

# 研究主題：九宮格數字方程式

## 摘要：

為什麼有些題目可解，而有些題目不可解或無解呢？如果一個題目目標很清楚且操作步驟也很簡單但是卻一直達不到目標，此題目是真的無解、不可解，還是自己的能力太差而找不到問題的解法。相信這也是很多人想知道的答案。

本研究探討：當規定於九宮格中數字的變形規則時，想辦法找到一種解題的策略以確定問題可不可解及試圖解開問題來。因為這個研究使用的未知數太多，因此我們使用『矩陣』的概念來幫助我們求解『多元一次聯立方程式』。經過這一陣子的研究，讓我們更加熟練解『一次聯立方程式』的方法。

## 本研究使用的數學概念：

- 1、一次聯立方程式的基本概念。
- 2、多元一次聯立方程式的求解。
- 3、矩陣的加法、係數積、列運算求解多元一次聯立方程式。

## 壹、研究動機：

因為要作科展，所以我們到學校圖書館尋找可以探討的題目。結果，在一本書上看到如下有趣的題目：『在  $3 \times 3$  正方形表格中填上如右圖所示的數，將該表按下列步驟變形，每一步可以將任意相鄰兩格中的數加上同一個數（相鄰是指有公共邊的兩小格）。問能否經過若干個步驟變形，使（1）表中各格全為零；（2）表中四個角落上的數為 1，其餘各格全為零。』於是我們試著解解看，找到了第（1）小題的解法，但是第（2）小題解了半天，卻解不出來，只好看看後面的答案，原來是不可解。於是我們心裡想為什麼有的可以解，有的不可以解，是不是數字有什麼樣的玄機？進而又想，如果修改變形規則，不知道可以玩出什麼花樣。於是我們幾個就在老師的指導下，展開對這類題目的探討。

0	3	2
6	7	0
4	9	5

## 貳、研究目的：

本研究想要探討的是這類題目的解題策略。為什麼可解？為什麼不可解？

我們想從下列幾個方向探討：

- 一、探討原問題的解法及數學原理。（我們將原問題的變形步驟稱為：變形規則 1）
- 二、改變問題的規則為：可以將原九宮格中的某列加上同一個數、或某行加上同一個數、或某對角線加上同一個數。（變形規則 2）
- 三、改變問題的規則為：可以將十字形或不平衡十字形上的五個數同加上一個數。（變形規則 3）
- 四、改變問題的規則為：可以將短 T 形上的四個數同加上一個數。（變形規則 4）
- 五、改變問題的規則為：可以將小 L 形上的三個數同加上一個數。（變形規則 5）

### 叁、研究器材與設備：

計算機、計算紙、筆、電腦和人腦、微軟 office 軟體。

### 肆、研究過程與方法：

一、探討原問題的解法及數學原理。(我們將原問題的變形步驟稱為：變形規則 1)

(一)解題過程：

1. 我們先將『九宮格』中的每個格子命名如下：

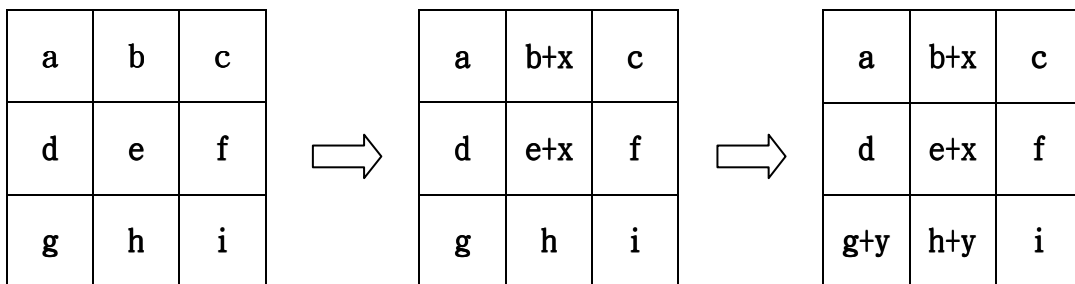
第 1 格	第 2 格	第 3 格
第 4 格	第 5 格	第 6 格
第 7 格	第 8 格	第 9 格

