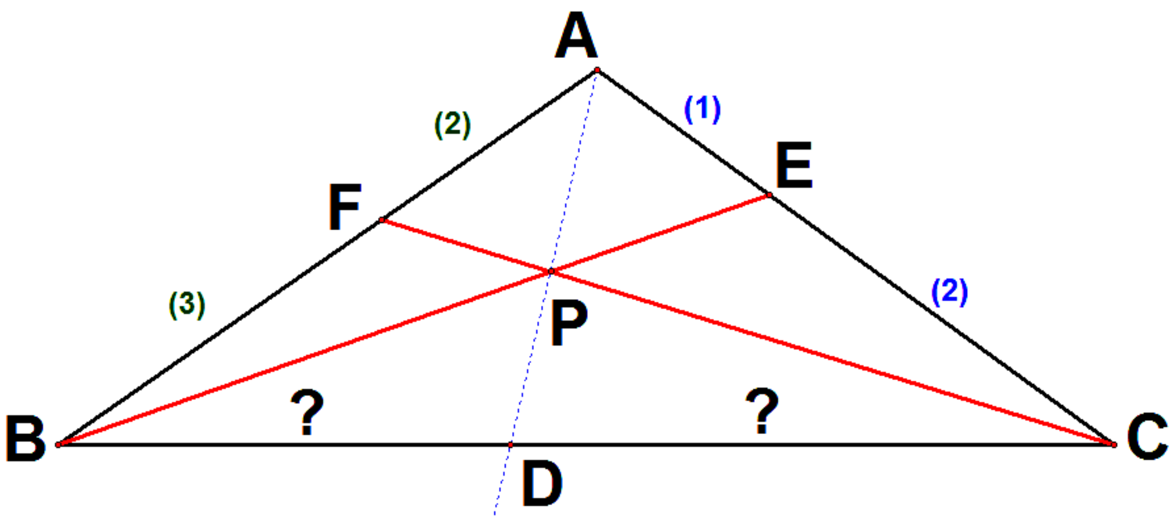

圖 27

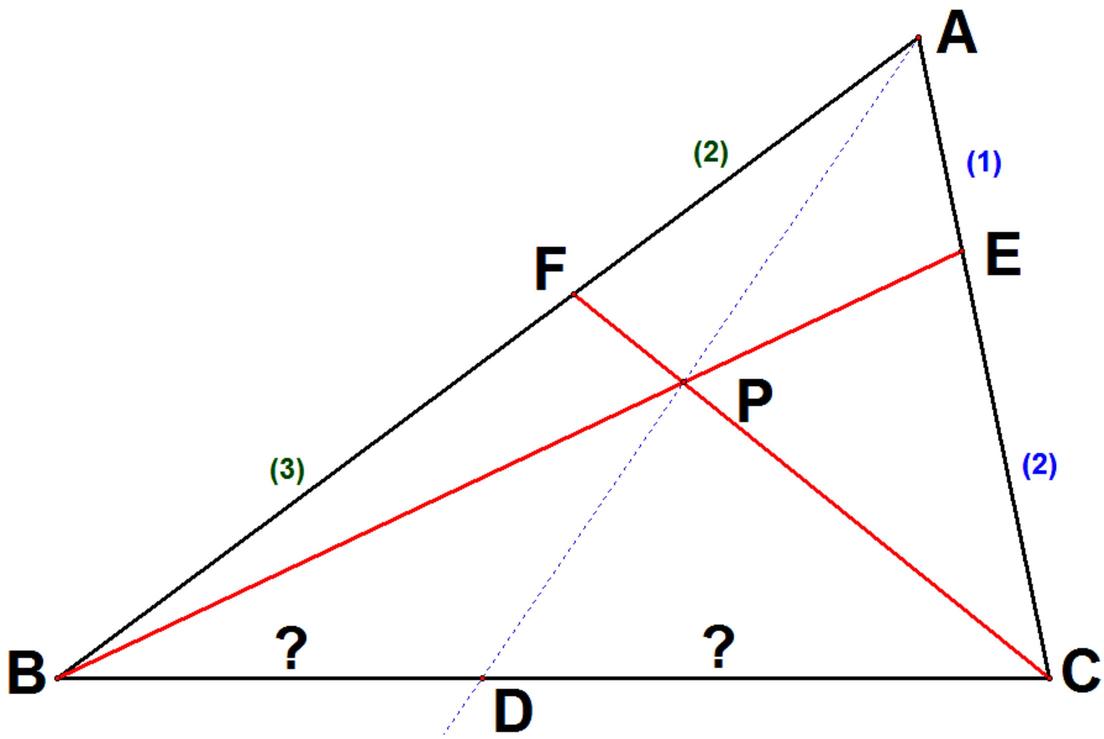

圖 28

2. 找 $\overline{BD}:\overline{DC}=$？先以上面實例探討

［思考過程］：

（1）

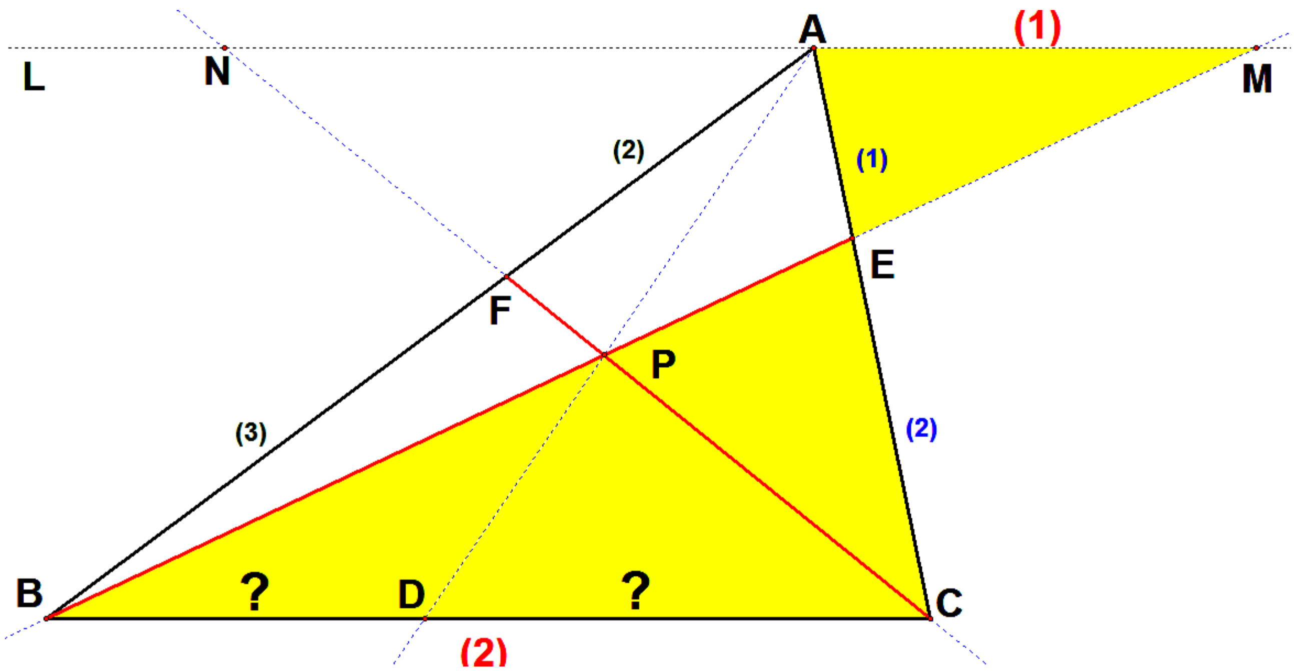

圖 29

過 A 作 $L // \overline{BC}$，延長 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 分別交 L 於 M、N

$\because L // \overline{BC}$ $\therefore \Delta AME \sim \Delta CBE \Rightarrow \overline{AM}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$

（2）

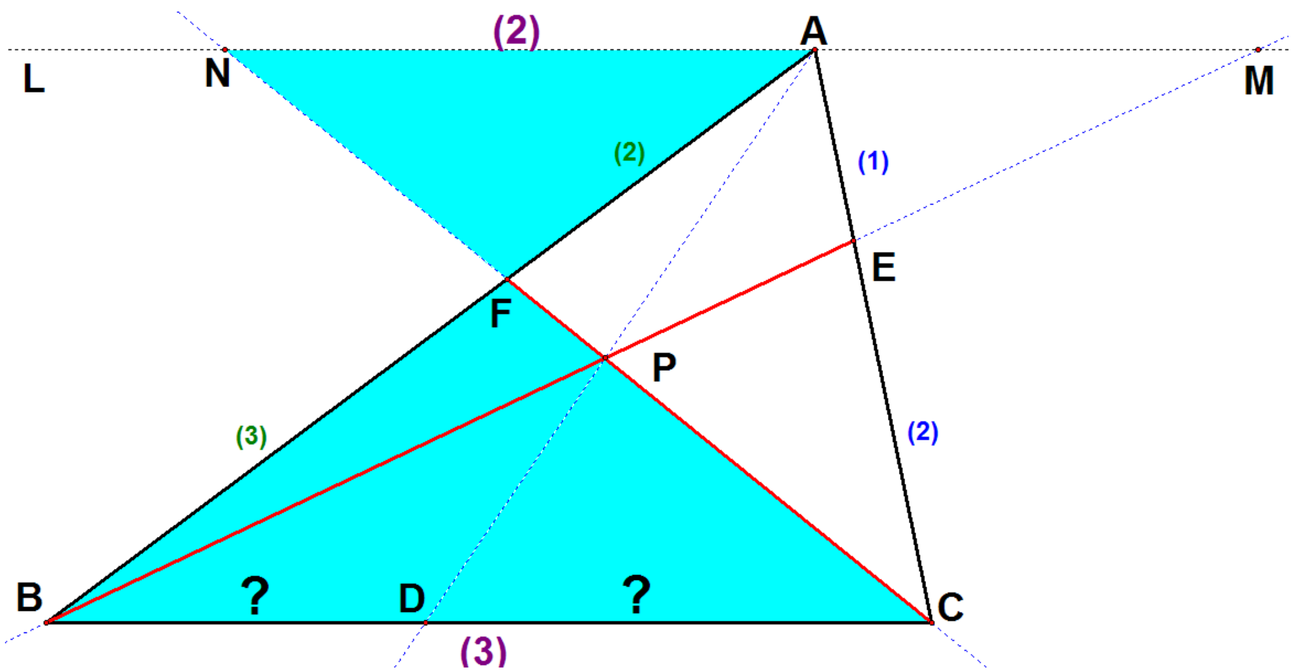

圖 30

同理可證： $\overline{AN}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{FB}=2:3$

$\Rightarrow \overline{AM}:\overline{AN}:\overline{BC}=3:4:6$　　　所以 $\overline{AM}:\overline{AN}=3:4$

（3）

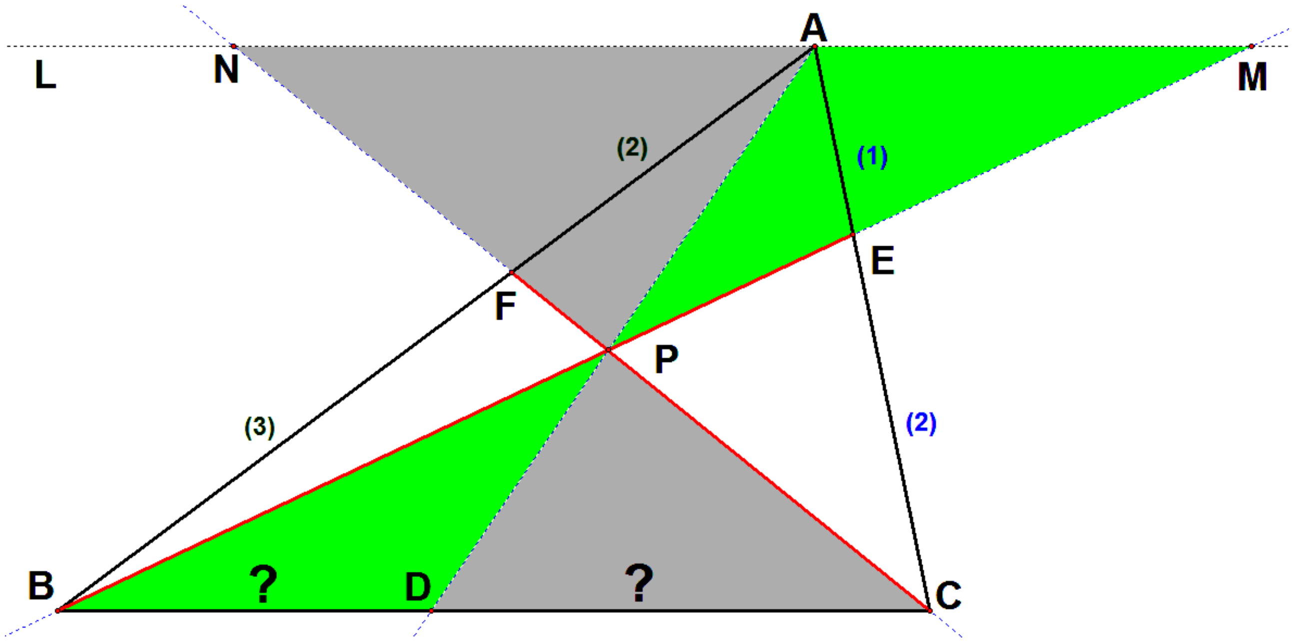

圖 31

以下我們將證明 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AM}:\overline{AN}$

（Ⅰ）$\because \Delta AMP \sim \Delta DBP \Rightarrow \overline{AM}:\overline{BD}=\overline{AP}:\overline{PD}$

（Ⅱ）$\because \Delta ANP \sim \Delta DCP \Rightarrow \overline{AN}:\overline{CD}=\overline{AP}:\overline{PD}$

（Ⅲ）由（Ⅰ）、（Ⅱ）可得 $\overline{AM}:\overline{BD}=\overline{AN}:\overline{CD}$

$\Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AM}:\overline{AN}$

（4）再由（2），可得 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AM}:\overline{AN}=3:4$

3. 探討一般情形：如下圖，已知 $\overline{AE}:\overline{EC}=a:b$；$\overline{AF}:\overline{FB}=c:d$，求 $\overline{BD}:\overline{DC}=$？

（1）

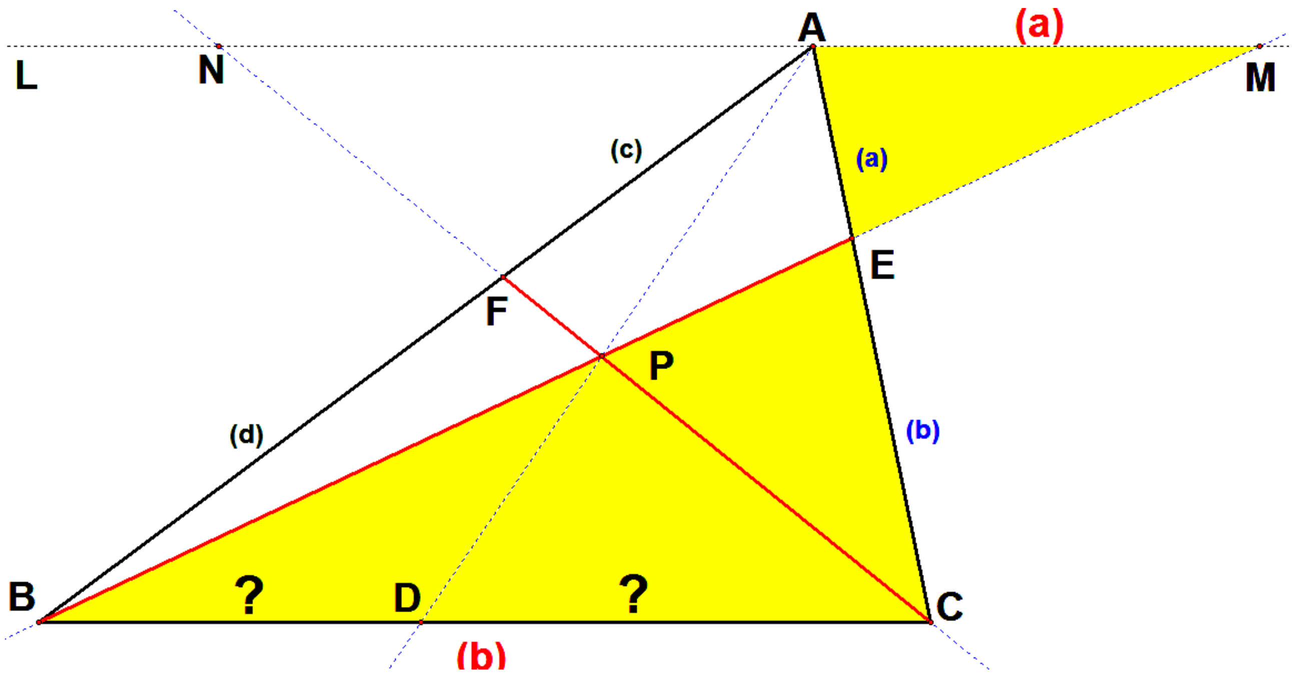

圖 32

參考前面的思考過程，可得 $\overline{AM}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{EC}=a:b$

（2）

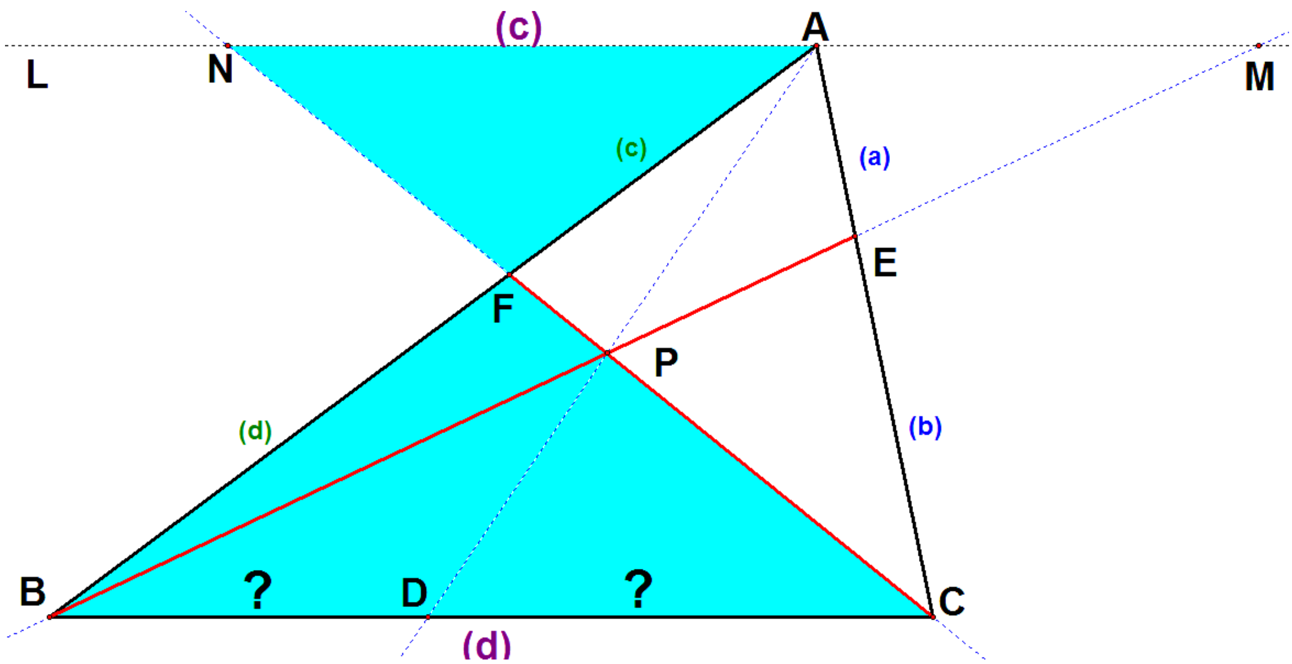

圖 33

同理可證：$\overline{AN}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{FB}=c:d$

$\Rightarrow \overline{AM}:\overline{AN}=ad:bc$

（3）

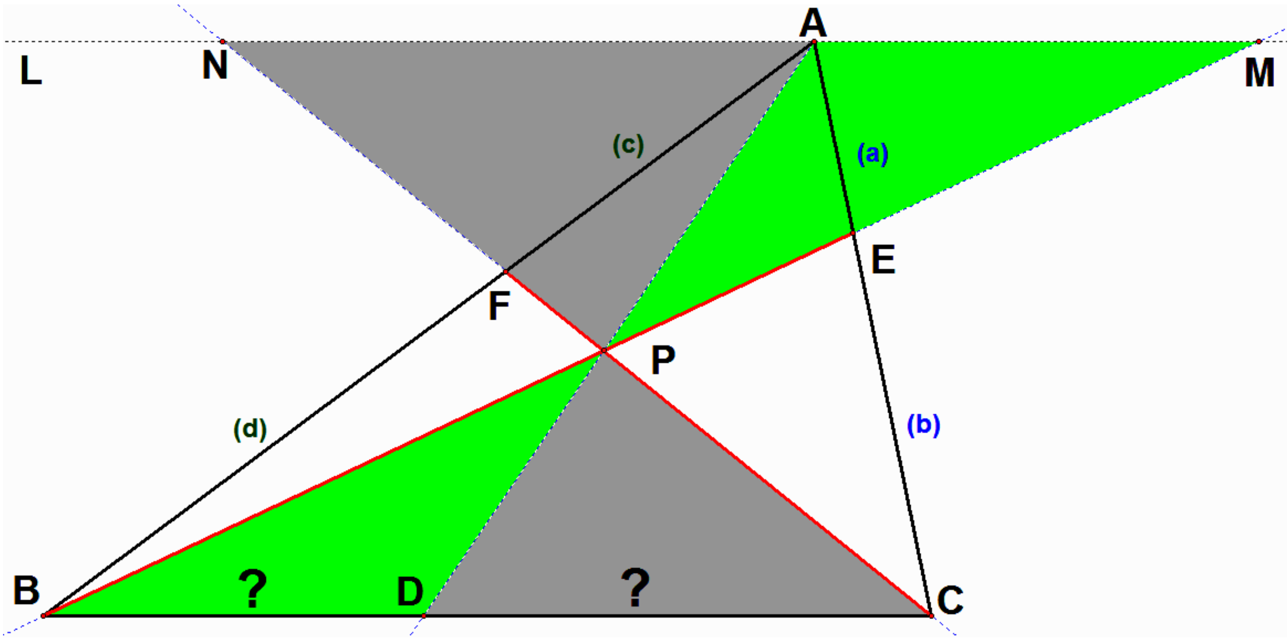

圖 34

（Ⅰ）$\because \Delta AMP \sim \Delta DBP \Rightarrow \overline{AM} : \overline{BD} = \overline{AP} : \overline{PD}$