並假設原题目的九宮格數字為：

a	b	c
d	e	f
g	h	i

2. 在作變形操作時，必然會在一個奇數格和一個偶數格各加上同一個數。

例如：在第 2 格和第 5 格各加  $x$ ，再在第 7 格和第 8 格各加  $y$ 。



……但不管如何操作，都不改變（奇數格的數字和）－（偶數格的數字和）的值。

並且，任何

a	b	c
d	e	f
g	h	i

均能變形成

0	0	0
0	0	0
0	0	x

其中  $x = (a+c+e+g+i) - (b+d+f+h)$ : (奇數格的數字和) - (偶數格的數字和)。

證明：步驟如下

- (1) 將第 1 格及第 2 格，各加上  $(-a)$ ，使第 1 格變為 0。
  - (2) 將第 2 格及第 3 格，各加上  $(a-b)$ ，使第 2 格變為 0。
  - (3) 將第 3 格及第 6 格，各加上  $(-a+b-c)$ ，使第 3 格變為 0。
  - (4) 將第 6 格及第 5 格，各加上  $(a-b+c-f)$ ，使第 6 格變為 0。
  - (5) 將第 5 格及第 4 格，各加上  $(-a+b-c+e+f)$ ，使第 5 格變為 0。
  - (6) 將第 4 格及第 7 格，各加上  $(a-b+c-d+e-f)$ ，使第 4 格變為 0。
  - (7) 將第 7 格及第 8 格，各加上  $(-a+b-c+d-e+f-g)$ ，使第 7 格變為 0。
  - (8) 將第 8 格及第 9 格，各加上  $(a-b+c-d+e-f+g-h)$ ，使第 8 格變為 0。
- 故得第 9 格  $x = (a+c+e+g+i) - (b+d+f+h)$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

(1)

0	b-a	c
d	e	f
g	h	i

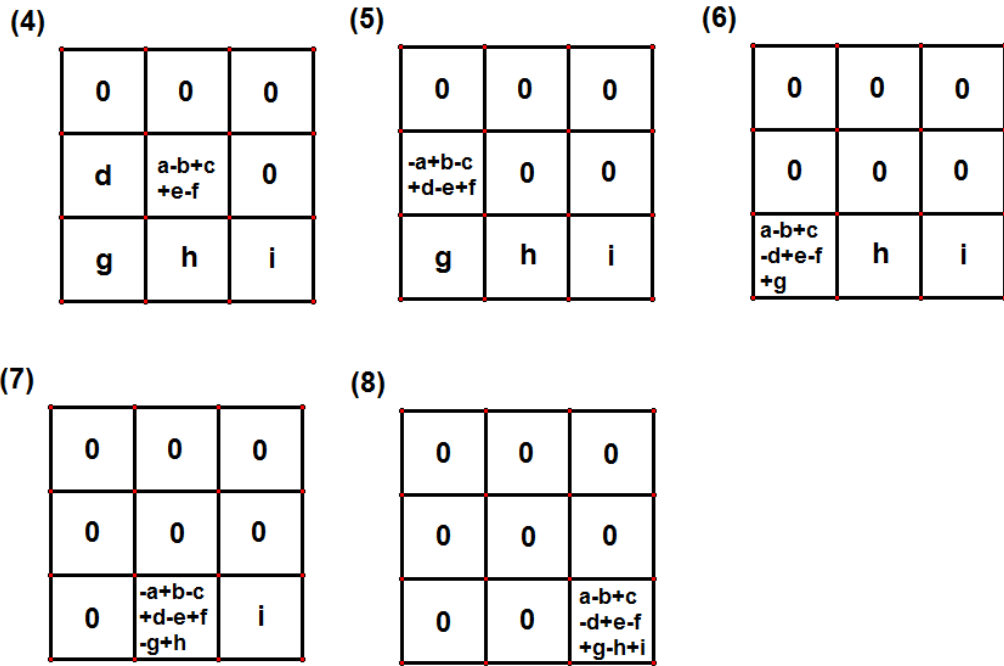
(2)

0	0	a-b+c
d	e	f
g	h	i

(3)

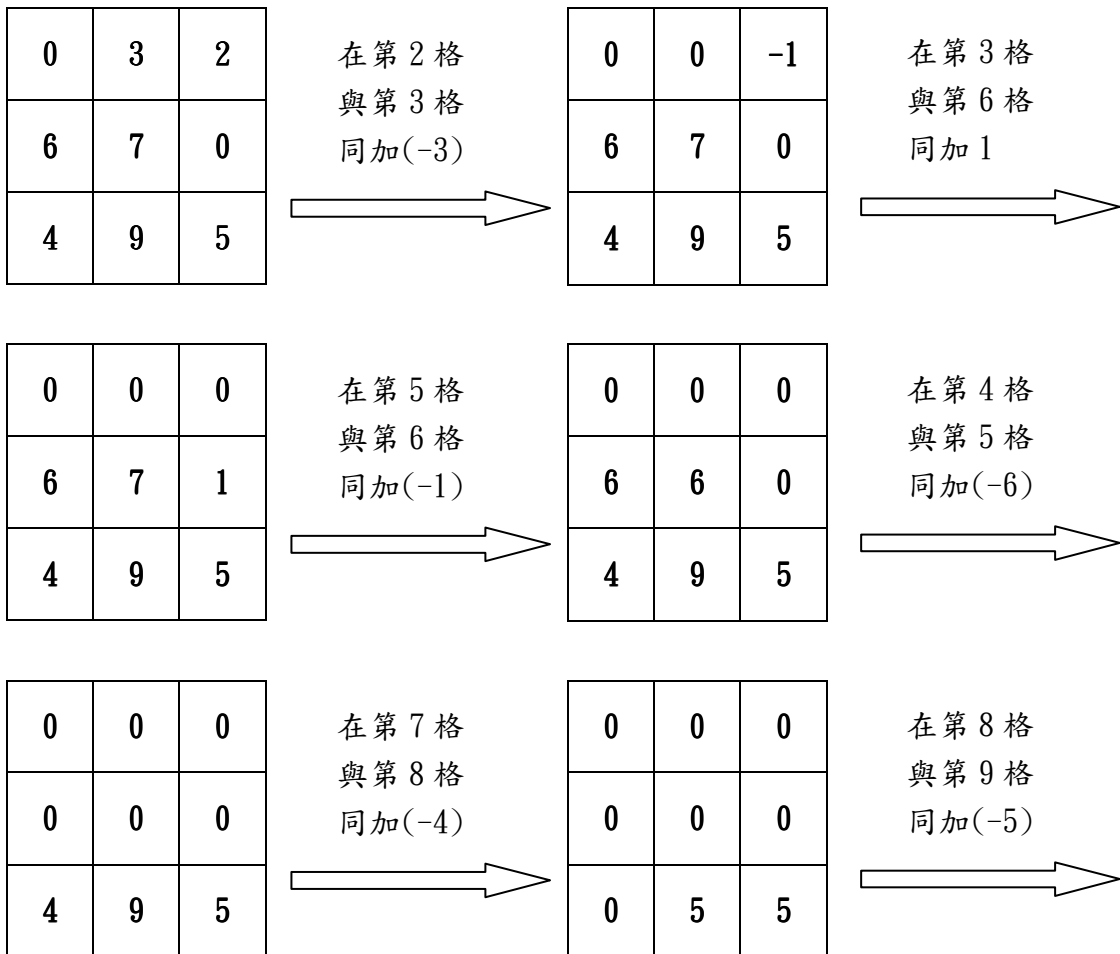
0	0	0
d	e	-a+b -c+f
g	h	i

...



(二)解原問題：

1. 第(1)小題：我們用以下的流程圖表示



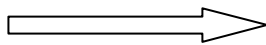
0	0	0
0	0	0
0	0	0

故原題目第(1)小題，可解。

2. 第(2)小題：

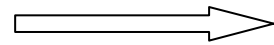
0	3	2
6	7	0
4	9	5

在第1格  
與第2格  
同加1



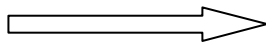
1	4	2
6	7	0
4	9	5

在第2格  
與第3格  
同加(-4)



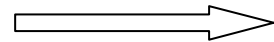
1	0	-2
6	7	0
4	9	5

在第3格  
與第6格  
同加3



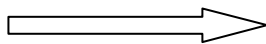
1	0	1
6	7	3
4	9	5

在第5格  
與第6格  
同加(-3)



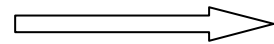
1	0	1
6	4	0
4	9	5

在第4格  
與第5格  
同加(-4)



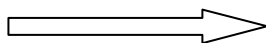
1	0	1
2	0	0
4	9	5

在第4格  
與第7格  
同加(-2)



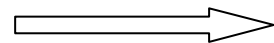
1	0	1
0	0	0
2	9	5

在第7格  
與第8格  
同加(-1)



1	0	1
0	0	0
1	8	5

在第8格  
與第9格  
同加(-8)



1	0	1
0	0	0
1	0	-3

(三)、第(2)小題不可解的探討：

如上面的步驟，我們一定可以按下列方法操作，使前八格(第1格~第8格)符合題目的要求：

- (1) 將第1格及第2格，各加上同一個數，使第1格符合題目的要求。
- (2) 將第2格及第3格，各加上同一個數，使第2格符合題目的要求。
- (3) 將第3格及第6格，各加上同一個數，使第3格符合題目的要求。
- (4) 將第6格及第5格，各加上同一個數，使第6格符合題目的要求。
- (5) 將第5格及第4格，各加上同一個數，使第5格符合題目的要求。
- (6) 將第4格及第7格，各加上同一個數，使第4格符合題目的要求。
- (7) 將第7格及第8格，各加上同一個數，使第7格符合題目的要求。
- (8) 將第8格及第9格，各加上同一個數，使第8格符合題目的要求。