（Ⅱ）$\because \Delta ANP \sim \Delta DCP \Rightarrow \overline{AN} : \overline{CD} = \overline{AP} : \overline{PD}$

（Ⅲ）由（Ⅰ）、（Ⅱ）可得 $\overline{AM} : \overline{BD} = \overline{AN} : \overline{CD}$

$\Rightarrow \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AM} : \overline{AN}$

（4）再由（2），可得 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AM} : \overline{AN} = ad : bc$

由此可以得到：判別 ΔABC 中三線段 $\overline{\mathrm{AD}}$ 、$\overline{\mathrm{BE}}$ 、$\overline{\mathrm{CF}}$ 是否交於一點的方法。

[定理三]：如下圖，若 D、E、F 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 上之一點

若 $\overline{AE}:\overline{EC}=a:b$ 、 $\overline{AF}:\overline{FB}=c:d$ ，且 $\overline{BD}:\overline{DC}=ad:bc$ 時，

則 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 必交於一點。

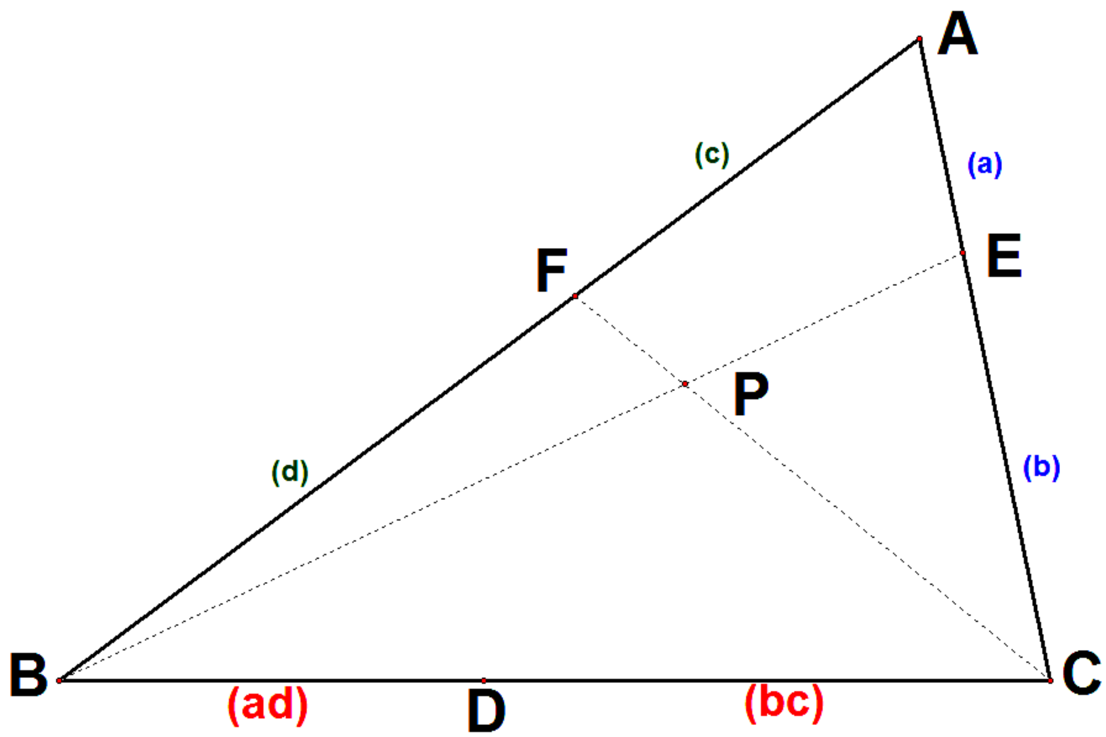

圖 35

[證明]：1° 設 $\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 交於 P 點，連 $\overline{AP}$ 延長交 $\overline{BC}$ 於 D'

由前面的計算可得 $\overline{BD'}:\overline{D'C}=ad:bc$

2° 又已知 $\overline{BD}:\overline{DC}=ad:bc$

所以 $\overline{BD'}:\overline{D'C}=\overline{BD}:\overline{DC}$ $\Rightarrow D'=D$

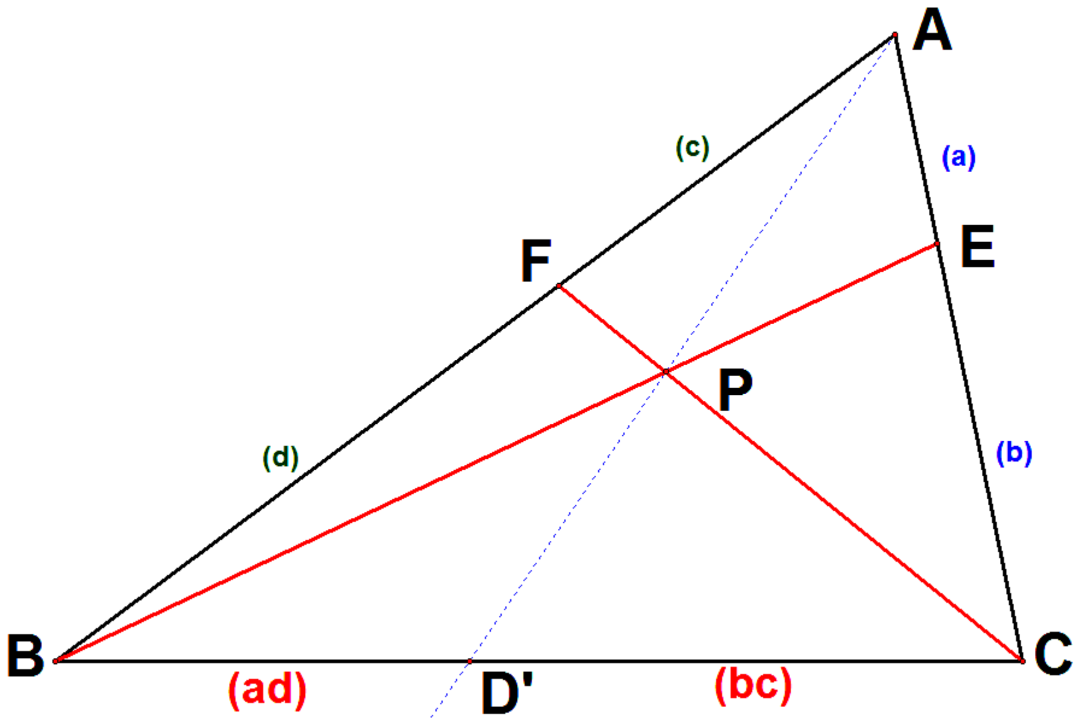

圖 36

（二）第二個聯想：由『重心』的性質可知：『重心』位於每條中線 2:1 的位置。

因此我們聯想到：可否求出上圖中 $\overline{AP}:\overline{PD}$ 、$\overline{BP}:\overline{PE}$ 、$\overline{CP}:\overline{PF}$ 呢？

［思考過程］：

1. 由前面的計算過程中，可得 $\overline{AP}:\overline{PD}=\overline{AM}:\overline{BD}$

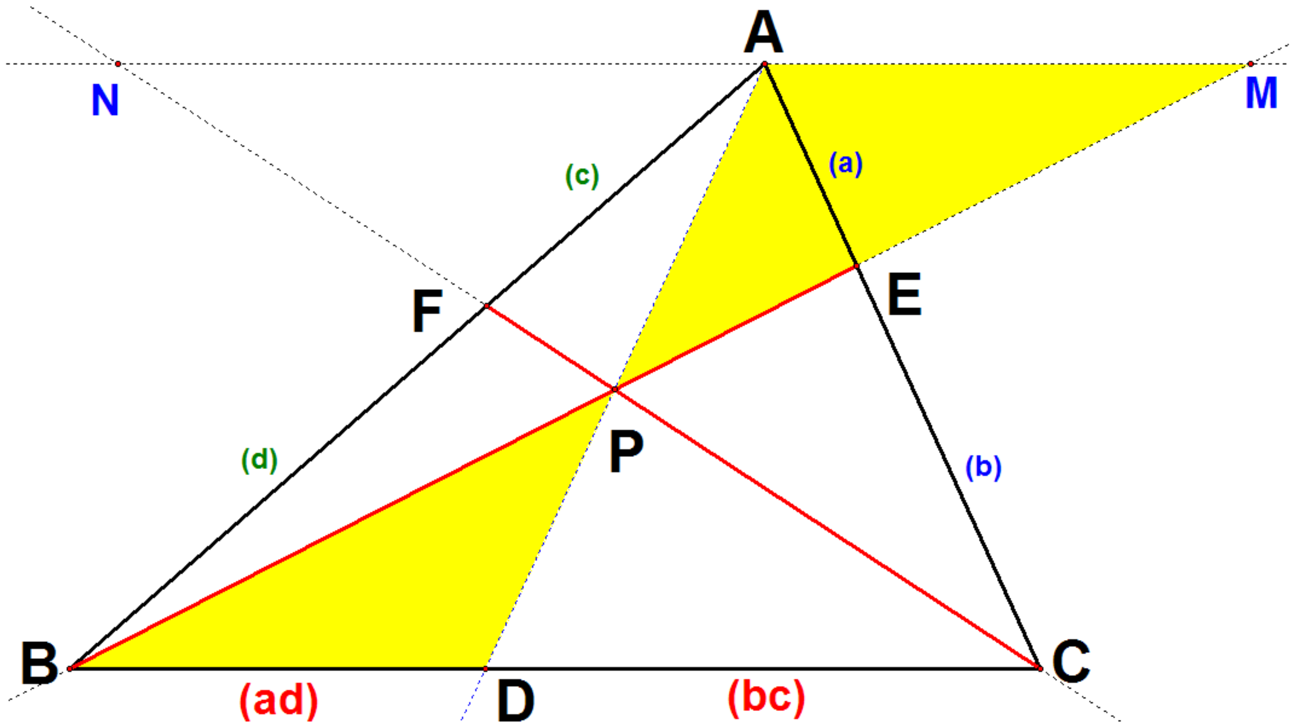

圖 37

2. 另外，由［定理三］，已知 $\overline{AE}:\overline{EC}=a:b$；$\overline{AF}:\overline{FB}=c:d$，即可求得 $\overline{BD}:\overline{DC}=ad:bc$

$$\Rightarrow \overline{BD}=\frac{ad}{ad+bc}\cdot\overline{BC}$$

3. 所以 $\overline{AP}:\overline{PD}=\overline{AM}:\overline{BD}=\overline{AM}:\frac{ad}{ad+bc}\cdot\overline{BC}$　　（$\because \overline{AM}:\overline{BC}=a:b$）

$$=a:\frac{ad}{ad+bc}\cdot b=1:\frac{bd}{ad+bc}=(ad+bc):bd$$

然後，只要將圖旋轉，就可以按照相同方法求出 $\overline{BP}:\overline{PE}$ 、$\overline{CP}:\overline{PF}$ 了。

4. ［驗證］『重心』位於每條中線 2:1 的位置。

設 G 為 ΔABC 的重心　　　所以 $\overline{AE}:\overline{EC}=1:1$；$\overline{AF}:\overline{FB}=1:1$

推得 $\overline{AG}:\overline{GD}=(1\times1+1\times1):1\times1=2:1$

同理可證 $\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$；$\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$

（三）第三個聯想：比較以下兩圖，

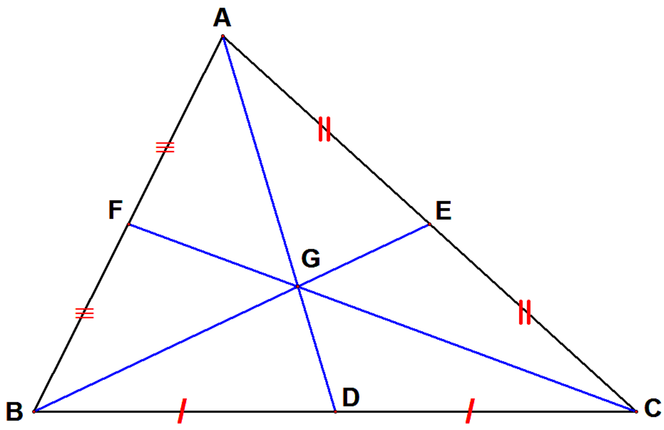

圖 38

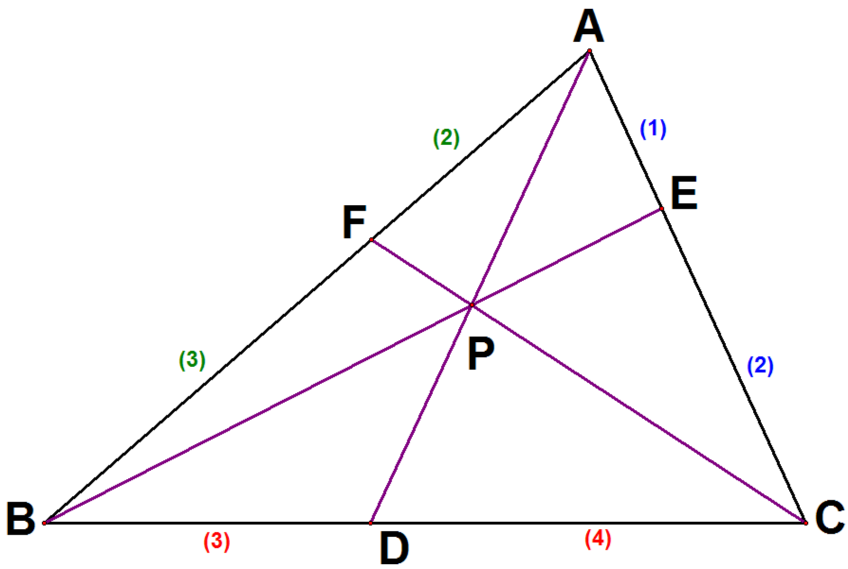

圖 39

第一個圖中，六塊小三角形的面積都相等，因此我們聯想到：

第二個圖（圖 39）中，六塊小三角形的面積比是多少？

［思考過程］：

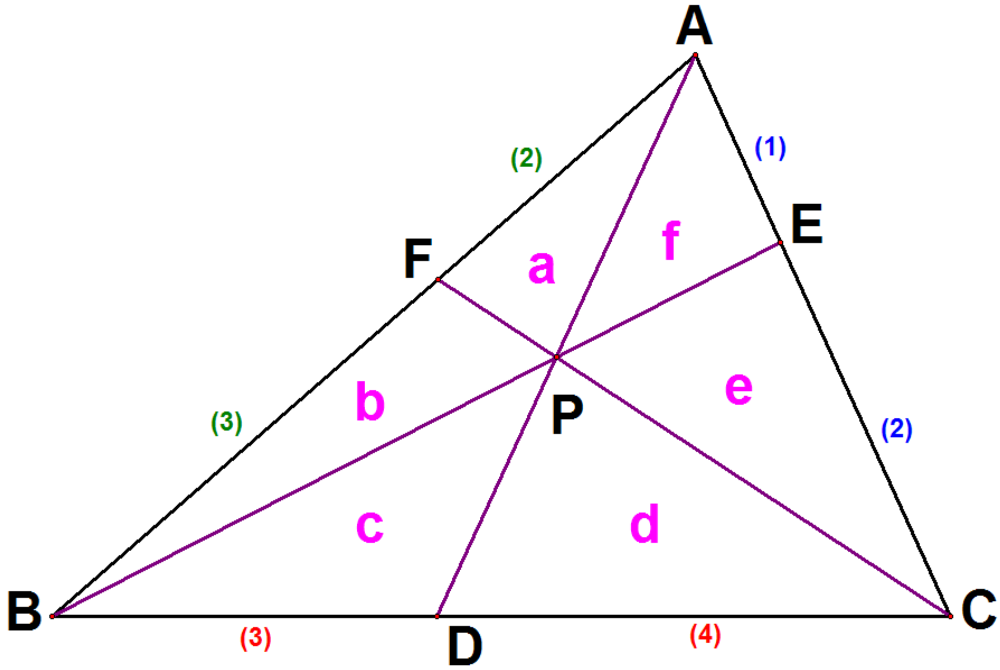

圖 40

1. 為方便研究，我們將圖中，六塊小三角形的面積分別以 a、b、c、d、e、f 表示

2. 由圖中比例，可得

a：b＝2:3

c：d＝3:4

e：f＝2:1

因此，可假設 $a=2\alpha$ ； $b=3\alpha$ ； $c=3\beta$ ； $d=4\beta$ ； $e=2\gamma$ ； $f=1\gamma$

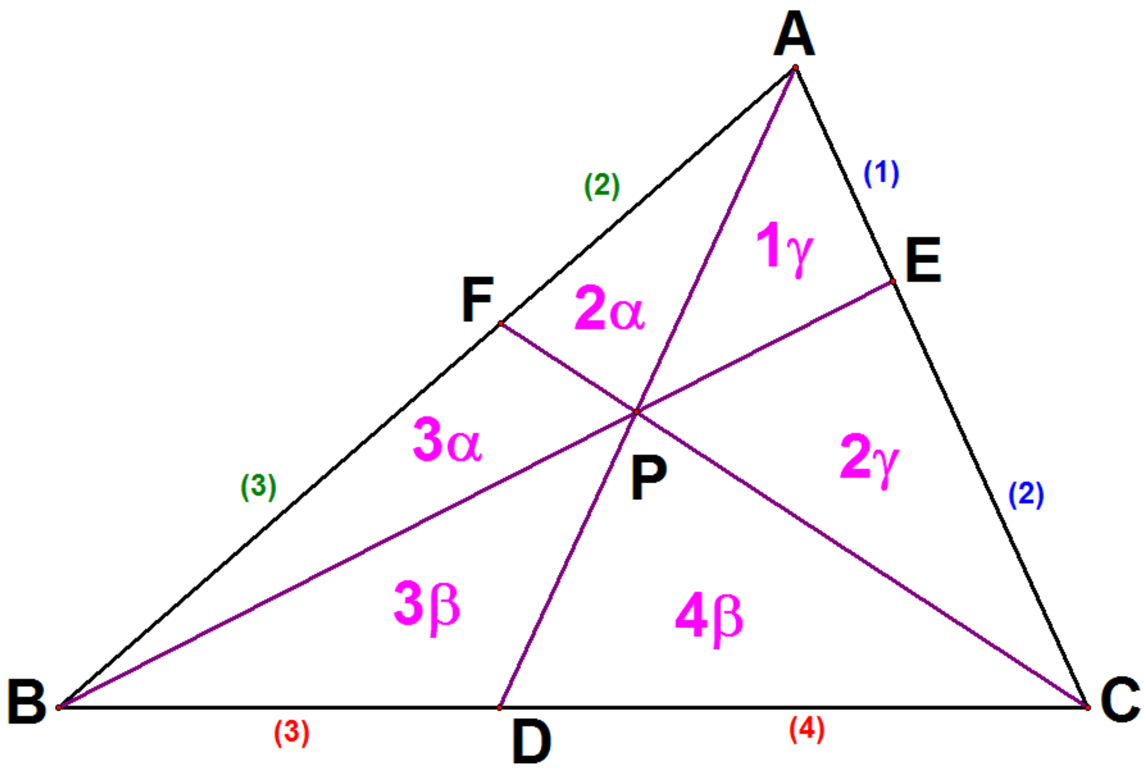

圖 41

3. 又因為 $\overline{BD}:\overline{DC}=3:4$ 所以 $(a+b+c):(d+e+f)=3:4$

同理 $(c+d+e):(a+b+f)=2:1$

$(a+e+f):(b+c+d)=2:3$

$$\Rightarrow\begin{cases}(5\alpha+3\beta):(4\beta+3\gamma)=3:4\\(7\beta+2\gamma):(5\alpha+1\gamma)=2:1\\(2\alpha+3\gamma):(7\beta+3\alpha)=2:3\end{cases}$$

可解得 $\alpha:\gamma=9:20$ 、 $\alpha:\beta=7:10$ 、 $\beta:\gamma=9:14$

$\Rightarrow \alpha:\beta:\gamma=63:90:140$

$\Rightarrow$ a : b : c : d : e : f $=126:189:270:360:280:140$

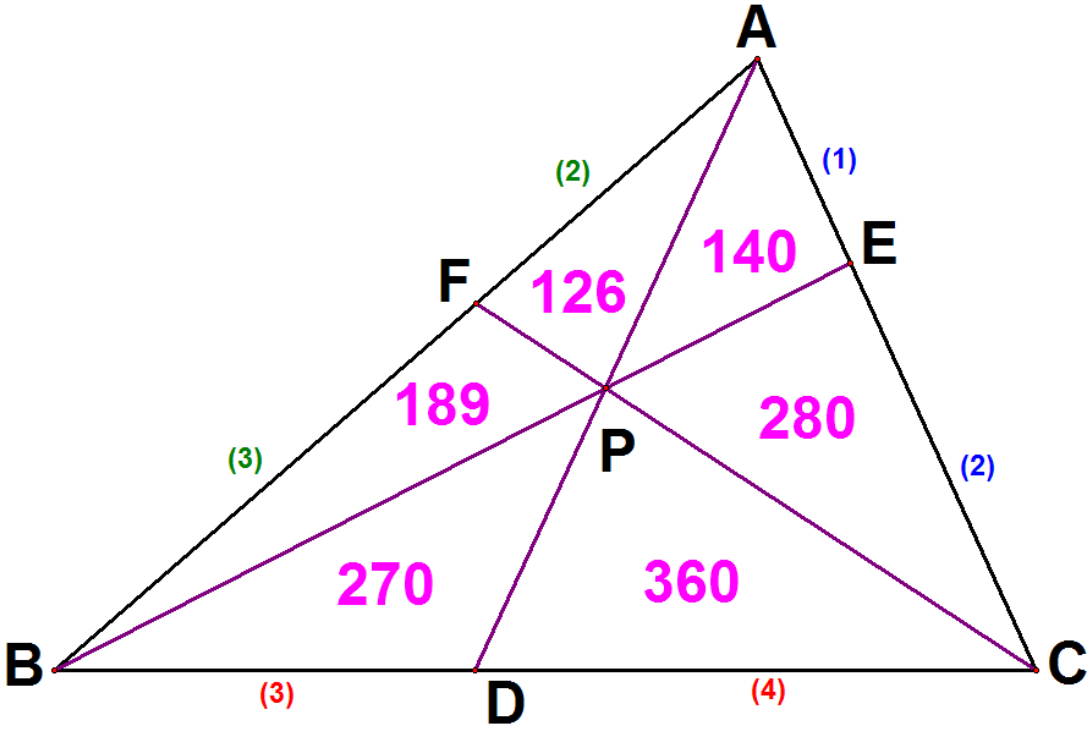

圖 42

4. 126＋189＝315；270＋360＝630；280＋140＝420

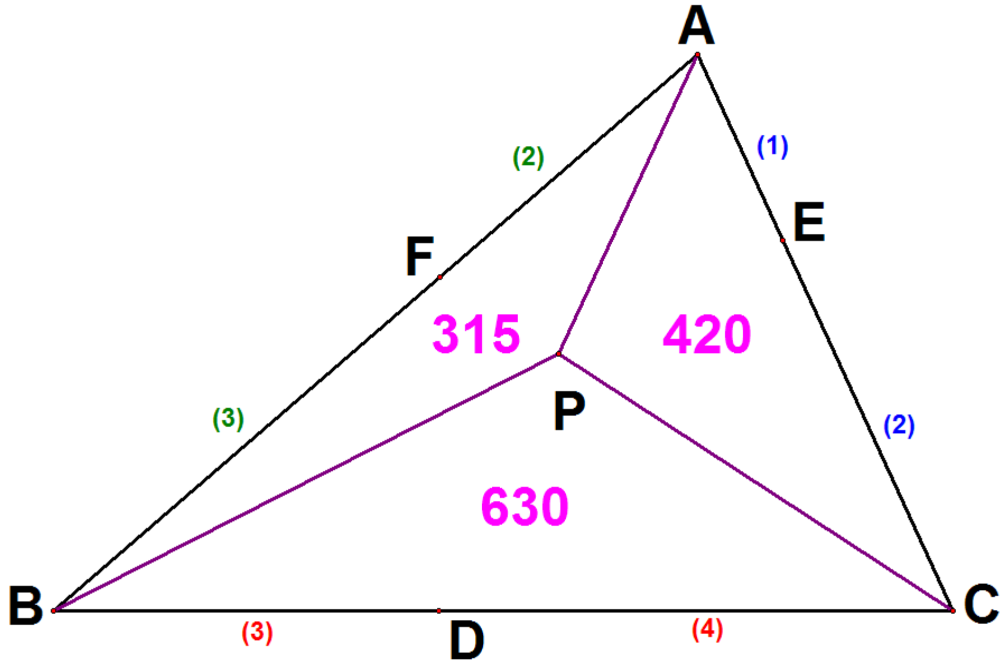

圖 43

（Ｉ）315：630＝1：2

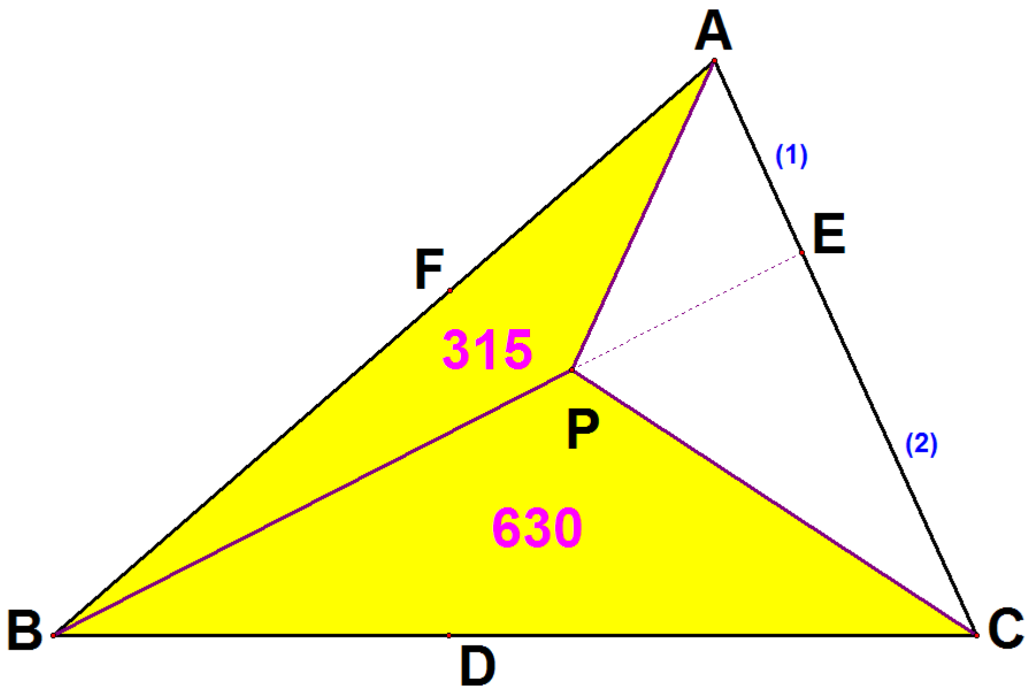

圖 44

(Ⅱ) 420：630＝2：3

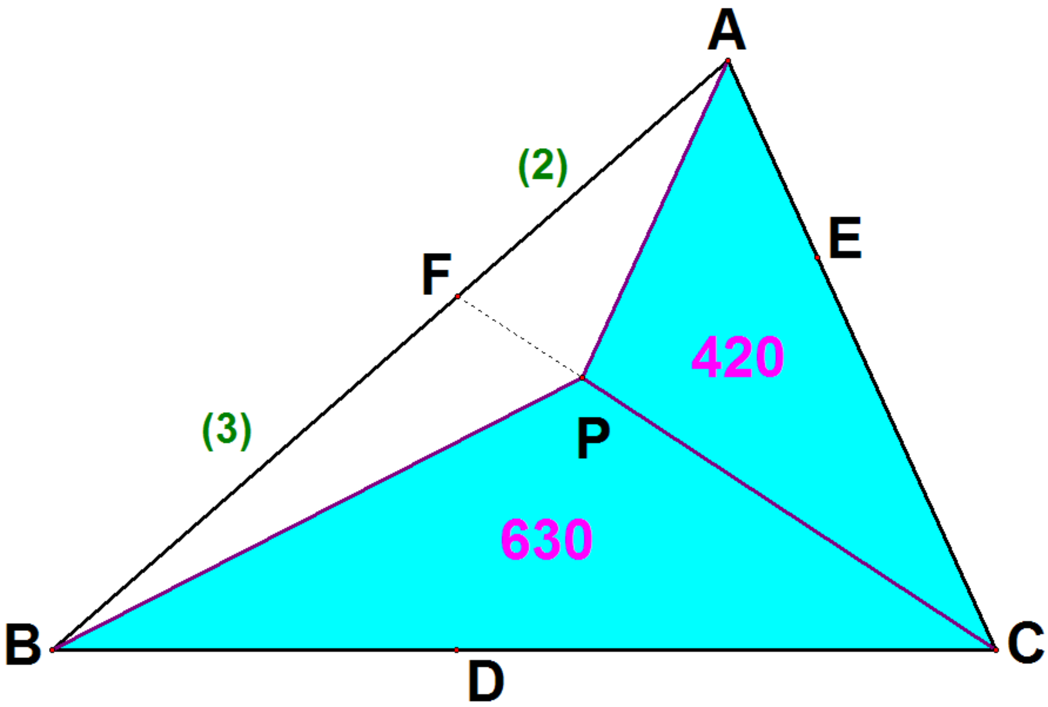

圖 45

(Ⅲ) 315：420＝3：4

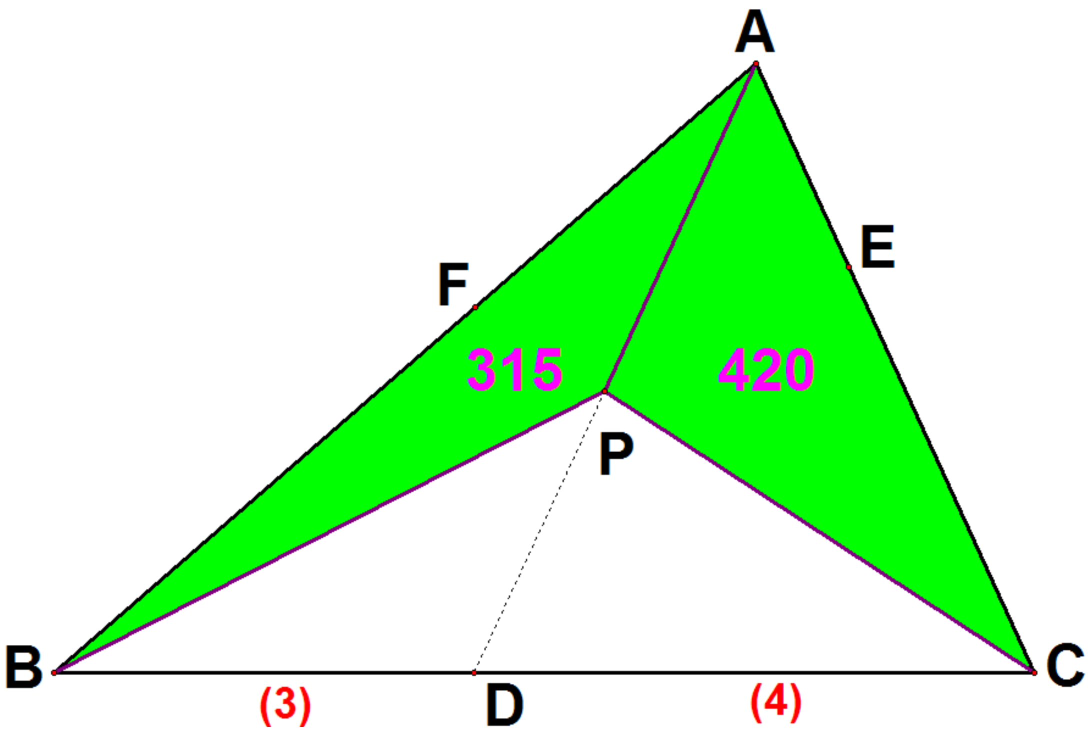

圖 46

［定理四］在 ΔABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 上之一點且 $\overline{BD}:\overline{CD}=m:n$，若 P 為 $\overline{AD}$ 上的任一點，

則 ΔABP 面積：ΔACP 面積＝$m:n$ 。

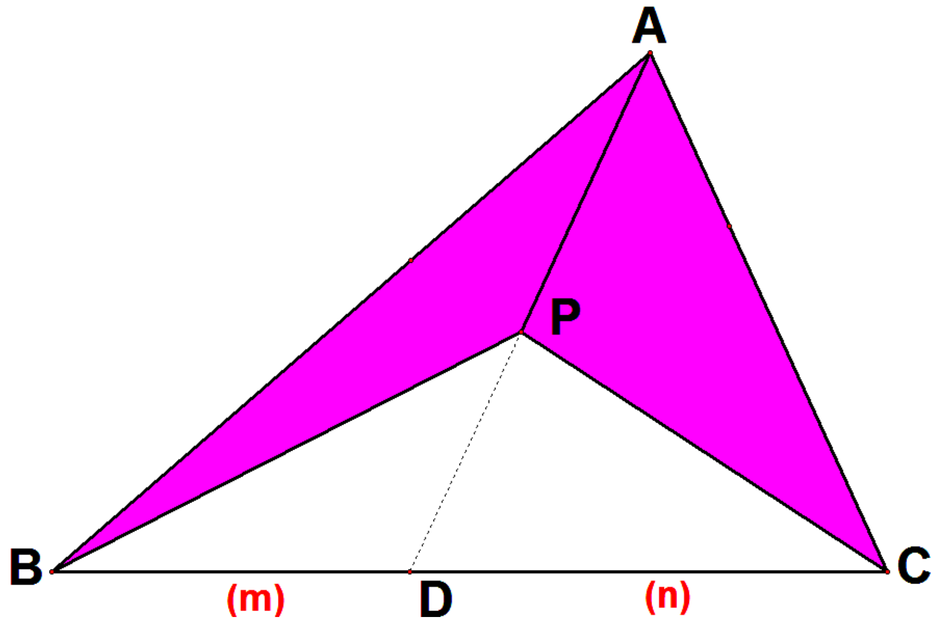

圖 47

［證明］：$\because \overline{BD}:\overline{CD}=m:n$ $\therefore \Delta ABD:\Delta ACD=m:n$

假設 $\Delta ABD=m\alpha$ 、 $\Delta ACD=n\alpha$

同理 $\Delta PBD:\Delta PCD=m:n$

假設 $\Delta PBD=m\beta$ 、 $\Delta PCD=n\beta$

$\Rightarrow \Delta ABP:\Delta ACP=(\Delta ABD-\Delta PBD):(\Delta ACD-\Delta PCD)$

$=(m\alpha-m\beta):(n\alpha-n\beta)=m(\alpha-\beta):n(\alpha-\beta)=m:n$

（四）第四個聯想：由前面的討論和圖形的觀察，我們聯想到：是否可在給定的三角形內部找到一點 P，使得 ΔABP 面積：ΔBCP 面積：ΔACP 面積等於任意的一組比例（如 3：4：5）呢？

經過我們的討論之後，答案是『肯定的』。

[尺規作圖]在ΔABC的內部找到一點P，

使得ΔABP面積：ΔBCP面積：ΔACP面積＝m：n：t

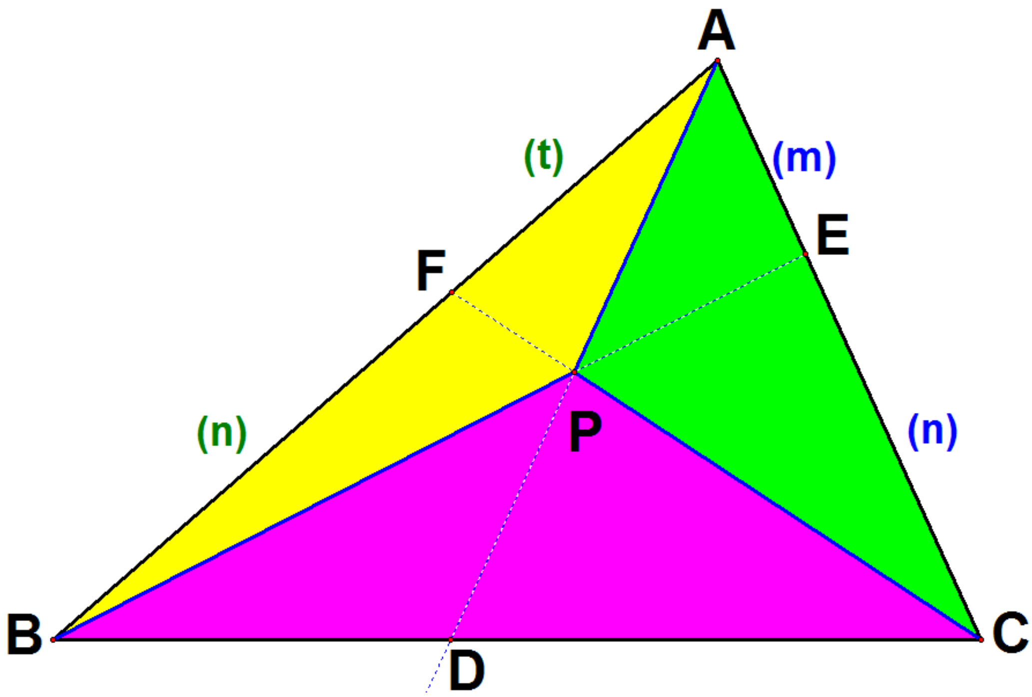

圖 48

[作法]：1. 在$\overline{AC}$上取E點使$\overline{AE}:\overline{EC}=m:n$

2. 在$\overline{AB}$上取F點使$\overline{AF}:\overline{FB}=t:n$

3. 連$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於P點即為所求。

[證明]：$\because \overline{AE}:\overline{EC}=m:n$　　根據定理四

$\therefore \Delta ABP$面積：ΔBCP面積＝m：n

$\because \overline{AF}:\overline{FB}=t:n$　　根據定理四

$\therefore \Delta BCP$面積：ΔACP面積＝n：t

$\Rightarrow \Delta ABP$面積：ΔBCP面積：ΔACP面積＝m：n：t

[註]若延長$\overline{AP}$交$\overline{BC}$於 D，　　根據[定理三]

則 $\overline{BD}:\overline{CD}=(m\times n):(n\times t)=m:t$

$\Rightarrow$ ΔABP 面積：ΔACP 面積＝m：t

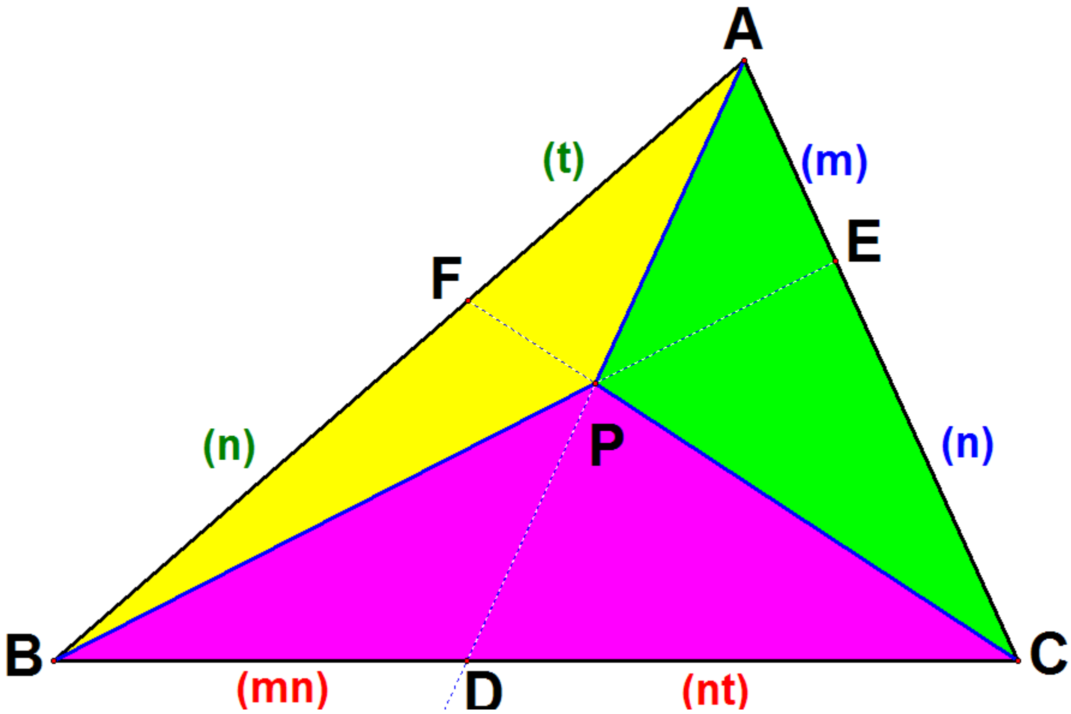

圖 49

（五）第五個聯想：當ΔABC 的重心為 G 時，則ΔABG 面積＝ΔBCG 面積＝ΔACG 面積，且 G 點必定在ΔABC 的內部。我們聯想到：在平面上是否存在著另外的 P 點，可使得ΔABP 面積＝ΔBCP 面積＝ΔACP 面積呢?