於是將

0	3	2
6	7	0
4	9	5

變形為

1	0	1
0	0	0
1	0	y

y 為多少呢？

照前面的說明：(奇數格的數字和) - (偶數格的數字和) 的值必不變，

即  $(1+1+0+1+y) - (0+0+0+0) = (0+2+7+4+5) - (3+6+0+9)$

$$3+y=0, \quad y=-3$$

因此，

0	3	2
6	7	0
4	9	5

只能變成

1	0	1
0	0	0
1	0	-3

不可能變成

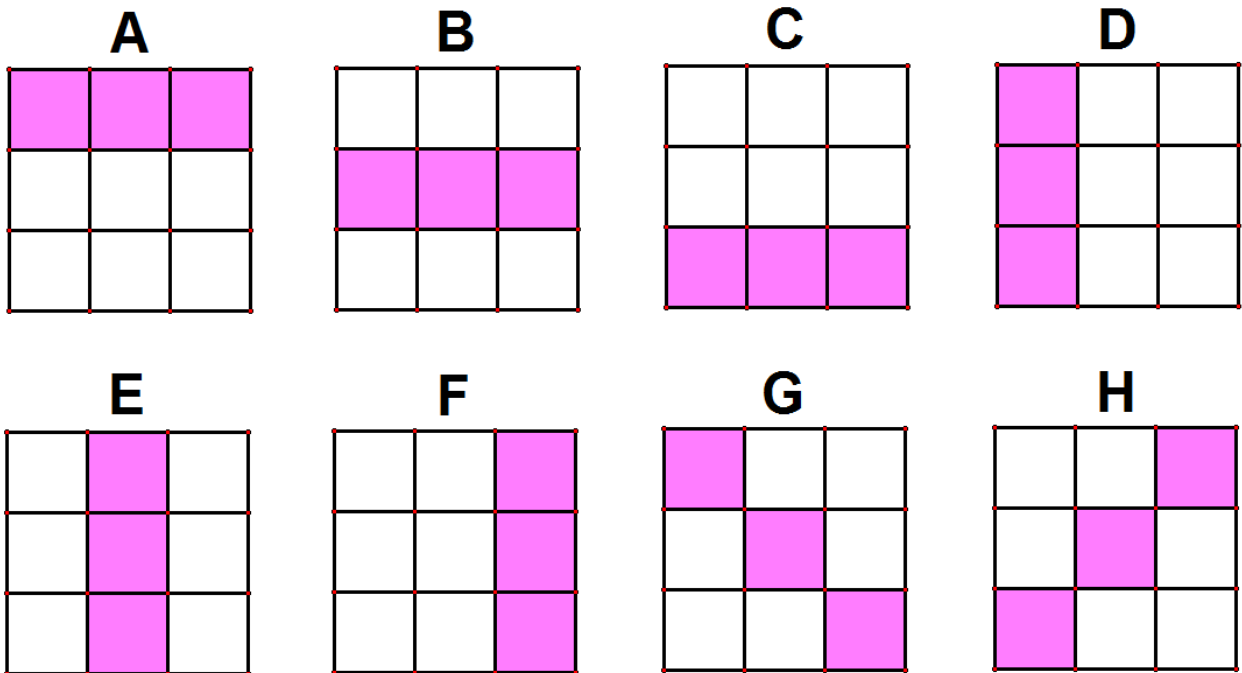
1	0	1
0	0	0
1	0	1

(四)、小結：按照變形規則 1 的步驟變形，則

(奇數格的數字和) - (偶數格的數字和) 的值必不變，故某個九宮格中的數字，可不可以按照變形規則 1 變形成另一個九宮格中的數字，只要檢查兩個九宮格數字其 (奇數格的數字和) - (偶數格的數字和) 的值是否相等即可。若是，則可解；若不是，則不可解。

二、改變問題的規則為：可以將原九宮格中的某列加上同一個數，或某行加上同一個數，或某對角線加同上一個數。(變形規則 2)

## 列,行,對角線形



問題：(1) 可否根據變形規則 2 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

 。

(2) 可否根據變形規則 2 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

1	0	1
0	0	0
1	0	1

 。

(一)、探討過程：

1. 利用前面的方法來探討變形規則 2，可不可以將某九宮格中的數字，變形成另一個九宮格中的數字，這招可行不通，因為在同一列（或行）加上同一個數，可能有兩個奇數格、一個偶數格或一個奇數格、兩個偶數格，而在某對角線上各數同加上一個數，則完全加在奇數格，所以不會保持（奇數格的數字和）-（偶數格的數字和）的值不變的現象。我們必須思考其他的策略來解決，以下是我們觀察、查詢資料、請教老師及討論後的方法：
2. 首先我們觀察到，我們可能在某一列或某一行或某一條對角線上各加上同一個數，而且某一列（或行、或對角線）可能進行了很多次同加上一個數的動作。以第一列為例：在整個歷程中，總共對第一列進行加  $n$  次步驟，分別在第一列同加上  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、……、 $x_n$  等  $n$  次步驟，根據加法結合律，可以說第一列共被加了  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ，我們假設  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ ，所以在整個歷程中，第一列的數各被加了  $a$ ；同理可假設在整個歷程中，第二列的數各被加了  $b$ ，第三列的數各被加了  $c$ ，第一行的數各被加了  $d$ ，第二行的數各被加了  $e$ ，第三行的數各被加了  $f$ ，左上至右下對角線的數各被加了  $g$ ，右上至左下對角線的數各被加了  $h$ 。這個狀況就如同：