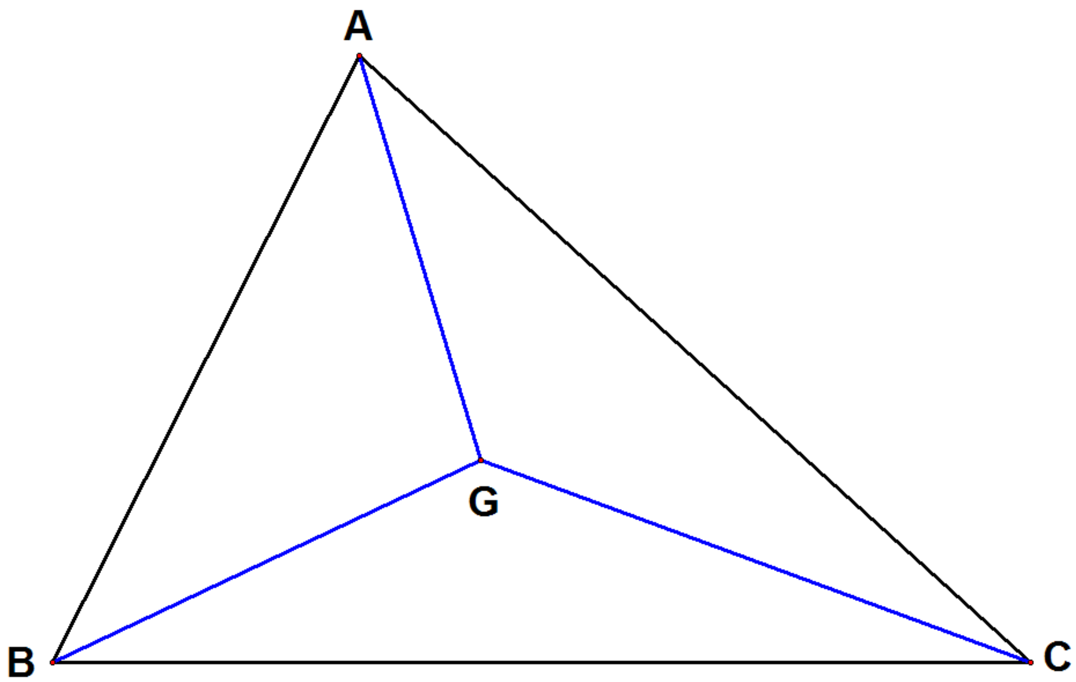

圖 50

1. 先考慮ΔABC的『內部』的點：

［想法 1］：

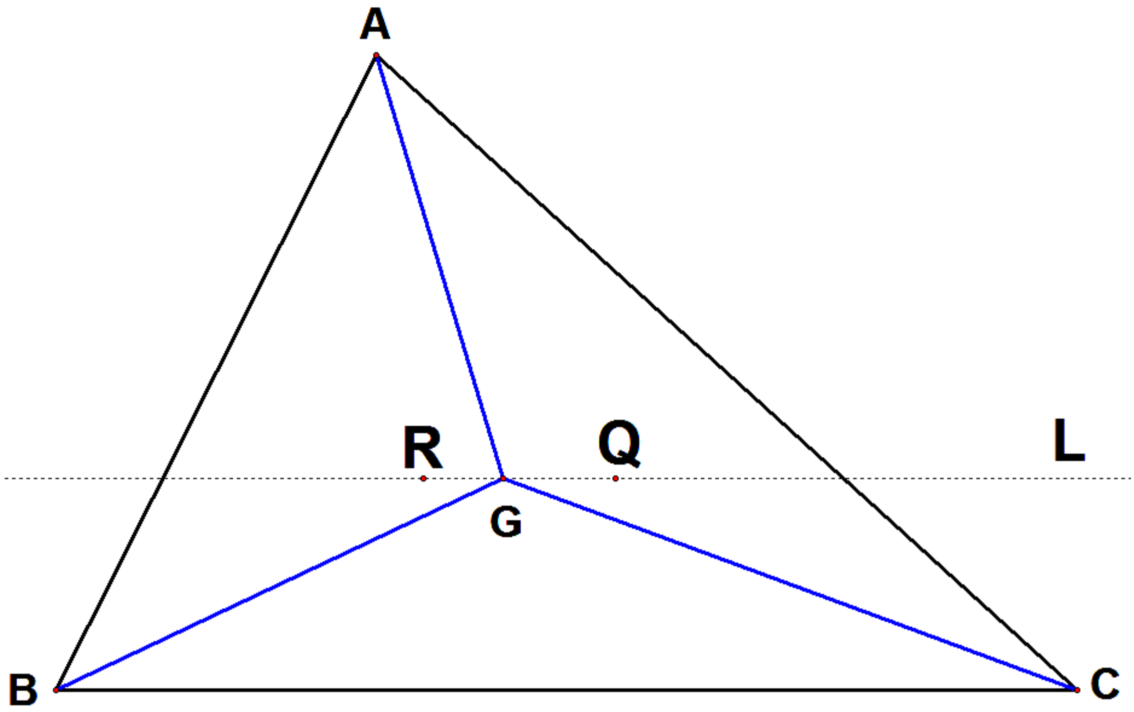

圖 51

因為ΔABG面積＝ΔBCG面積＝ΔACG面積

所以ΔBCG面積＝$\dfrac{1}{3}\Delta ABC$面積＝定值

若ΔBCP面積＝ΔBCG面積　　　　則必須$\overline{PG}//\overline{BC}$才行

過 G 點作 $L//\overline{BC}$，則 P 點必在 L 上

可是若將 G 左移至 R，則$\Delta ABR < \Delta ABG = \dfrac{1}{3}\Delta ABC$；而$\Delta ACR > \Delta ACG = \dfrac{1}{3}\Delta ABC$

$\Rightarrow \Delta ABR \neq \Delta ACR$

同理，若右移至 Q，也是不對的。

[想法 2]：

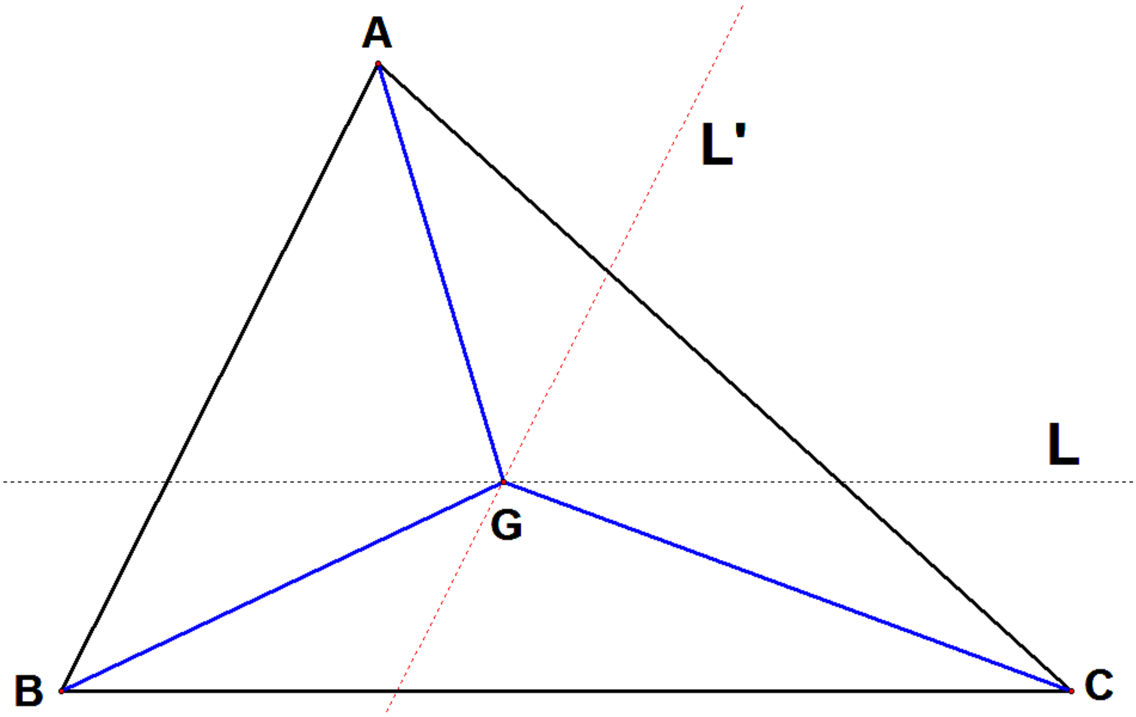

圖 52

因為 ΔABG 面積＝ΔBCG 面積＝ΔACG 面積

所以 ΔABG 面積＝ΔBCG 面積＝ΔACG 面積＝$\frac{1}{3}\Delta ABC$ 面積＝定值

若 ΔBCP 面積＝ΔBCG 面積 $\Rightarrow \overline{PG}//\overline{BC}$

若 ΔABP 面積＝ΔABG 面積 $\Rightarrow \overline{PG}//\overline{AB}$

過 G 點作 $L//\overline{BC}$ 、作 $L'//\overline{AB}$

則 P 點必在 L 上、且 P 點必在 L' 上 $\Rightarrow P = G$

［定理五］：若 P 點位於ΔABC的內部且ΔABP面積＝ΔBCP面積＝ΔACP面積，則 P＝G（G 為ΔABC的重心）

［證明］：

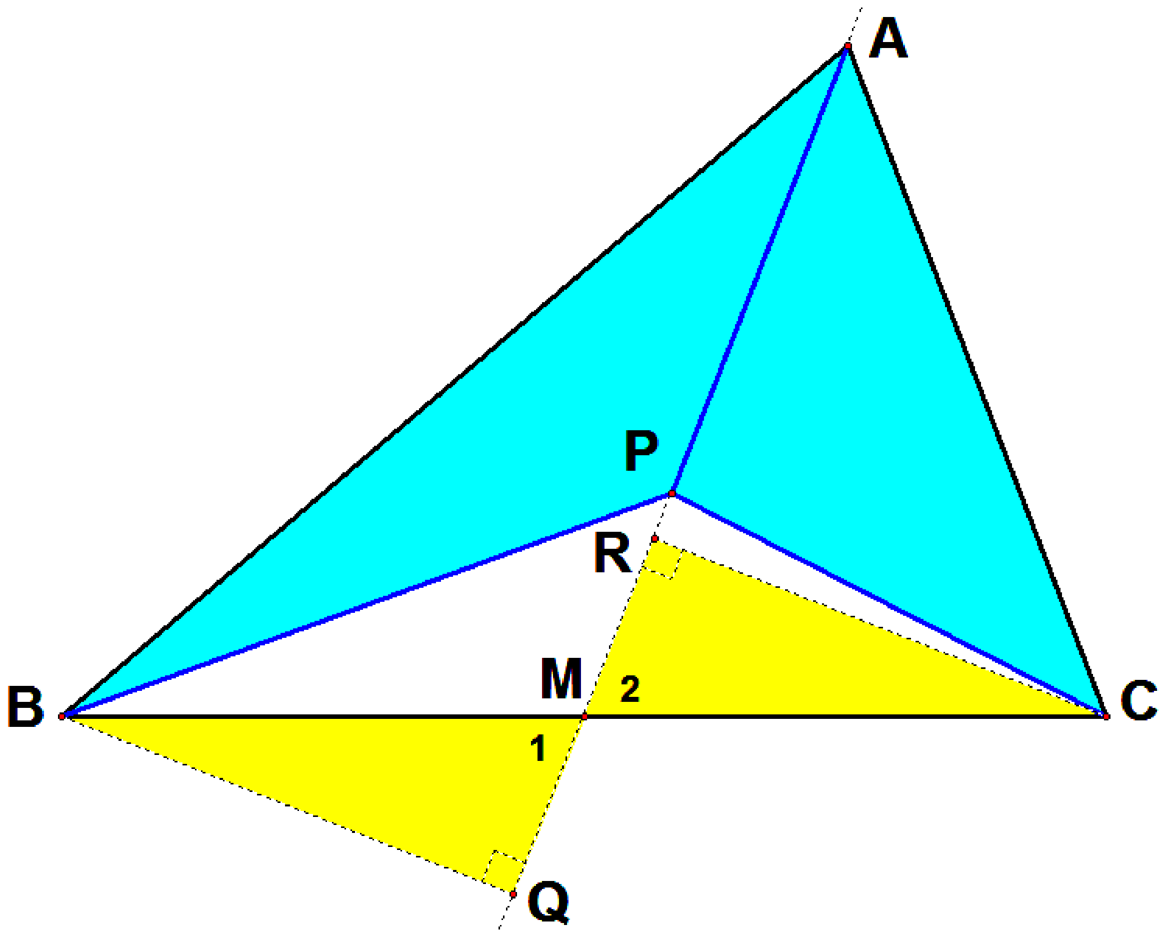

圖 53

1° 作直線 AP 交$\overline{BC}$於 M 點

分別過 B、C 做$\overline{BQ}$、$\overline{CR}$垂直於直線 AP 且交直線 AP 於 Q、R

2° $\because \Delta ABP$面積＝ΔACP面積（以$\overline{AP}$為公共底）

$\therefore \overline{BQ} = \overline{CR}$

又$\because \angle 1 = \angle 2$，$\angle BQM = \angle CRM = 90°$，　　$\therefore \Delta BQM \cong \Delta CRM$（AAS 全等性質）

$\Rightarrow \overline{BM} = \overline{CM}$（M 為$\overline{BC}$的中點）

3° 同理，直線 BP 過$\overline{AC}$的中點、直線 CP 過$\overline{AB}$的中點

所以 P＝G

2. 再考慮 ΔABC『外部』的點：

［思考過程］：

（1）$\because$ ΔABP 面積＝ΔBCP 面積＝ΔACP 面積

所以 ΔABP 面積：ΔBCP 面積：ΔACP 面積＝1：1：1

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}\times d(P,\overline{AB})}{2}:\frac{\overline{BC}\times d(P,\overline{BC})}{2}:\frac{\overline{AC}\times d(P,\overline{AC})}{2}=1:1:1$$

$$\Rightarrow d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{BC}):d(P,\overline{AC})=\frac{1}{\overline{AB}}:\frac{1}{\overline{BC}}:\frac{1}{\overline{AC}}$$

$\Rightarrow d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{BC})=\overline{BC}:\overline{AB}$ 且

$d(P,\overline{BC}):d(P,\overline{AC})=\overline{AC}:\overline{BC}$ 且

$d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{AC})=\overline{AC}:\overline{AB}$

（2）先考慮 $d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{BC})=\overline{BC}:\overline{AB}$

［作法］：

（Ⅰ）做 $\angle ABD$ 的平分線 L_1，並取 E、F 點，使 $\overline{BE}=\overline{AB}$ 、 $\overline{BF}=\overline{BC}$

（Ⅱ）過 F 點做 $L_2 // \overline{AB}$ 、過 E 點做 $L_3 // \overline{BC}$

（Ⅲ）L_2 、L_3 相交於 Q，做直線 BQ，則 P 點必在直線 BQ 上

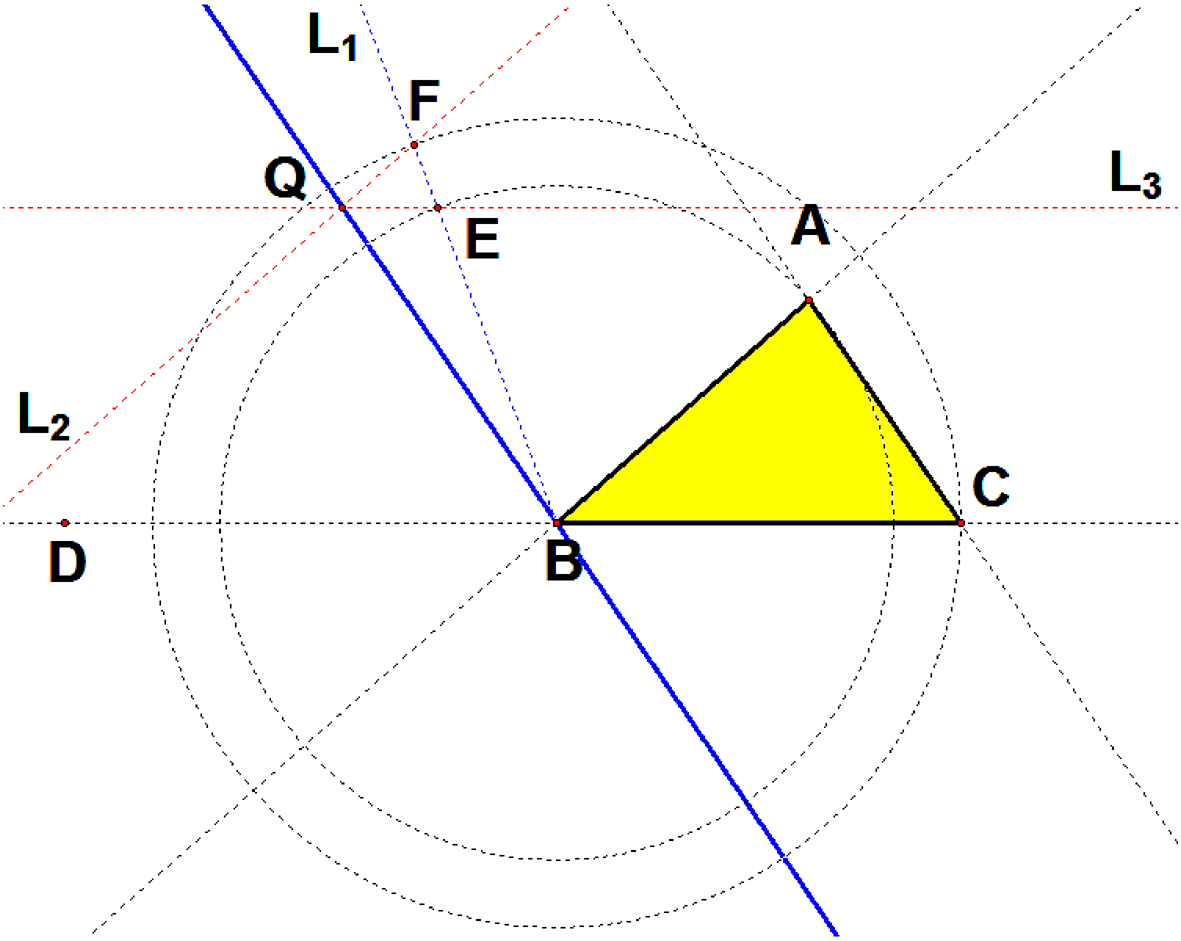

圖 54

（3）$d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{BC})=\overline{BC}:\overline{AB}$（part2）

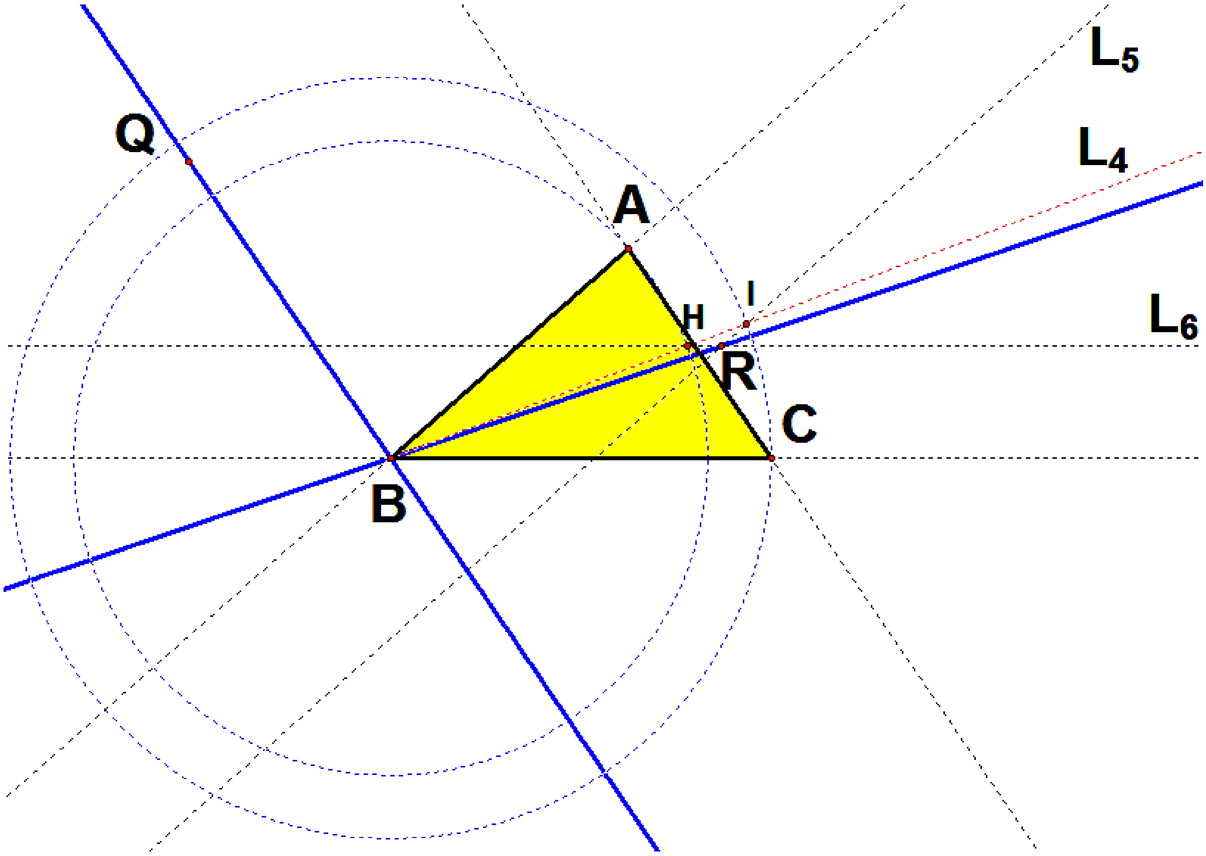

圖 55

［作法］：

（Ⅰ）做$\angle ABC$的平分線L_4，並取 H、I 點，使$\overline{BH}=\overline{AB}$、$\overline{BI}=\overline{BC}$

（Ⅱ）過 I 點做$L_5//\overline{AB}$、過 H 點做$L_6//\overline{BC}$

（Ⅲ）L_5、L_6相交於 R，做直線 BR，則 P 點必在直線 BR 上

（4）再考慮 $d(P,\overline{BC}):d(P,\overline{AC})=\overline{AC}:\overline{BC}$ 和 $d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{AC})=\overline{AC}:\overline{AB}$

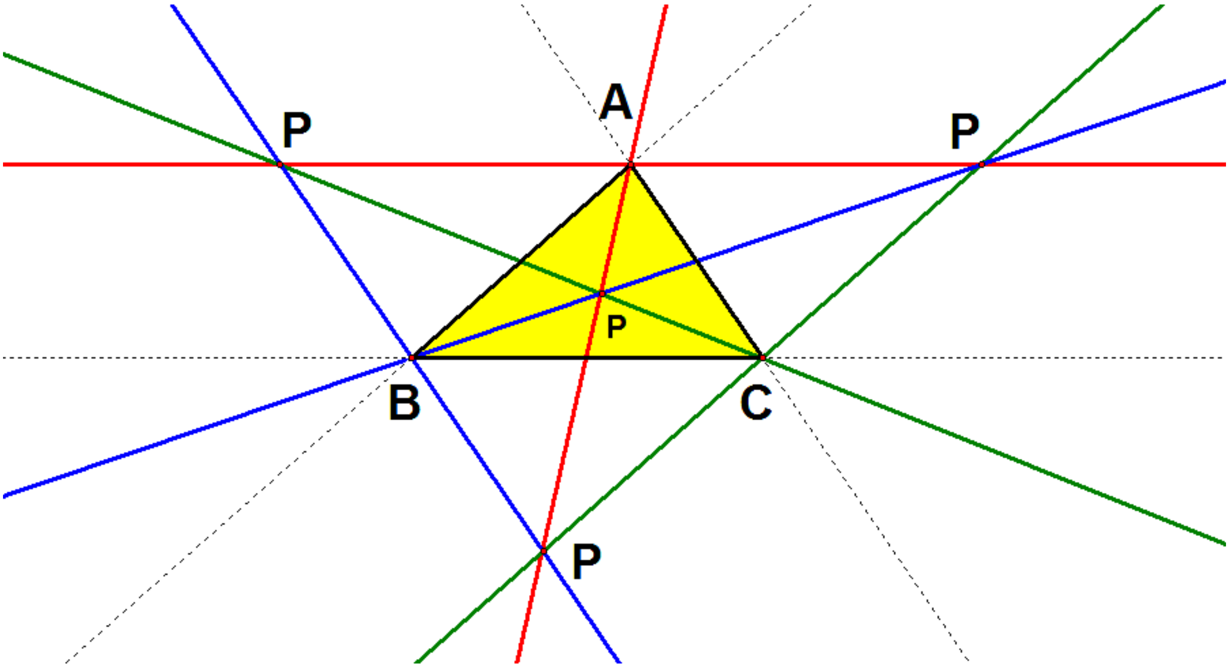

圖 56

參考前面的作圖法，做出所有符合條件的直線（如上圖 56 中，紅、藍、綠色的直線）最後，共有三個 P 點符合題目的要求。

5.［本小題的觀察］：

（1）最後的答案中，若以 A、B、C 為三頂點，再加上任一個 P 點，都會形成平行四邊形。

（2）內部的 P 點正好是外面三個 P 點所形成三角形的『重心』。

（六）第六個聯想：如果將第四個聯想再往「外」推廣，就是我們的第六個聯想：「是否可在給定三角形的『外部』找到 P 點，使得 ΔABP 面積：ΔBCP 面積：ΔACP 面積等於任意的一組比例（如 3：4：5）呢？」

［思考過程］：

1. 我們以 ΔABP 面積：ΔBCP 面積：ΔACP 面積＝3：4：5 為例作探討：

因為 ΔABP 面積：ΔBCP 面積：ΔACP 面積＝3：4：5

所以 $\frac{\overline{AB}\times d(P,\overline{AB})}{2}:\frac{\overline{BC}\times d(P,\overline{BC})}{2}:\frac{\overline{AC}\times d(P,\overline{AC})}{2}=3:4:5$

$\Rightarrow d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{BC}):d(P,\overline{AC})=\frac{3}{\overline{AB}}:\frac{4}{\overline{BC}}:\frac{5}{\overline{AC}}$

$\Rightarrow d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{BC})=3\overline{BC}:4\overline{AB}$ 且

$d(P,\overline{BC}):d(P,\overline{AC})=4\overline{AC}:5\overline{BC}$ 且

$d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{AC})=3\overline{AC}:5\overline{AB}$

2. 參考前面的作圖法，完成圖如下圖，做出所有符合條件的直線(如下圖 57 中，紅、藍、綠色的直線)，最後，共有 3 個 P 點符合題目的要求。

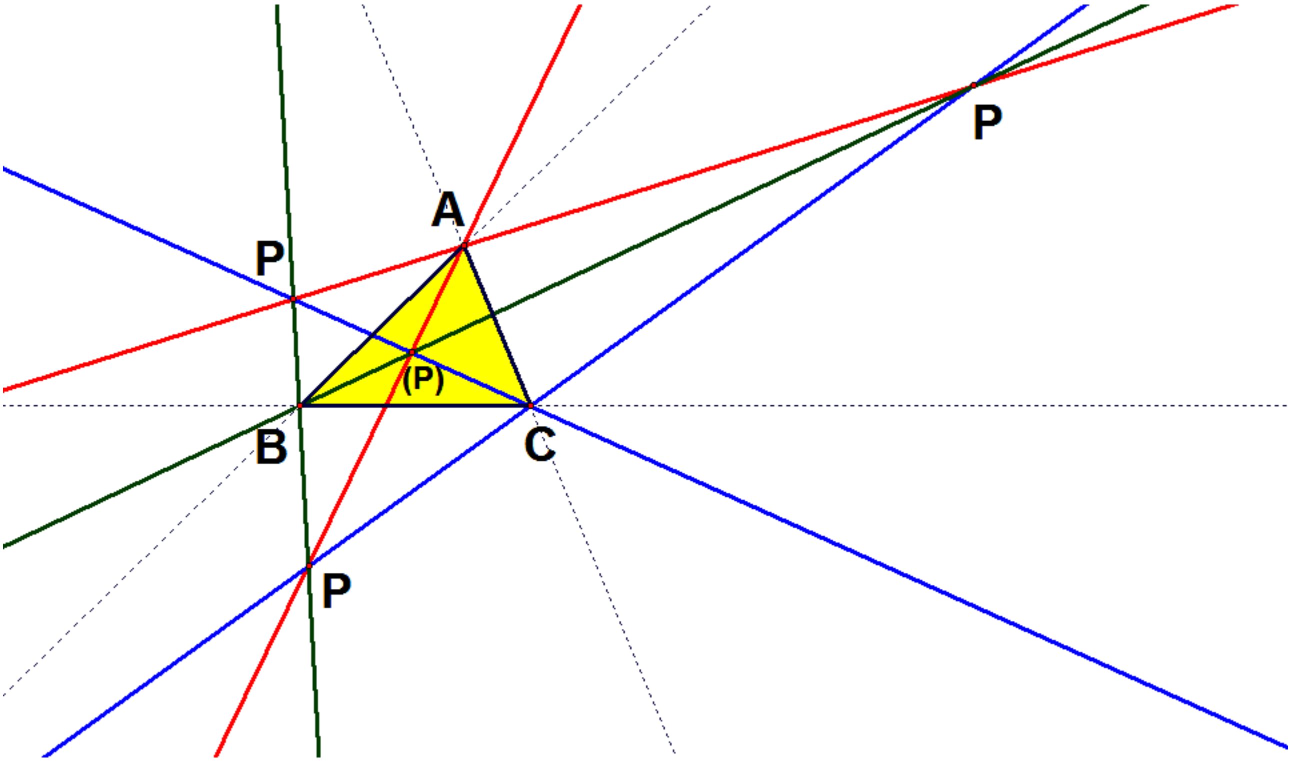

圖 57

3. 下圖我們將完成圖的所有痕跡完整呈現出來，這個圖如果不仔細看，可能以為是某個畫壞掉的圖呢！

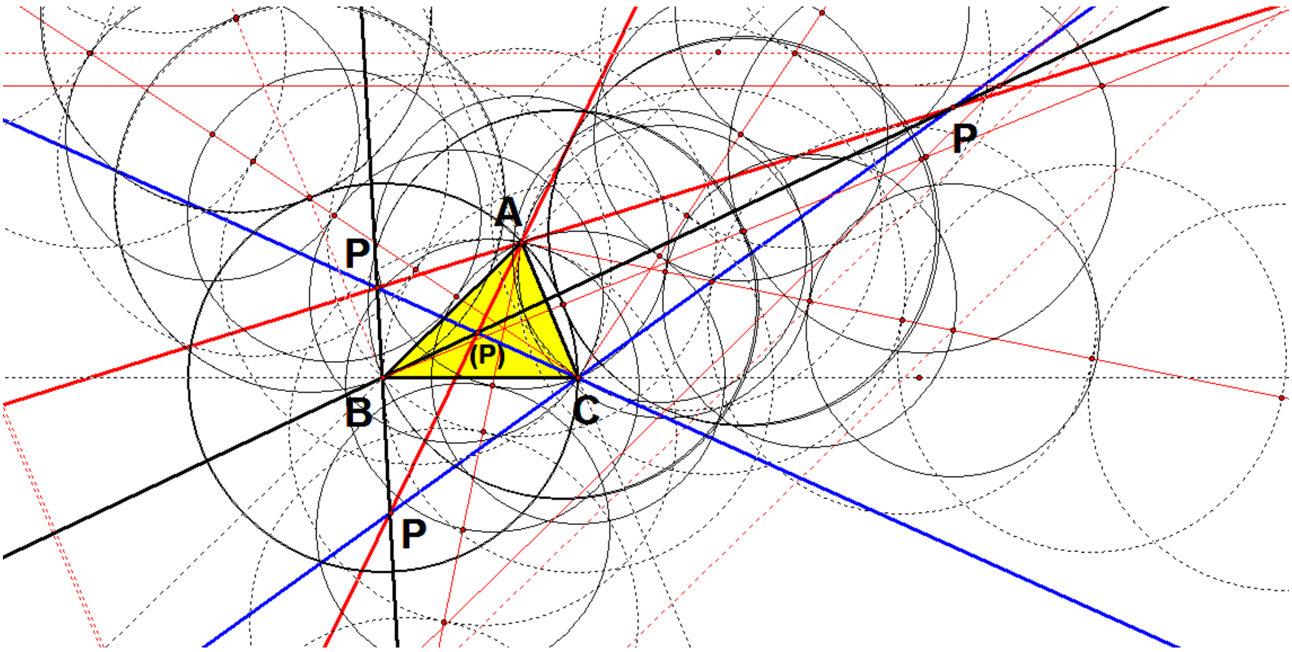

圖 58

四、三角形『垂心』的延伸探討：

（一）根據定義，『垂心』是三角形的三高（或延長線）的交點。如下圖，三角形的三高所在的直線：AD、BE、CF 的交點 H，即是三角形 ABC 的『垂心』。

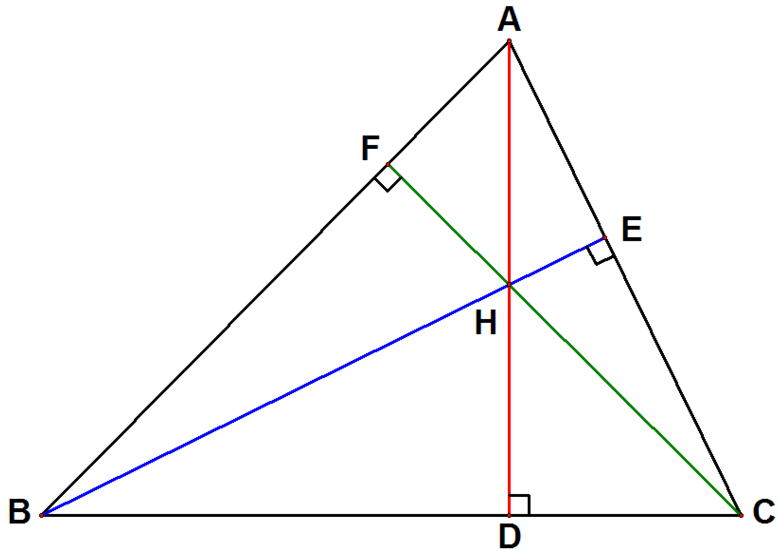

圖 59

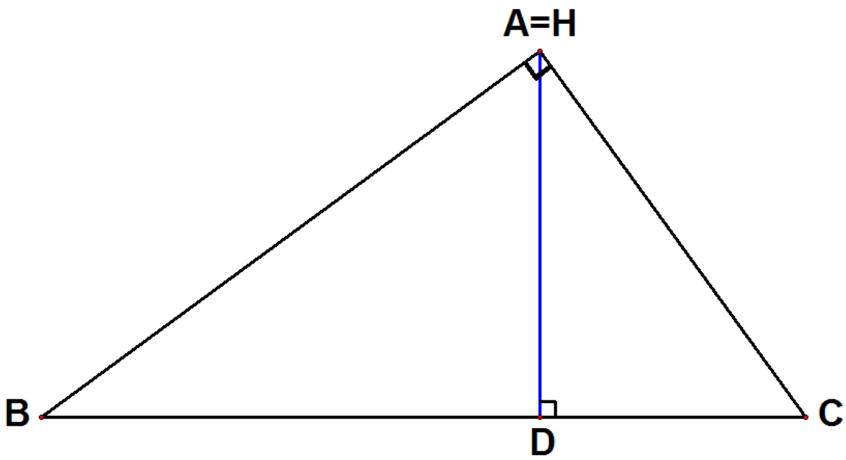

圖 60

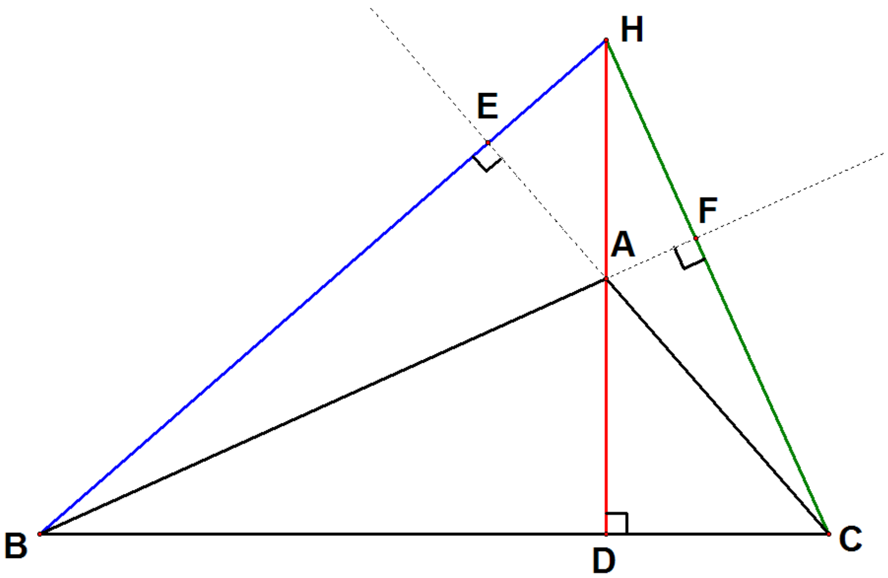

圖 61

可是課本沒有證明，要如何證明呢?

1. 我們去搜尋資料，文獻上有一個非常特別的證明，不需計算，只要利用三角形的三條中垂線共點即可得到證明。

（1）銳角三角形三高共點。

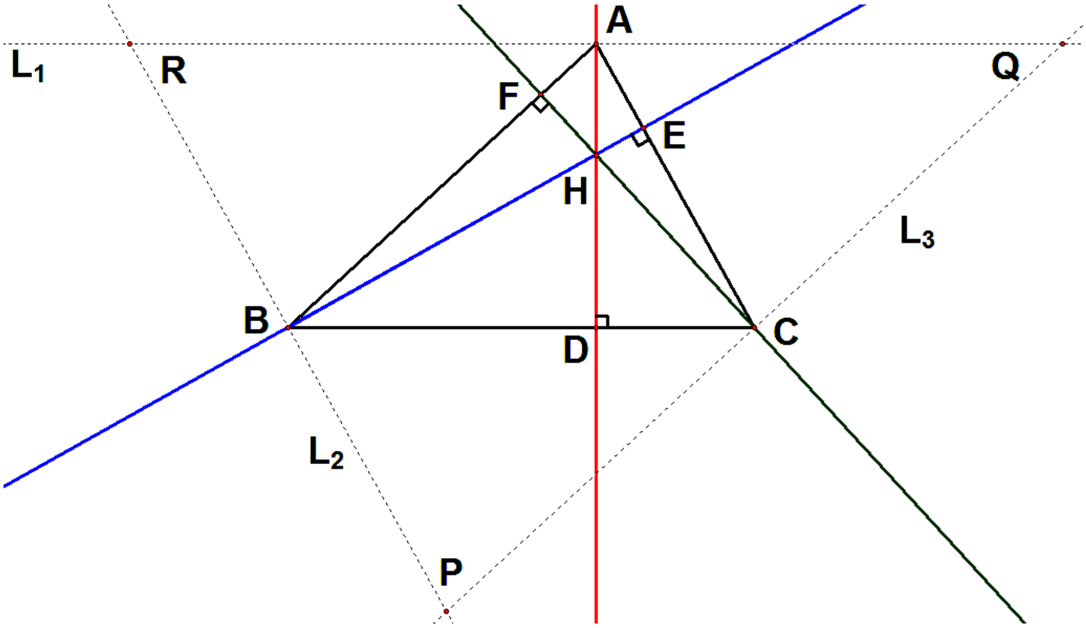

圖 62

[證明]：

（Ⅰ)先過 A 點做直線 $L_1 // \overline{BC}$；過 B 點做直線 $L_2 // \overline{AC}$；過 C 點做直線 $L_3 // \overline{AB}$。

（Ⅱ） L_1 、L_2 交於 R；L_2 、L_3 交於 P；L_1 、L_3 交於 Q。

（Ⅲ） 可知四邊形 ABCQ、ABPC、ACBR 都是平行四邊形。

$\Rightarrow$A、B、C 分別為 $\overline{RQ}$ 、$\overline{PR}$ 、$\overline{PQ}$ 的中點。

（Ⅵ） $\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{RQ} // \overline{BC}$ $\therefore \overline{AD} \perp \overline{RQ} \Rightarrow \overline{AD}$ 是 $\overline{RQ}$ 的中垂線

同理 $\overline{BE}$ 是 $\overline{PR}$ 的中垂線、$\overline{CF}$ 是 $\overline{PQ}$ 的中垂線

（Ⅴ） 因為 ΔPQR 的三條中垂線共點

所以 $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 共點。

（2）直角三角形三高共點。

[證明]略

（3）鈍角三角形三高共點。

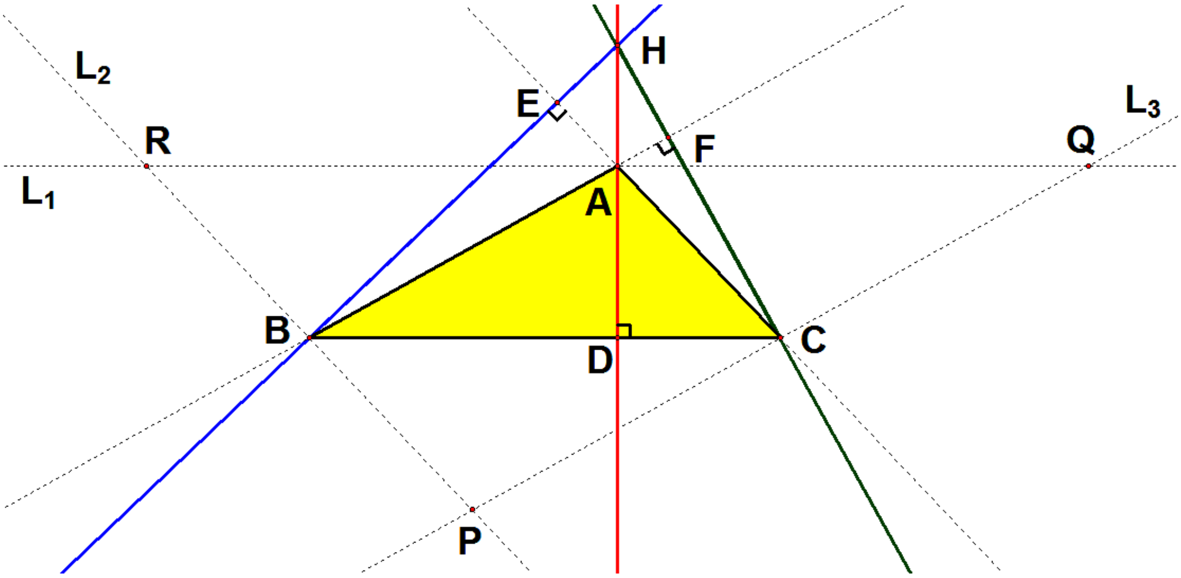

圖 63

[證明]參考銳角三角形三高共點的證明。

2. 尋找自己的證法：因為前面的證法雖然特別，可是那畢竟是屬於別人的方法，我們想要找自己的方法，經過討論後發現，可以利用前面[定理三]判斷三線共點的方法來證明：「任意三角形三高（或延長線）確實共點。」

（1）銳角三角形三高共點。

若 ΔABC 為銳角三角形，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為 ΔABC 的三高，垂足為 D、E、F，

則 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 共點。

[證明]：

1°

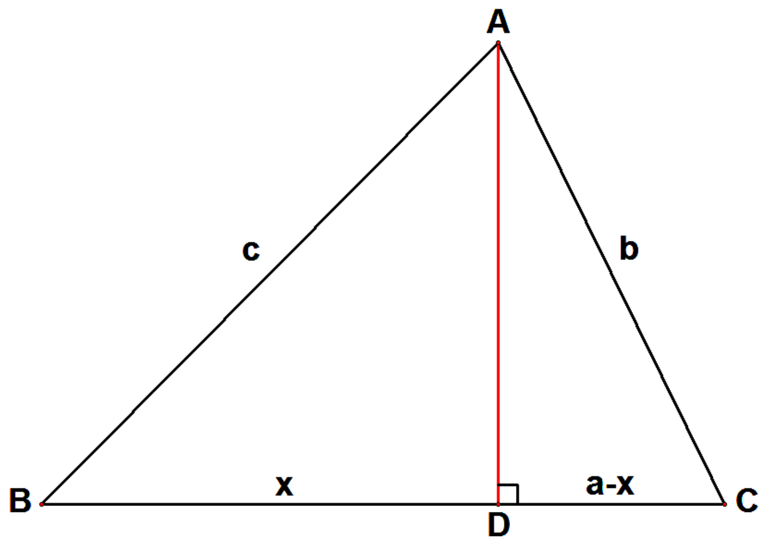

圖 64

設 $\overline{BD}=x$，則 $\overline{CD}=a-x$

$\because \overline{AD}\perp\overline{BC}$

$\therefore c^2-x^2=\overline{AD}^2=b^2-(a-x)^2 \quad \Rightarrow \therefore c^2-x^2=b^2-a^2+2ax-x^2$