0	3	2
6	7	0
4	9	5

a	a	a
0	0	0
0	0	0

0	0	0
b	b	b
0	0	0

0	0	0
0	0	0
c	c	c

d	0	0
d	0	0
d	0	0

0	e	0
0	e	0
0	e	0

0	0	f
0	0	f
0	0	f

g	0	0
0	g	0
0	0	g

0	0	h
0	h	0
h	0	0



將上面這九個九宮格中對應的格子中的數相加後要變成

0	0	0
0	0	0
0	0	0

(二)將題目模組化：

我們利用『矩陣』來幫助研究，首先我們定義了八個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此，整個歷程可表示為

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} + aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{列出方程式：} \begin{cases} 0+a+d+g=0 \\ 3+a+e=0 \\ 2+a+f+h=0 \\ 6+b+d=0 \\ 7+b+e+g+h=0 \\ 0+b+f=0 \\ 4+c+d+h=0 \\ 9+c+e=0 \\ 5+c+f+g=0 \end{cases}, \quad \text{移項後，} \quad \begin{cases} a+d+g=0 \\ a+e=-3 \\ a+f+h=-2 \\ b+d=-6 \\ b+e+g+h=-7 \\ b+f=0 \\ c+d+h=-4 \\ c+e=-9 \\ c+f+g=-5 \end{cases}$$

只要解出上面八元一次聯立方程式的解即可。

(三)利用矩陣的列運算求解八元一次聯立方程式：

方程組所對應的矩陣：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

1. 第 1 列乘以(-1)加到第 2、3 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

2. 第 4 列乘以(-1)加到第 5、6 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3. 第 7 列乘以(-1)加到第 8、9 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. 第 2 列乘以 1 加到第 1、4、7 列，第 2 列乘以(-1)加到第 3、5、6、8、9 列，

最後第 2 列同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. 第 3 列乘以 1 加到第 1、4、7 列，第 3 列乘以(-1)加到第 2、6、9 列，  
最後第 3 列同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 第 8 列乘以(-1)加到第 2、6 列，第 8 列乘以 1 加到第 4、7 列，第 8 列乘以(-2)加到第 5、9 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7. 第 5 列乘以 $(-\frac{1}{3})$ 加到第 1、7 列，第 5 列乘以 $\frac{1}{3}$ 加到第 3、8 列，最後第 5 列同乘以 $\frac{1}{3}$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

第 9 列所對應的方程式為  $0a+0b+0c+0d+0e+0f+0g+0h=5$

故無解(不可解)

(四)解第(2)小題，仿照前面作法

只要找到  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $g$ 、 $h$

$$\text{使得} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} + aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程組所對應的矩陣：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

1. 第 1 列乘以  $(-1)$  加到第 2、3 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

2. 第 4 列乘以  $(-1)$  加到第 5、6 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

3. 第 7 列乘以(-1)加到第 8、9 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. 第 2 列乘以 1 加到第 1、4、7 列，第 2 列乘以(-1)加到第 3、5、6、8、9 列，最後第 2 列同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. 第 3 列乘以 1 加到第 1、4、7 列，第 3 列乘以(-1)加到第 2、6、9 列，最後第 3 列同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 第 8 列乘以(-1)加到第 2、6 列，第 8 列乘以 1 加到第 4、7 列，第 8 列乘以(-2)加到第 5、9 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7. 第 5 列乘以 $(-\frac{1}{3})$ 加到第 1、7 列，第 5 列乘以 $\frac{1}{3}$ 加到第 3、8 列，最後第 5 列同乘以 $\frac{1}{3}$ ：

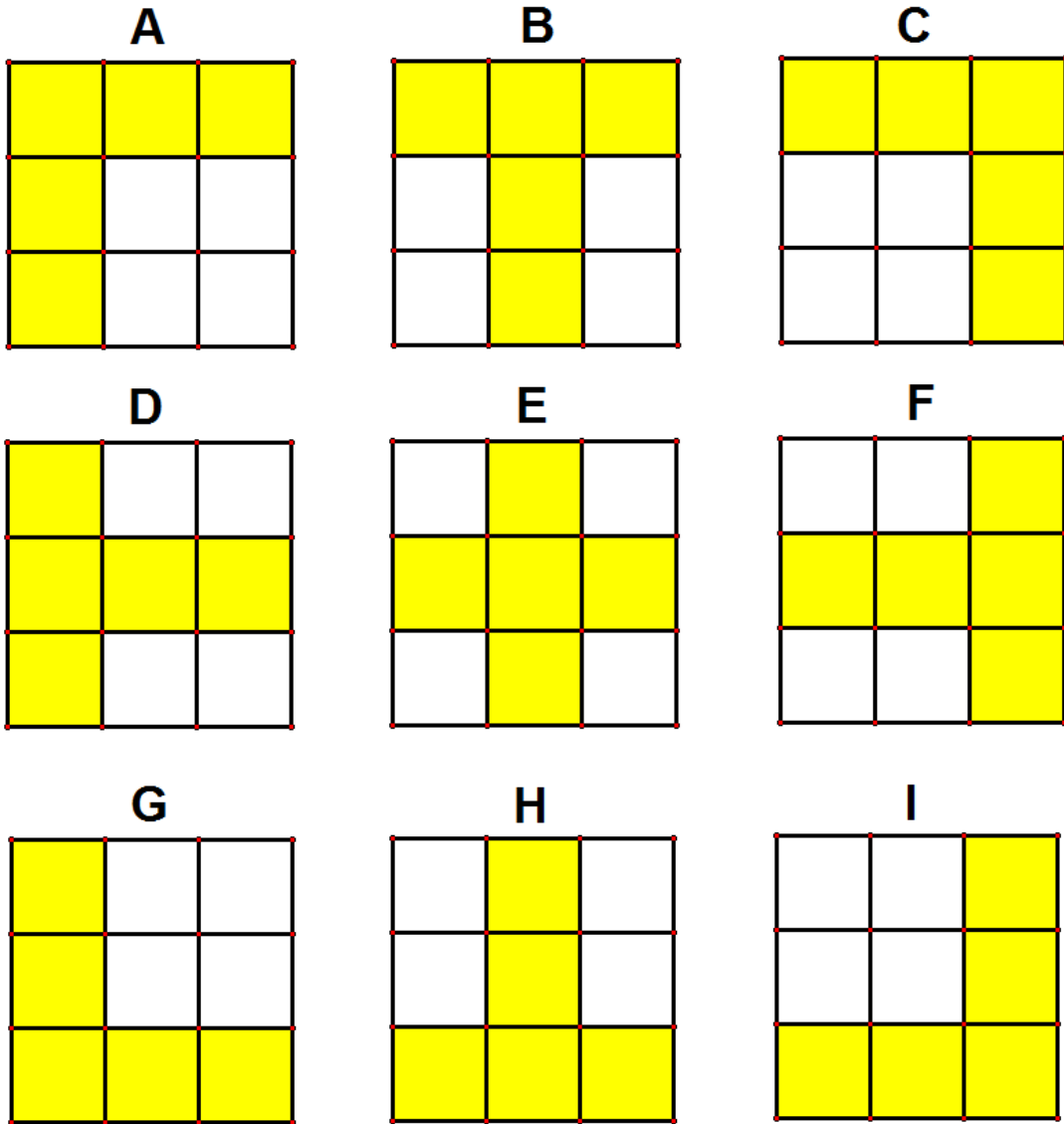
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{28}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

第 9 列所對應的方程式為 $0a + 0b + 0c + 0d + 0e + 0f + 0g + 0h = 5$

故無解(不可解)

三、改變問題的規則為：可以將十字形或不平衡十字形上的五個數同加上一個數。  
 (變形規則 3)

## 十字形或不平衡十字形



問題：(1) 可否根據變形規則 3 將九宮格

0	3	2
6	7	0
4	9	5

中的數字變形為

0	0	0
0	0	0
0	0	0

。

(2) 可否根據變形規則 3 將九宮格

0	3	2
6	7	0
4	9	5

中的數字變形為

1	0	1
0	0	0
1	0	1

。

仿照前面的作法，先定義 9 個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(一)第(1)小題：

1. 本小題即求解  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $g$ 、 $h$ 、 $i$  使滿足

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} + aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH + iI = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{列出方程式：} \begin{cases} 0+a+b+c+d+g=0 \\ 3+a+b+c+e+h=0 \\ 2+a+b+c+f+i=0 \\ 6+a+d+e+f+g=0 \\ 7+b+d+e+f+h=0 \\ 0+c+d+e+f+i=0 \\ 4+a+d+g+h+i=0 \\ 9+b+e+g+h+i=0 \\ 5+c+f+g+h+i=0 \end{cases}, \quad \text{移項後，} \quad \begin{cases} a+b+c+d+g=0 \\ a+b+c+e+h=-3 \\ a+b+c+f+i=-2 \\ a+d+e+f+g=-6 \\ b+d+e+f+h=-7 \\ c+d+e+f+i=0 \\ a+d+g+h+i=-4 \\ b+e+g+h+i=-9 \\ c+f+g+h+i=-5 \end{cases}$$