解得 $\overline{BD}=x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a} \quad \Rightarrow \overline{CD}=a-x=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

$\Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}:\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}=(a^2+c^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)$

2°

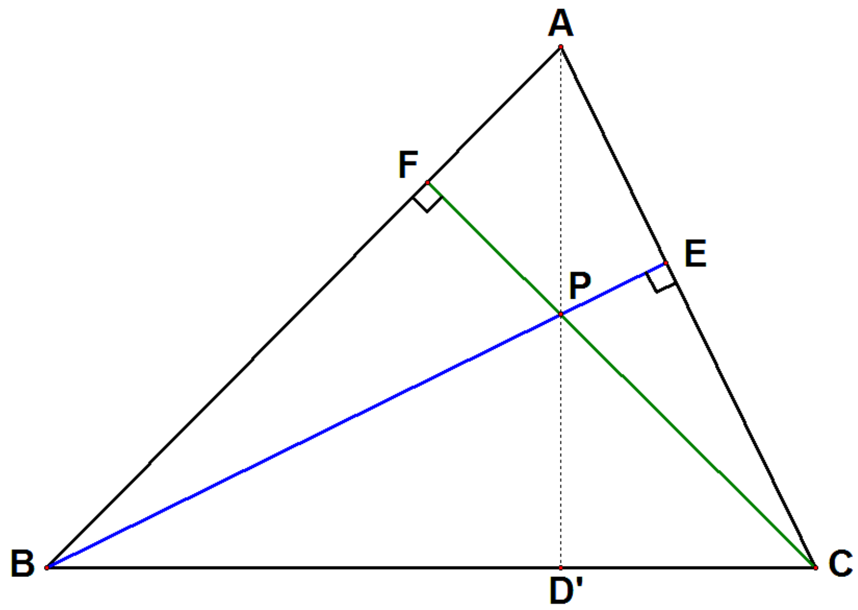

圖 65

同理可得

$\overline{AE}:\overline{EC}=(b^2+c^2-a^2):(a^2+b^2-c^2)$

$\overline{AF}:\overline{FB}=(b^2+c^2-a^2):(a^2+c^2-b^2)$

設 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 P，直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D'

根據[定理三]的結果，可得

$\overline{BD'}:\overline{D'C}=\overline{AE}\times\overline{BF}:\overline{AF}\times\overline{EC}=(a^2+c^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)$

3°

比較1°、2°，可知 $D=D'$ 　所以 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 共點。

（2）直角三角形三高共點。

[證明]略

（3）鈍角三角形三高（或延長線）共點。

直線 AD、BE、CF 為鈍角 ΔABC 的三高所在的直線，則直線 AD、BE、CF 共點。

［證明］

1° 設直線 BE、CF 交於 H 點

連接直線 HA 交 $\overline{BC}$ 於 D'，設 $\overline{AF}=\alpha$ 、 $\overline{AE}=\beta$

$\because \angle BFC=90^\circ$ $\quad\therefore a^2-(c+\alpha)^2=\overline{CF}^2=b^2-\alpha^2$

$\Rightarrow \overline{AF}=\alpha=\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2c}$ $\quad\Rightarrow \overline{BF}=c+\alpha=c+\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2c}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}$

又 $\because \angle BEC=90^\circ$ $\quad\therefore a^2-(b+\beta)^2=\overline{BE}^2=c^2-\beta^2$

$\Rightarrow \overline{AE}=\beta=\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2b}$ $\quad\Rightarrow \overline{CE}=b+\beta=b+\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2b}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$

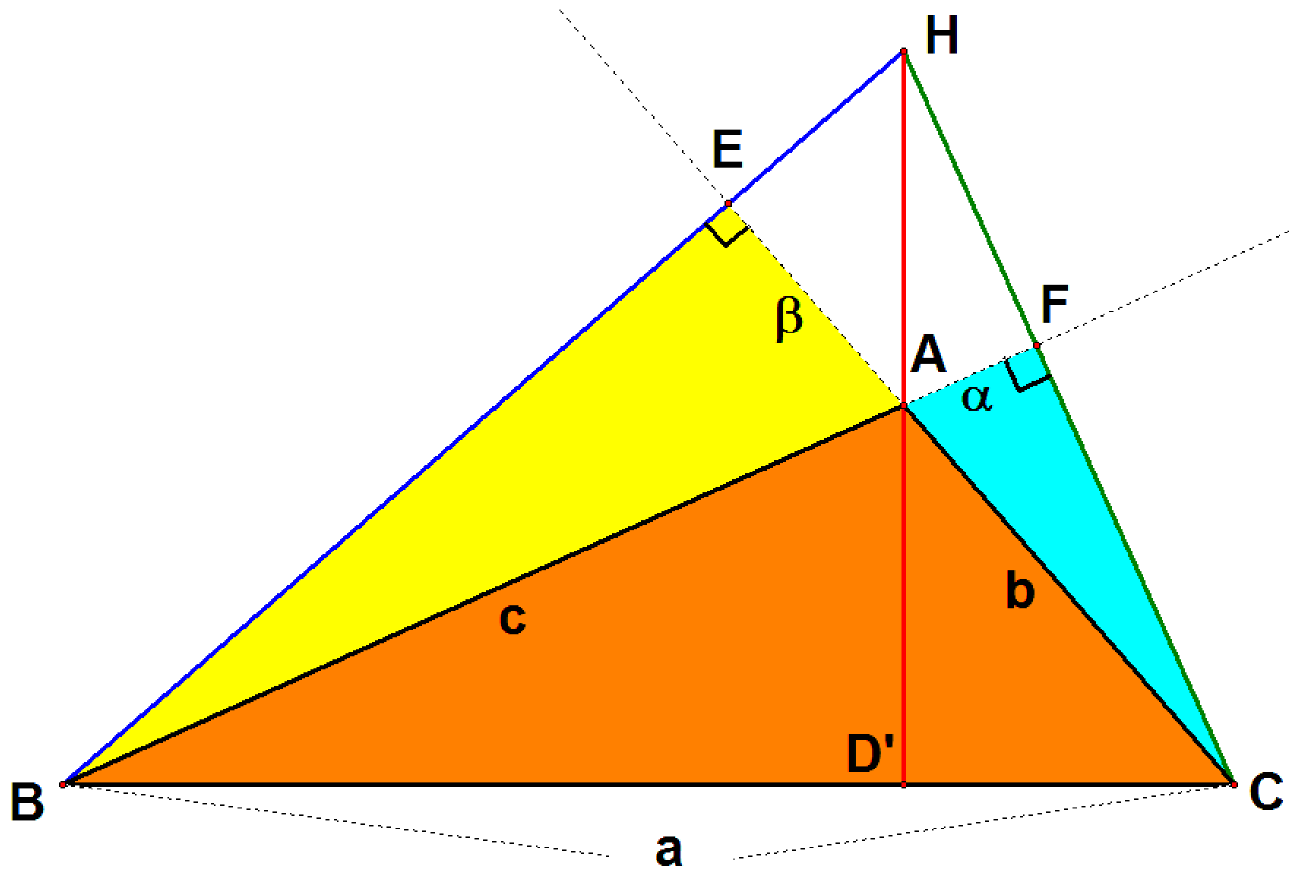

圖 66

2° 再 $\because \angle BFH=90^\circ$ 且 $\angle HEC=90^\circ$

$\therefore \angle 1+\angle BHF=90^\circ=\angle 2+\angle CHE$ $\quad\Rightarrow \therefore \angle 1=\angle 2$

又 $\because \angle BHF=\angle CHE$

$\therefore \Delta HBF\sim\Delta HCE$（AA 相似性質）

$\Rightarrow \overline{HF}:\overline{HE}=\overline{BF}:\overline{CE}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{HF}}{\overline{HE}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{CE}}=\frac{c+\alpha}{b+\beta}=\frac{b\cdot(a^2+c^2-b^2)}{c\cdot(a^2+b^2-c^2)}$$

又根據[定理三]的結果，可得

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}=\frac{\overline{HF}\times\overline{BE}}{\overline{HE}\times\overline{CF}}=\frac{\overline{HF}}{\overline{HE}}\times\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$ 將上式代入

$$=\frac{b\cdot(a^2+c^2-b^2)}{c\cdot(a^2+b^2-c^2)}\times\frac{\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2b}}{\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2c}}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}$$

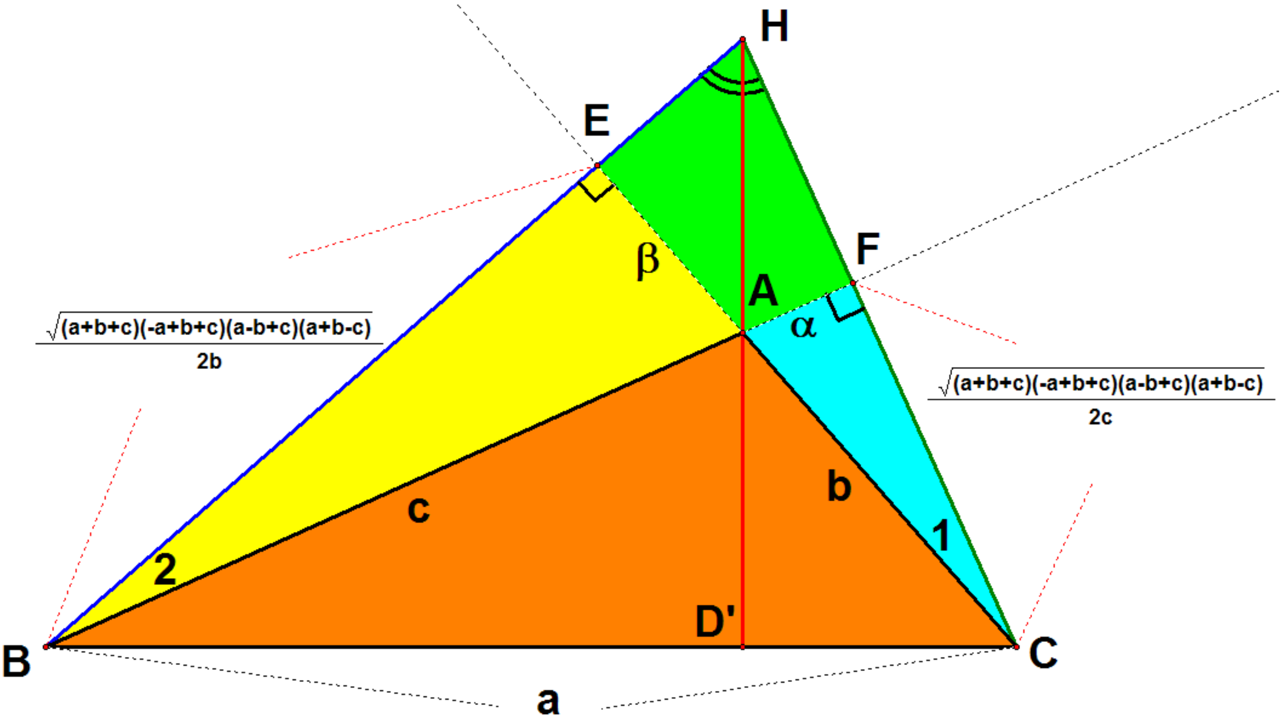

圖 67

3° 設 $\overline{BD} = x$ ，則 $\overline{CD} = a - x$

$\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore c^2 - x^2 = \overline{AD}^2 = b^2 - (a - x)^2 \quad \Rightarrow \therefore c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

解得 $\overline{BD} = x = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad \Rightarrow \overline{CD} = a - x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

因此 $\overline{BD} : \overline{CD} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} : \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = (a^2 + c^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2)$

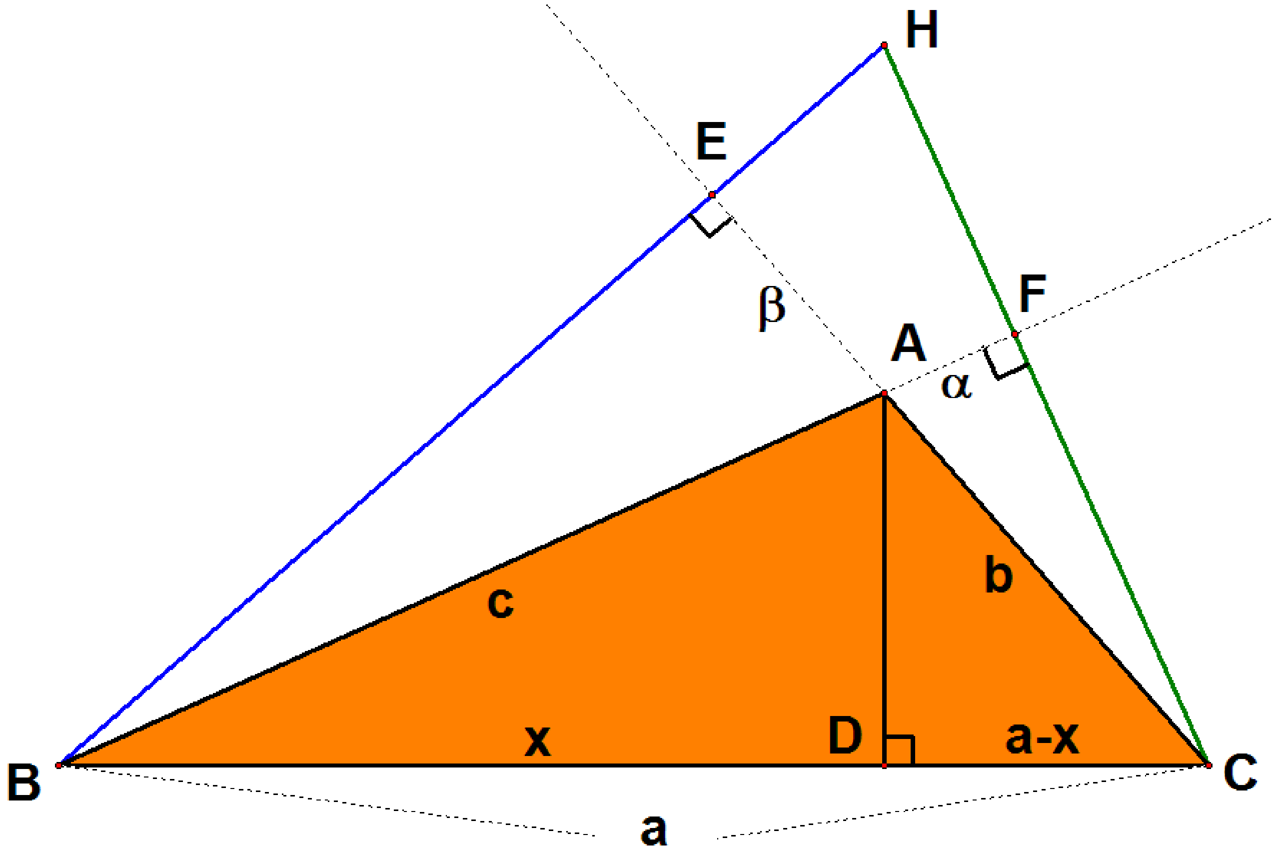

圖 68

4°

比較 2°、3°，可知 $D = D'$

所以直線 AD、BE、CF 共點。

3. 從『外心』變『垂心』再變『內心』

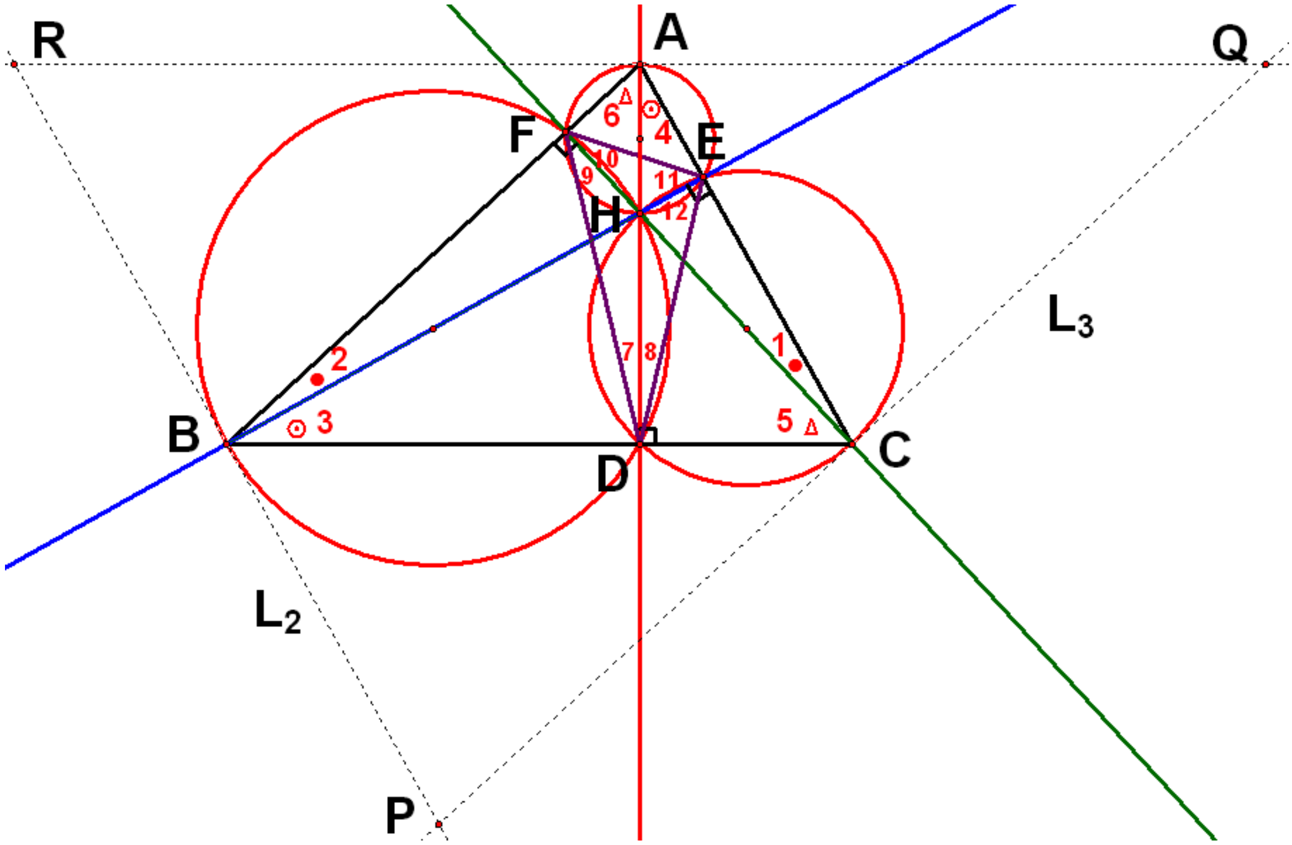

圖 69

[思考過程]：

在前面的圖 62 中，我們已經知道：H 是 ΔPQR 的『外心』，但卻是 ΔABC 的『垂心』

又在圖 67 中，證得：$\angle 1 = \angle 2$

如上圖（圖 69），雖然和圖 67 不太相同，但我們仍然可以用相同的方法證：$\angle 1 = \angle 2$

然後經過一些聯想，最後將證明：H 是 ΔDEF 的『內心』。

[問題]：證明圖 69 中，H 是 ΔDEF 的『內心』。

[證明]：(1) $\because \overline{BE} \perp \overline{AC}$ 、$\overline{CF} \perp \overline{AB}$

$\therefore \angle 1 + \angle CAF = \angle 2 + \angle BAE = 90^\circ$

又 $\because \angle CAF = \angle BAE$　　$\therefore \angle 1 = \angle 2$

同理可證 $\angle 3 = \angle 4$ 、$\angle 5 = \angle 6$

(2) $\because \angle AEH + \angle AFH = 180^\circ$　　$\therefore$ A、E、H、F 四點共圓

同理可證：C、D、H、E 四點共圓 B、D、H、F 四點共圓

(3) 因為 B、D、H、F 四點共圓　　所以 $\angle 7 = \angle 2$（對同弧）

又因為 C、D、H、E 四點共圓　　所以 $\angle 8 = \angle 1$（對同弧）

由 (1) $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle 7 = \angle 8$

(4) 同理可證：$\angle 9 = \angle 10$ 、$\angle 11 = \angle 12$

$\Rightarrow$ H 為 ΔDEF 三條內角平分線的交點

$\Rightarrow$ H 是 ΔDEF 的『內心』。

所以 **H 點是 ΔPQR 的『外心』；但卻是 ΔABC 的『垂心』；又是 ΔDEF 的『內心』。**

五、三角形『傍心』的延伸探討：

將『內心』的概念向三角形的外部延伸時，發現三角形的外部另有三個點，也和『內心』有相同的特性：就是到三角形的三邊等距。這三個點都是由三角形的一條內角平分線和另二角的外角平分線相交得到的。這三個點就是三角形的三個『傍心』。

和『內心』相同，『傍心』到三角形的三邊等距，因此我們也可以用『傍心』為圓心，『傍心』到三角形任一邊的距離為半徑畫圓，此圓和三角形的三邊(或延長線)都相切，這種圓就是三角形的『傍切圓』。

但是在我們用 GSP 觀察『傍切圓』時，『傍切圓』不像『內切圓』被限制在三角形的內部，『傍切圓』有時候很小，但是有時卻很大（如下二圖）。為什麼會這樣呢？『傍切圓』的半徑可以求出來嗎?

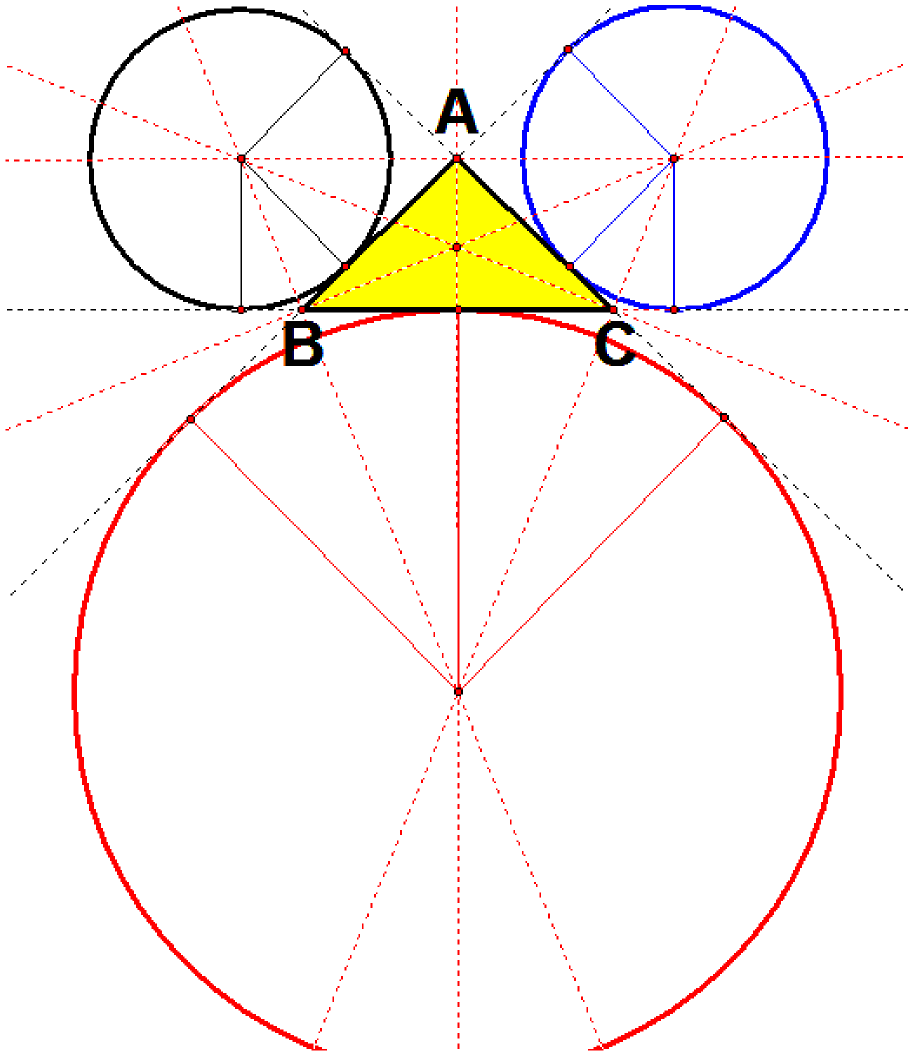

圖 70

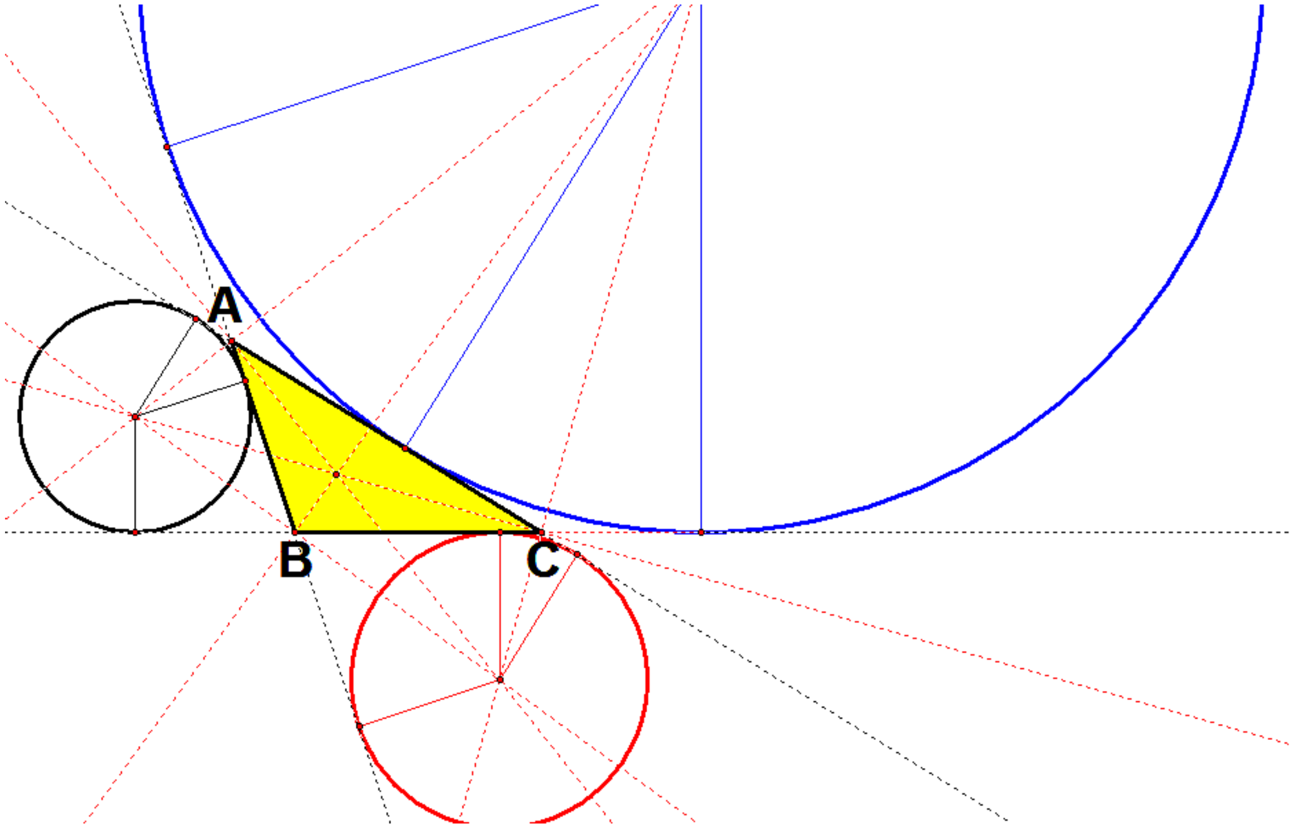

圖 71

（一）三角形『內切圓』半徑求法：

課本有提到求『內切圓』半徑的求法：

利用公式：三角形面積$=\frac{1}{2}\times$三角形周長×『內切圓』半徑

若 ΔABC 三邊長分別為 a、b、c，內切圓半徑為 r

導入公式：ΔABC 面積$=\frac{1}{2}\times(a+b+c)\times r$，根據『海龍公式』

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}=\frac{1}{2}\times(a+b+c)\times r$$

$$\Rightarrow r=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{(a+b+c)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{(a+b+c)}}$$

（二）三角形『傍切圓』半徑求法：

1. 銳角三角形『傍切圓』半徑求法：

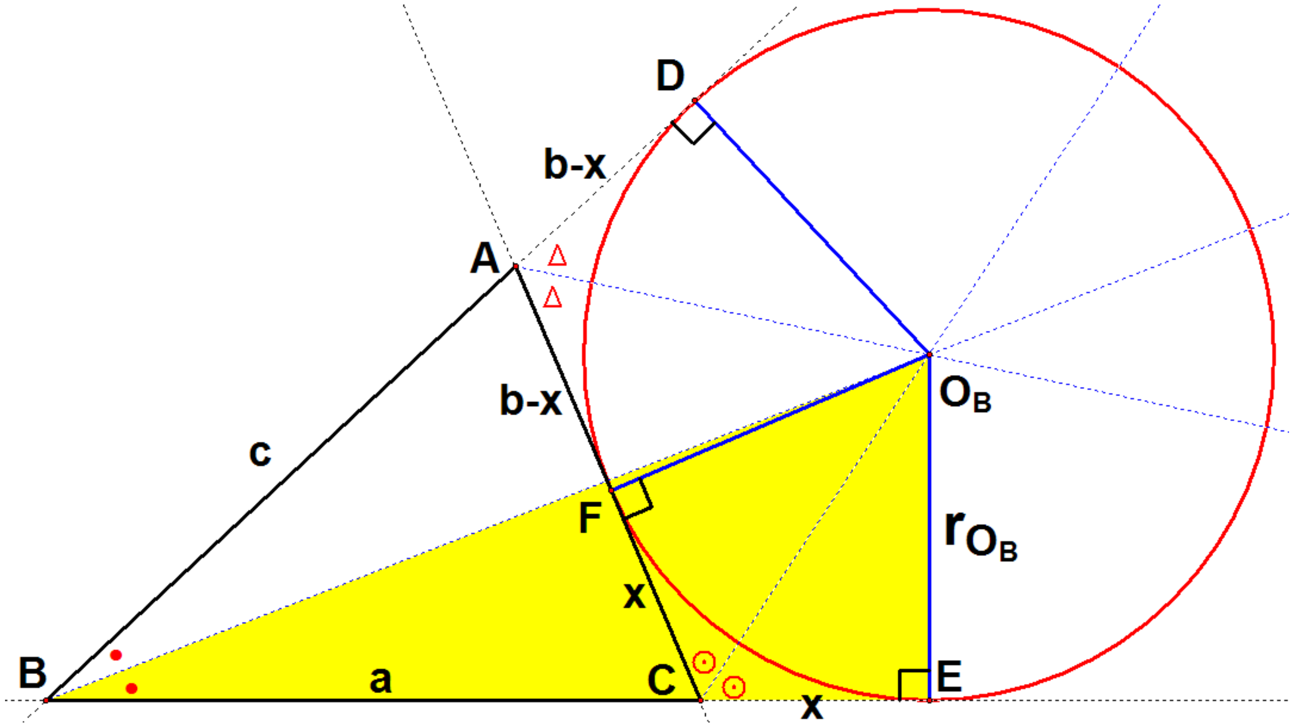

圖 72

（1）設$\angle B$的內角平分線與$\angle A$、$\angle C$的外角平分線交於點O_B，

圓O_B切ΔABC三邊（或延長線）$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$於 D、E、F

根據切線段的性質可知：$\overline{CE}=\overline{CF}$、$\overline{AD}=\overline{AF}$、$\overline{BD}=\overline{BE}$

設$\overline{CE}=\overline{CF}=x$，則$\overline{AD}=\overline{AF}=b-x$　（$\because \overline{AC}=b$）

代入$\overline{BD}=\overline{BE}$中

$$\Rightarrow a+x=c+(b-x)\quad \Rightarrow x=\frac{b+c-a}{2}\quad \Rightarrow \overline{BE}=a+x=a+\frac{b+c-a}{2}=\frac{a+b+c}{2}$$

（2）觀察ΔBEO_B，有一角為直角，另一角為等於$\frac{1}{2}\angle B$

我們可以利用ΔABC，製造一個與ΔBEO_B相似的Δ（ΔPHA）

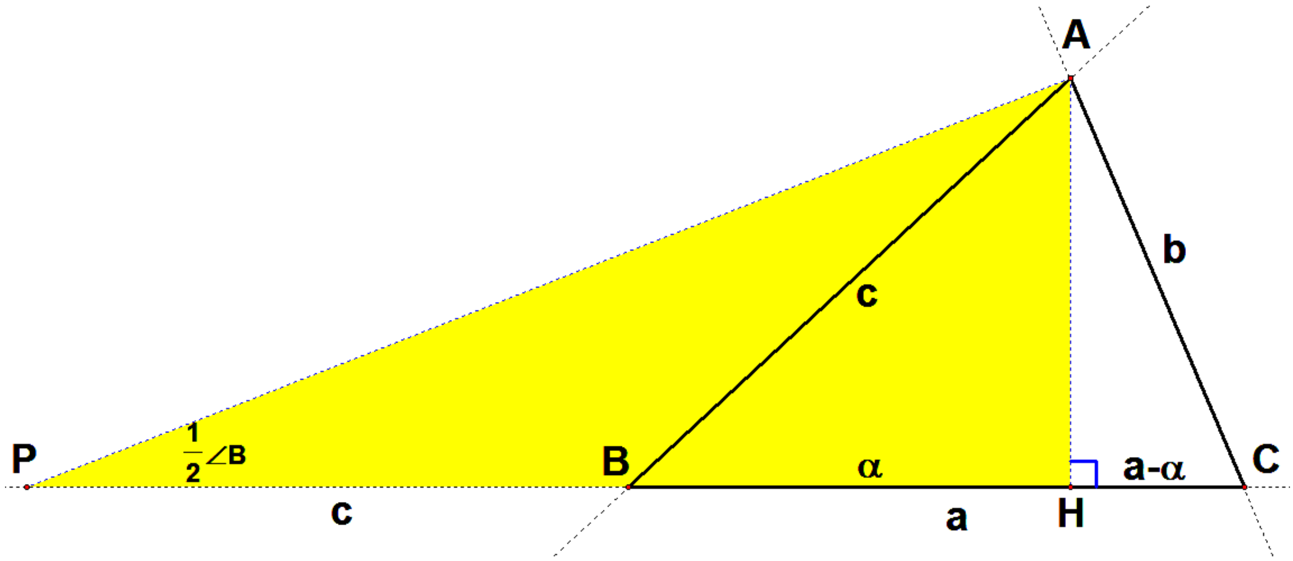

圖 73

如上圖，延長$\overline{BC}$至 P，使得$\overline{BP}=\overline{AB}=c$

根據Δ的外角定理，可得$\angle P=\frac{1}{2}\angle ABC$

在ΔABC中，作高$\overline{AH}$　　　　設$\overline{BH}=\alpha$，則$\overline{CH}=a-\alpha$

由畢氏定理，可得$c^2-\alpha^2=b^2-(a-\alpha)^2$　　　　$\Rightarrow \alpha=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

$$\Rightarrow \overline{PH}=c+\alpha=c+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}$$

另根據海龍公式：可得$\overline{AH}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2a}$

（3）$\because \Delta BEO_B \sim \Delta PHA$　　　　$\therefore \overline{BE}:\overline{PH}=\overline{EO_B}:\overline{AH}$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{2}:\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}=r_{O_B}:\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2a}$$

$$\therefore r_{O_B}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2(a+c-b)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{(a+c-b)}}$$

同理可得 $r_{O_A} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)}{(b+c-a)}}$ 、

$$r_{O_C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)}{(a+b-c)}}$$

2. 鈍角三角形『傍切圓』半徑求法：

（1）鈍角所對的『傍切圓』半徑求法：

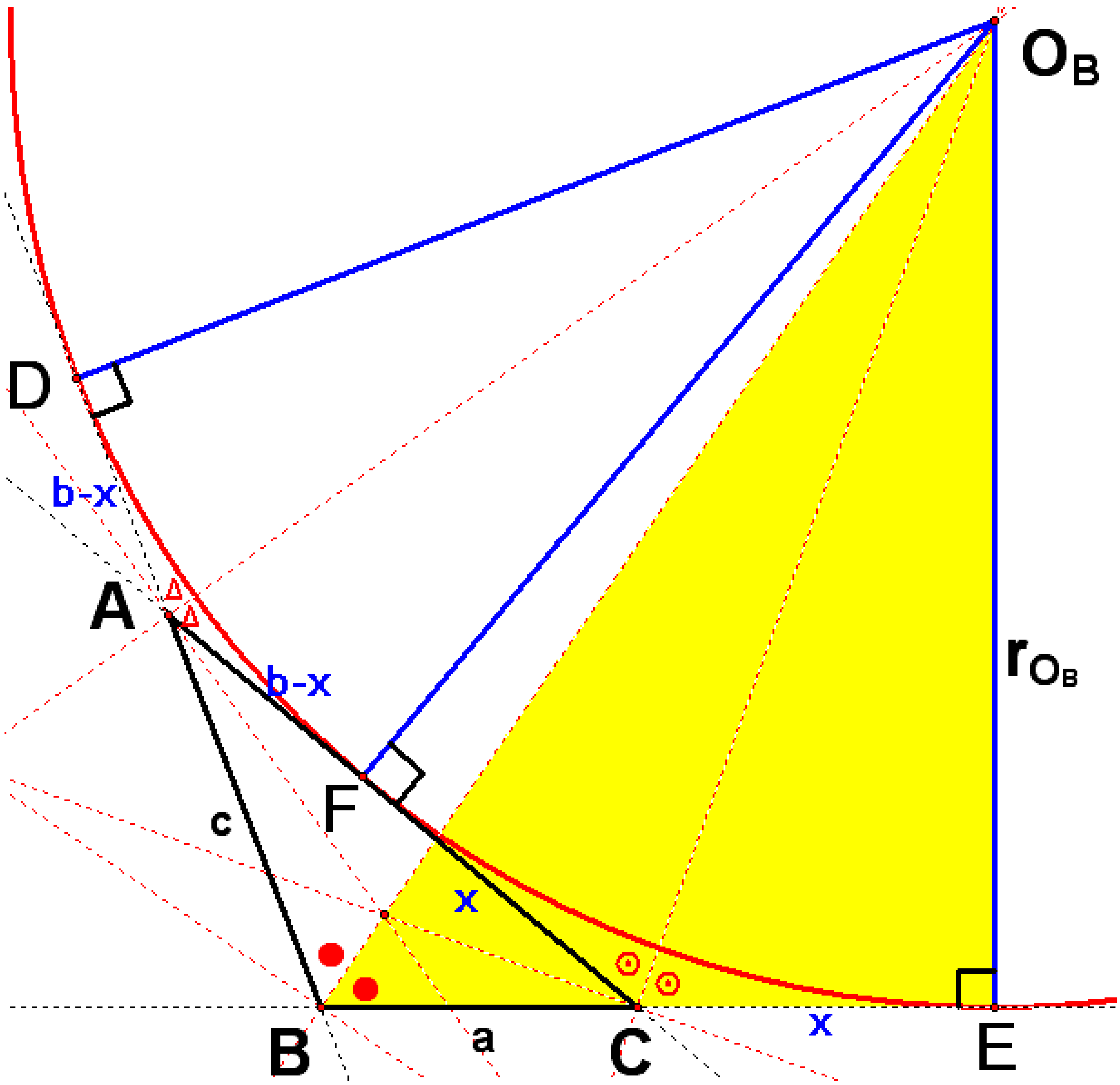

圖 74

1° 如上圖，設 $\angle B$ 的內角平分線與 $\angle A$ 、 $\angle C$ 的外角平分線交於點 O_B ，

圓 O_B 切 ΔABC 三邊（或延長線）$\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 於 D、E、F

根據切線段的性質可知：$\overline{CE}=\overline{CF}$ 、 $\overline{AD}=\overline{AF}$ 、 $\overline{BD}=\overline{BE}$

設 $\overline{CE}=\overline{CF}=x$，則 $\overline{AD}=\overline{AF}=b-x$ （$\because \overline{AC}=b$）

代入 $\overline{BD}=\overline{BE}$ 中

$$\Rightarrow a+x=c+(b-x) \qquad \Rightarrow x=\frac{b+c-a}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{BE}=a+x=a+\frac{b+c-a}{2}=\frac{a+b+c}{2}$$

2°觀察 ΔBEO_B，有一角為直角，另一角為等於 $\frac{1}{2}\angle B$

我們可以利用 ΔABC，製造一個與 ΔBEO_B 相似的 Δ（ΔPHA）

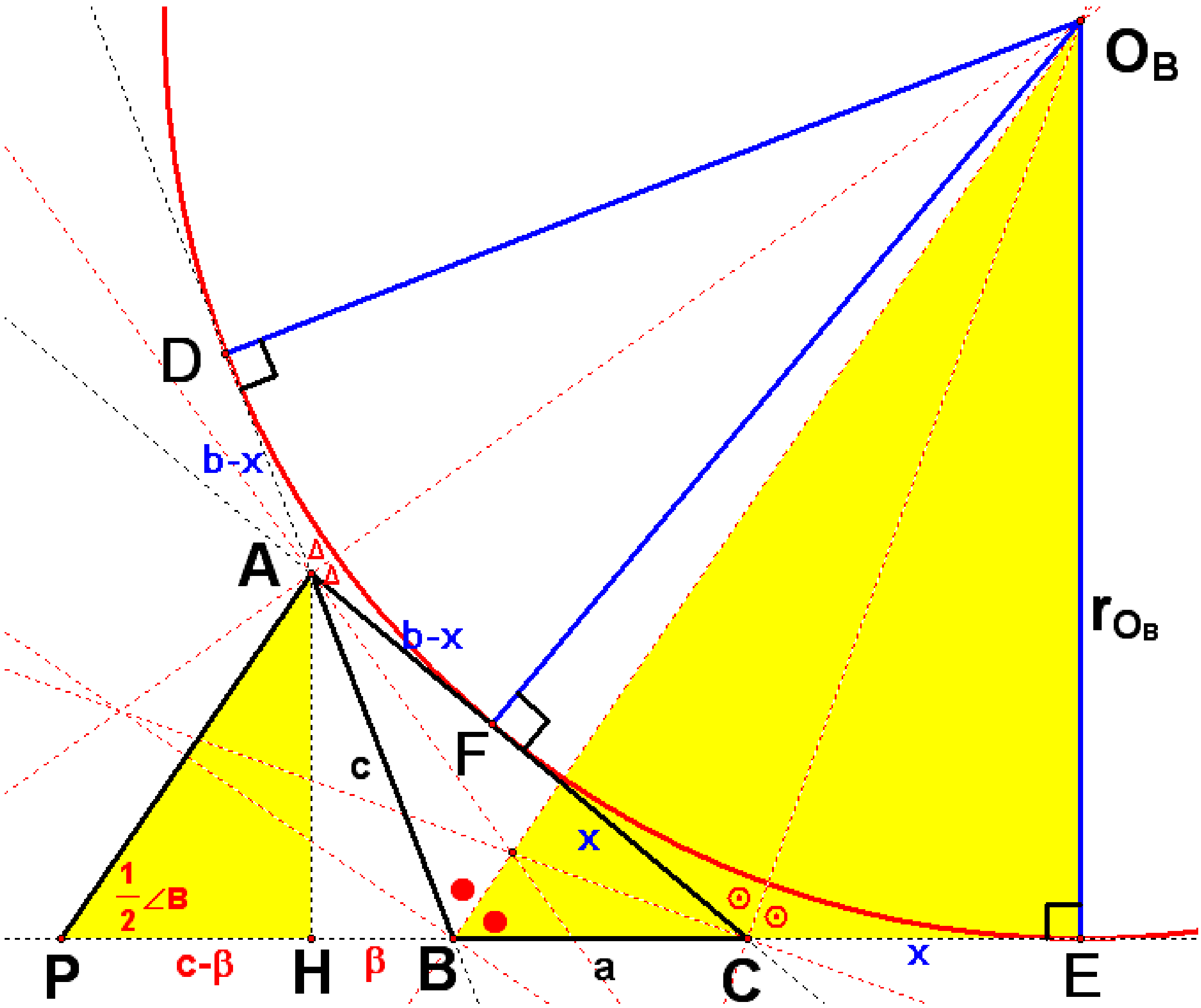

圖 75

如上圖，延長 $\overline{BC}$ 至 P，使得 $\overline{BP}=\overline{AB}=c$

根據 Δ 的外角定理，可得 $\angle P=\frac{1}{2}\angle ABC$

對 ΔABC，作高 $\overline{AH}$　　　　設 $\overline{BH}=\beta$，則 $\overline{PH}=c-\beta$

由畢氏定理，可得 $c^2-\beta^2=b^2-(a+\beta)^2$　　$\Rightarrow \beta=\dfrac{b^2-c^2-a^2}{2a}$

$$\Rightarrow \overline{PH}=c-\beta=c-\frac{b^2-c^2-a^2}{2a}=\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}$$