2. 矩陣運算過程：

$$\text{方程組所對應的矩陣：} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$



(1). 第 1 列乘以(-1)加到第 2、3、4、7 列，之後將第 4 列乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(2). 第 4 列乘以(-1)加到第 5、8 列，第 4 列乘以 1 加到第 7 列，之後將第 5 列乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(3). 第 5 列乘以(-1)加到第 6、9 列，第 5 列乘以 1 加到第 8 列，之後將第 2 列乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

(4). 第 2 列乘以 1 加到第 3、8 列，第 2 列乘以(-2)加到第 6 列，第 2 列乘以(-1)加到第 9 列，之後將第 3 列乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 3 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & -21 \end{bmatrix}$$

(5). 將矩陣列與列對調重排：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 3 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & -21 \end{bmatrix}$$

(6). 第 5 列乘以(-5)加到第 6 列，第 5 列乘以 1 加到第 7、8 列，第 5 列乘以(-3)加到第 9 列，之後將第 8 列乘以 $(-\frac{1}{2})$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 & -18 \end{bmatrix}$$

(7). 第 8 列乘以 2 加到第 7 列，第 8 列乘以(-8)加到第 6 列，第 8 列乘以(-6)加到第 9 列，之後將第 7 列乘以 $(-\frac{1}{2})$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & -18 \end{bmatrix}$$

(8). 第 7 列乘以  $(-6)$  加到第 6、9 列，之後將第 6 列乘以  $\frac{1}{4}$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & -15 \end{bmatrix}$$

(9). 第 6 列乘以  $(-6)$  加到第 9 列，之後將第 9 列乘以  $(-\frac{1}{5})$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

由上面矩陣所對應的方程組的第 9 式可得  $i = -0.3$

代入第 6 式可得  $h = -2.3$ 、再代入第 7 式可得  $g = -2.8$ 、

再代入第 8 式可得  $f = -2.8$ 、再代入第 5 式可得  $e = -1.8$ 、

再代入第 4 式可得  $d = 1.7$ 、再代入第 3 式可得  $c = 3.2$ 、

再代入第 2 式可得  $b = -1.8$ 、再代入第 1 式可得  $a = -0.3$ 。

這組答案都是小數，怪不得在我們未解出來之前一直用整數試都試不出來。

(二)第(2)小題：

1. 本小題即求解  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $g$ 、 $h$ 、 $i$  使滿足

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} + aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH + iI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{列出方程式：} \begin{cases} 0+a+b+c+d+g=1 \\ 3+a+b+c+e+h=0 \\ 2+a+b+c+f+i=1 \\ 6+a+d+e+f+g=0 \\ 7+b+d+e+f+h=0 \\ 0+c+d+e+f+i=0 \\ 4+a+d+g+h+i=1 \\ 9+b+e+g+h+i=0 \\ 5+c+f+g+h+i=1 \end{cases}, \quad \text{移項後，} \quad \begin{cases} a+b+c+d+g=1 \\ a+b+c+e+h=-3 \\ a+b+c+f+i=-1 \\ a+d+e+f+g=-6 \\ b+d+e+f+h=-7 \\ c+d+e+f+i=0 \\ a+d+g+h+i=-3 \\ b+e+g+h+i=-9 \\ c+f+g+h+i=-4 \end{cases}$$

2. 矩陣運算過程：

$$\text{方程組所對應的矩陣：} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(1). 第 1 列乘以  $(-1)$  加到第 2、3、4、7 列，之後將第 4 列乘以  $(-1)$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(2). 第 4 列乘以  $(-1)$  加到第 5、8 列，第 4 列乘以 1 加到第 7 列，之後將第 5 列乘以  $(-1)$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(3). 第 5 列乘以(-1)加到第 6、9 列, 第 5 列乘以 1 加到第 8 列, 之後將第 2 列乘以(-1):

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

(4). 第 2 列乘以 1 加到第 3、8 列, 第 2 列乘以(-2)加到第 6 列, 第 2 列乘以(-1)加到第 9 列, 之後將第 3 列乘以(-1):

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 3 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & -22 \end{bmatrix}$$

(5). 將矩陣列與列對調重排:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 3 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & -22 \end{bmatrix}$$

(6). 第 5 列乘以(-5)加到第 6 列，第 5 列乘以 1 加到第 7、8 列，第 5 列乘以(-3)加到第 9 列，之後將第 8 列乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 & -16 \end{bmatrix}$$