另根據『海龍公式』: 可得 $\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2a}$

$3° \because \Delta BEO_B \sim \Delta PHA$　　　$\therefore \overline{BE}:\overline{PH}=\overline{EO_B}:\overline{AH}$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{2}:\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}=r_{O_B}:\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2a}$$

$$\therefore r_{O_B}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2(a+c-b)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{(a+c-b)}}$$

所以由此可知，上面公式也適用於鈍角三角形時，鈍角所對的傍切圓。

（2）銳角所對的『傍切圓』半徑求法：

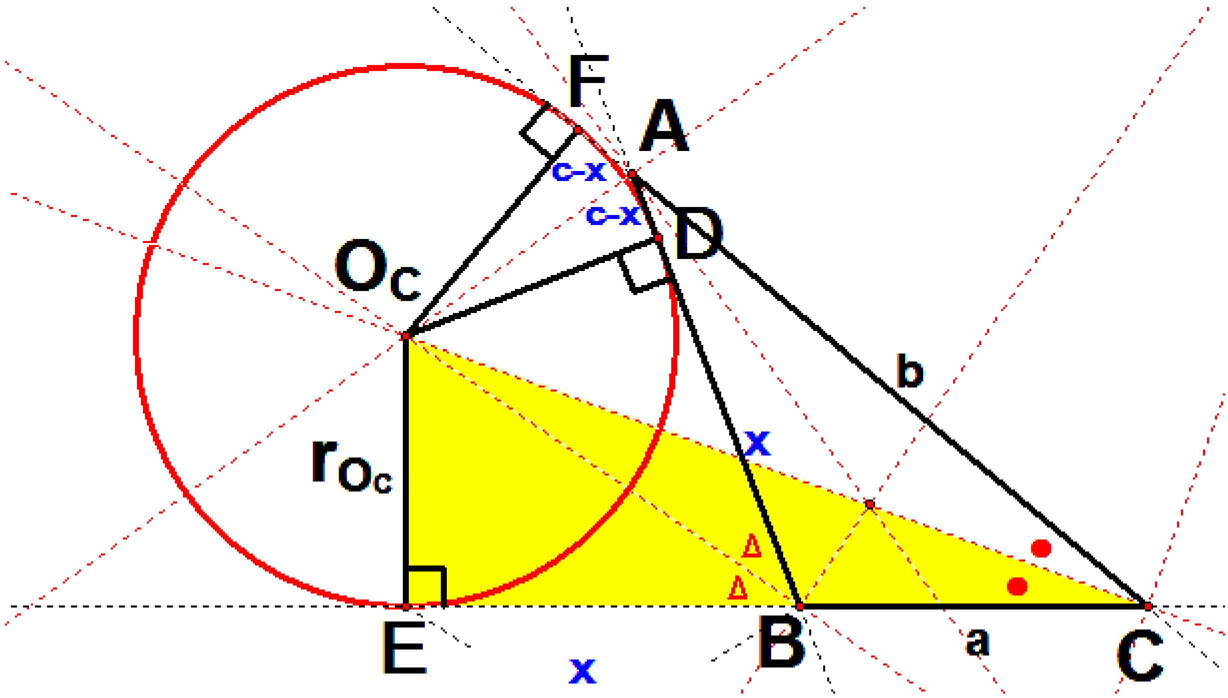

圖 76

1° 如上圖，設∠C 的內角平分線與∠B 、∠A 的外角平分線交於點 O_C，

圓 O_C 切 ΔABC 三邊（或延長線）$\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 於 D、E、F

根據切線段的性質可知：$\overline{CE}=\overline{CF}$、$\overline{AD}=\overline{AF}$、$\overline{BD}=\overline{BE}$

設 $\overline{BE}=\overline{BD}=x$，則 $\overline{AD}=\overline{AF}=c-x$　（$\because \overline{AB}=c$）

代入 $\overline{CE}=\overline{CF}$ 中 $\Rightarrow a+x=b+(c-x)$　$\Rightarrow x=\dfrac{b+c-a}{2}$

$\Rightarrow \overline{CE}=a+x=a+\dfrac{b+c-a}{2}=\dfrac{a+b+c}{2}$

2° 觀察 ΔCEO_C，有一角為直角，另一角為等於 $\dfrac{1}{2}\angle C$

我們可以利用 ΔABC，製造一個與 ΔCEO_C 相似的 Δ（ΔPHA）

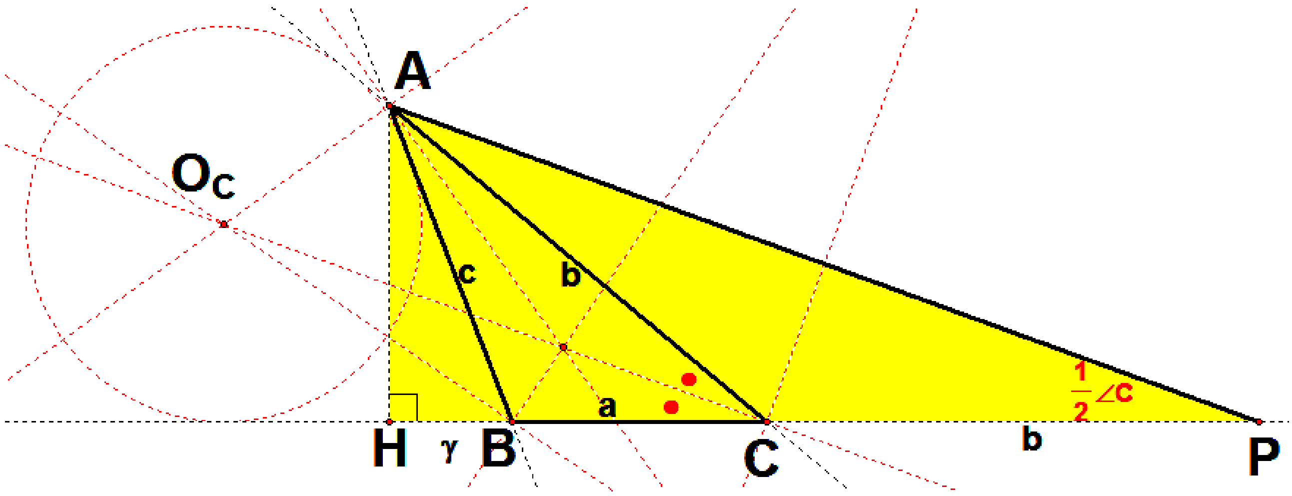

圖 77

如上圖，延長 $\overline{BC}$ 至 P，使得 $\overline{CP}=\overline{AC}=b$

根據 Δ 的外角定理，可得 $\angle P=\dfrac{1}{2}\angle ACB$

對 ΔABC，作高 $\overline{AH}$　　設 $\overline{BH}=\gamma$

由畢氏定理，可得 $c^2-\gamma^2=b^2-(a+\gamma)^2$　$\Rightarrow \gamma=\dfrac{b^2-c^2-a^2}{2a}$

$\Rightarrow \overline{PH}=b+a+\gamma=b+a+\dfrac{b^2-c^2-a^2}{2a}=\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{2a}$

另根據『海龍公式』：可得 $\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2a}$

3° $\because \Delta CEO_C \sim \Delta PHA$　　$\therefore \overline{CE}:\overline{PH}=\overline{EO_C}:\overline{AH}$

$\Rightarrow \dfrac{a+b+c}{2}:\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{2a}=r_{O_C}:\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2a}$

$$\Rightarrow r_{O_C}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2(a+b-c)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b-c)}}$$

伍、研究結果：

一、三角形『外心』的延伸探討：

1. 若 A、B 為平面上之兩相異點，符合$\overline{PA}:\overline{PB}=m:1$的動點 P 形成什麼圖形呢？

（其中$m>0$）』

（1）當$m\neq1$時，P 點形成一個圓。

（2）當 m=1 時，p 點形成$\overline{AB}$的中垂線。

2. [尺規作圖]：

（1）A、B 為平面上之兩定點，P 為直線 AB 上的動點，則符合$\overline{PA}:\overline{PB}=m:1$ $(m>1)$的 P 點位置可以用尺規作圖做出。

（2）A、B 為平面上之兩定點，P 為直線 AB 上的動點，則符合$\overline{PA}:\overline{PB}=m:1$ $(0<m<1)$的 P 點位置可以用尺規作圖做出。

3. 若 A、B、C 為平面上的三個定點，則符合$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\alpha:\beta:r$（$\alpha,\beta,r$為正數但不可以$\alpha=\beta$、$\beta=r$或$\alpha=r$）的 P 點，不一定有解，隨著 A、B、C 的位置改變，P 點的位置及個數也會改變，解的個數可能為：0、1、2 個。

二、三角形『內心』的延伸探討：

1. 定理一：若 A、B、C 為平面上的三個定點，P 點滿足$d(P,\overline{AB})$：$d(P,\overline{BC})$＝m：n，

Q 為射線$\overrightarrow{BP}$之任一點

則$d(Q,\overline{AB})$：$d(Q,\overline{BC})$＝m：n

（也就是說只要有一點成立，就整條線都成立）

2. 定理二：若 A、B、C 為平面上的三個定點，P 點滿足$d(P,\overline{AB})$：$d(P,\overline{BC})$＝m:n，

R 為不在射線$\overrightarrow{BP}$之任一點

則$d(R,\overline{AB})$：$d(R,\overline{BC})\neq$ m:n（線外的點都不會成立）

3. 若 A、B、C 為平面上的三個定點，如何以尺規作圖找出一個 P 點符合$d(P,\overline{AB})$：$d(P,\overline{BC})$＝m:n，我們找到兩種尺規作圖的方法。

4. 給定三角形 ABC，則滿足 $d(P,\overline{AB})$ ： $d(P,\overline{BC})$ ： $d(P,\overline{AC})$ ＝m：n：t 的 P 點存在嗎?

（1）在三角形 ABC 內部的點是唯一的。

（2）若考慮 P 點可以在三角形 ABC 的外面，則共有三個 P 點符合要求。

5. 在 ΔABC 的『外部』，則滿足 $d(P,\overline{AB}) = d(P,\overline{BC}) = d(P,\overline{AC})$ 的 P 點共有三個，

即是 ΔABC 的『傍心』。

三、三角形『重心』的延伸探討：

1. 若 E、F 分別是 ΔABC 的邊 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 上的點， $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 P，直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D，

當 $\overline{AE}:\overline{EC} = a:b$ ； $\overline{AF}:\overline{FB} = c:d$ ，則可求出 $\overline{BD}:\overline{DC} = ad:bc$

2. [定理三]：若 D、E、F 分別為 ΔABC 的邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 上之一點

當 $\overline{AE}:\overline{EC} = a:b$ 、 $\overline{AF}:\overline{FB} = c:d$ ，且 $\overline{BD}:\overline{DC} = ad:bc$ 時，

則 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 必交於一點。

3. 若 E、F 分別是 ΔABC 的邊 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 上的點， $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 P，直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D，

當 $\overline{AE}:\overline{EC} = a:b$ ； $\overline{AF}:\overline{FB} = c:d$ ，則 $\overline{AP}:\overline{PD} = (ad+bc):bd$

4. 若 E、F 分別是 ΔABC 的邊 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 上的點， $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 P，直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D，

當已知 $\overline{AE}:\overline{EC}$ 、 $\overline{AF}:\overline{FB}$ 時，則可求出由直線 AP、直線 BP、直線 CP 分 ΔABC 為六塊小三角形的面積比。

5. [定理四]在 ΔABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 上之一點且 $\overline{BD}:\overline{CD} = m:n$，若 P 為 $\overline{AD}$ 上的任一點，

則 ΔABP 面積： ΔACP 面積＝ $m:n$ 。

6. 可以用尺規作圖，在 ΔABC 的內部找到一點 P，
使得 ΔABP 面積： ΔBCP 面積： ΔACP 面積＝m：n：t。

7. 在平面上是否存在著 P 點，可使得 ΔABP 面積＝ ΔBCP 面積＝ ΔACP 面積呢?

（1）若點 P 在 ΔABC 的內部，則 P 就是 ΔABC 的『重心』。

（2）若考慮 ΔABC『外部』的點：則 P 點需滿足

$d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{BC}) = \overline{BC}:\overline{AB}$ 且 $d(P,\overline{BC}):d(P,\overline{AC}) = \overline{AC}:\overline{BC}$ 且

$d(P,\overline{AB}):d(P,\overline{AC}) = \overline{AC}:\overline{AB}$，用尺規作圖可做出共有三個 P 點符合題目的要求。

8. [定理五]：若 P 點位於 ΔABC 的內部且 ΔABP 面積＝ ΔBCP 面積＝ ΔACP 面積，

則 P＝G（G 為 ΔABC 的重心）

9. 是否可在給定三角形的『外部』找到 P 點，

使得 ΔABP 面積：ΔBCP 面積：ΔACP 面積等於任意的一組比例（如 m：n：t）呢？

用尺規作圖可做出共有三個 P 點符合題目的要求。

四、三角形『垂心』的延伸探討：

1.「任意三角形三高（或延長線）共點」可利用[定理三]證出。

2. 從『外心』變『垂心』再變『內心』：

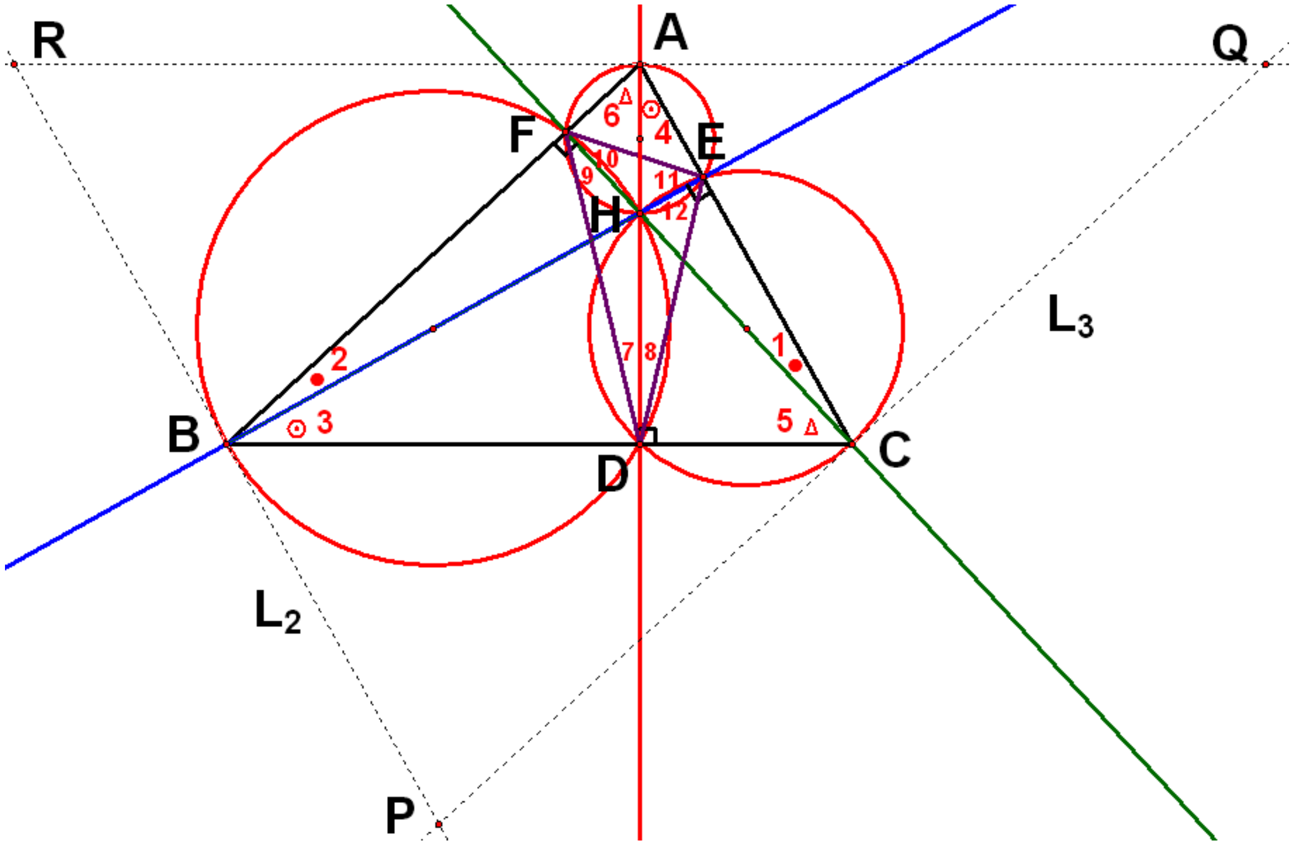

圖 78

H 點是 ΔPQR 的『外心』、ΔABC 的『垂心』；又是 ΔDEF 的『內心』。

五、三角形『傍心』的延伸探討：

由三角形『內切圓』半徑想到三角形『傍切圓』半徑：

設 $\angle B$ 的內角平分線與 $\angle A$ 、$\angle C$ 的外角平分線交於點 O_B ，

則 $r_{O_B} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{(a+c-b)}}$

$r_{O_A} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)}{(b+c-a)}}$ 、

$r_{O_C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)}{(a+b-c)}}$

以上公式適用於各種三角形。

陸、參考資料及其他：

一、參考資料：

1. 陳冒海主編－國中數學第四冊－民國 101 年 2 月再版－出版地：台灣－南一書局出版－P38~200－民國 101 年 2 月出版
2. 陳冒海主編－國中數學第五冊－民國 100 年 8 月再版－出版地：台灣－南一書局出版－P4~156－民國 100 年 8 月出版
3. 蔡聰明著－數學的發現趣談－2004 年 2 月初版四刷－出版地：台灣－三民書局出版－P117~131－2004 年 2 月出版
4. 嚴鎮軍主編—初中數學競賽教程—1995 年 10 月初版二刷—出版地：台灣—九章出版社出版—P205~215－1995 年 10 月出版
5. 趙文敏著—幾何學概論—民國 77 年 10 月 2 版—出版地：台灣—九章出版社出版—P40~42－民國 77 年 10 月出版
6. 沈康身著—歷史名題賞析 3—2010 年 11 月初版一刷—出版地：台灣—稻田出版社出版—P68~69、P99~100－2010 年 11 月出版
7. 張海潮著—從旋轉及縮放看尤拉線及九點圓（數學傳播季刊第 33 卷 2 期）—P48~51

二、附錄：

若 ΔABC 的三邊長分別為 $\overline{BC}=a$ 、 $\overline{AC}=b$ 、 $\overline{AB}=c$ ，

則 ΔABC 的面積 $=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$

［證明］：假設 a 為最長邊

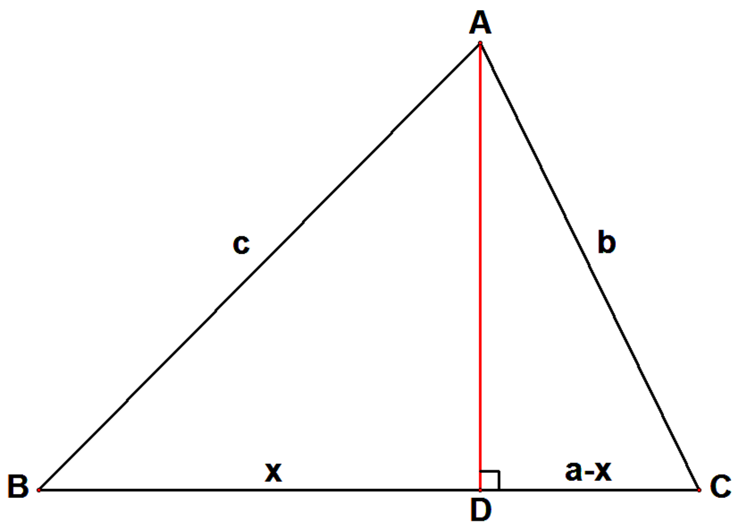

圖 79

設 $\overline{BD}=x$ ，則 $\overline{CD}=a-x$

$\because \overline{AD}\perp\overline{BC}$

$\therefore c^2-x^2=\overline{AD}^2=b^2-(a-x)^2$ $\Rightarrow \therefore c^2-x^2=b^2-a^2+2ax-x^2$

解得 $\overline{BD} = x = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$

$$\Delta ABC \text{ 的高} = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{(c+x)(c-x)}$$

$$= \sqrt{(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a})(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a})}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a} \times \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2a}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a}$$

$$\Delta ABC \text{ 面積} = a \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

感謝評審老師耐心看完！