(7). 第 8 列乘以 2 加到第 7 列，第 8 列乘以(-8)加到第 6 列，第 8 列乘以(-6)加到第 9 列，之後將第 7 列乘以 $(-\frac{1}{2})$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & -16 \end{bmatrix}$$

(8). 第 7 列乘以(-6)加到第 6、9 列，之後將第 6 列乘以 $\frac{1}{4}$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & -13 \end{bmatrix}$$

(9). 第 6 列乘以(-6)加到第 9 列，之後將第 9 列乘以 $(-\frac{1}{5})$ ：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

由上面矩陣所對應的方程組的第 9 式可得  $i = -0.1$

代入第 6 式可得  $h = -2.1$ 、再代入第 7 式可得  $g = -2.6$ 、

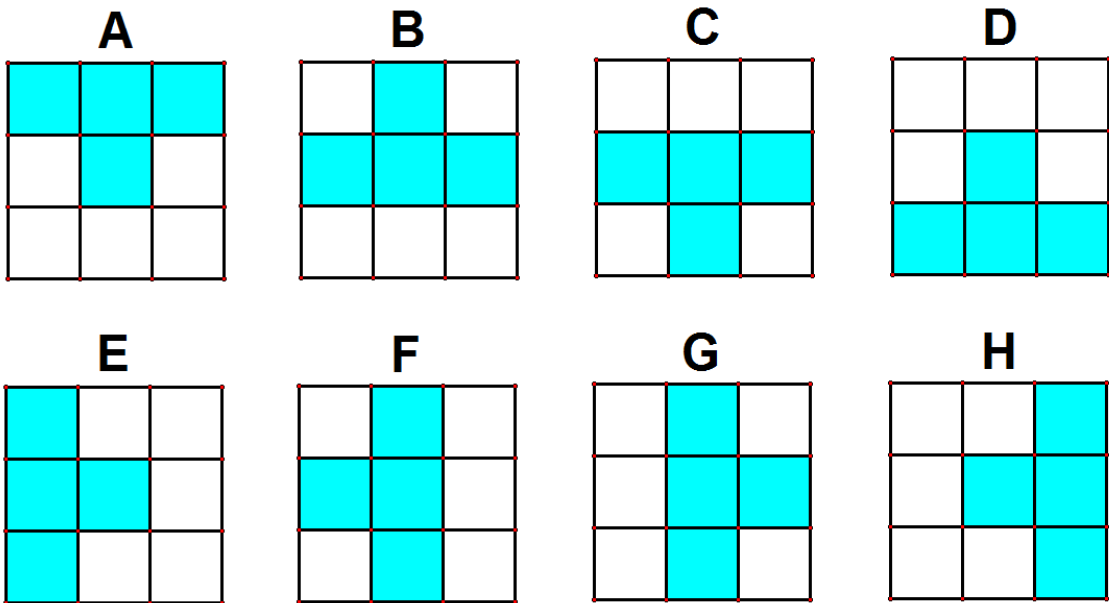
再代入第 8 式可得  $f = -2.6$ 、再代入第 5 式可得  $e = -2.6$ 、

再代入第 4 式可得  $d = 1.9$ 、再代入第 3 式可得  $c = 3.4$ 、

再代入第 2 式可得  $b = -1.6$ 、再代入第 1 式可得  $a = -0.1$ 。

四、改變問題的規則為：可以將短 T 形上的四個數同加上一個數。(變形規則 4)

## 短 T 形



問題：(1) 可否根據變形規則 4 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

 。

(2) 可否根據變形規則 4 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

1	0	1
0	0	0
1	0	1

 。

定義 8 個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(一)第(1)小題：

1. 本小題即求解  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $g$ 、 $h$  使滿足

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} + aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{列出方程式：} \begin{cases} 0 + a + e = 0 \\ 3 + a + b + f + g = 0 \\ 2 + a + h = 0 \\ 6 + b + c + e + f = 0 \\ 7 + a + b + c + d + e + f + g + h = 0 \\ 0 + b + c + g + h = 0 \\ 4 + d + e = 0 \\ 9 + c + d + f + g = 0 \\ 5 + d + h = 0 \end{cases},$$

$$\text{移項後，} \begin{cases} a + e = 0 \\ a + b + f + g = -3 \\ a + h = -2 \\ b + c + e + f = -6 \\ a + b + c + d + e + f + g + h = -7 \\ b + c + g + h = 0 \\ d + e = -4 \\ c + d + f + g = -9 \\ d + h = -5 \end{cases}$$

2. 矩陣運算過程：



方程組所對應的矩陣：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(1). 第 1 列乘以(-1)加到第 2、3、5 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(2). 第 2 列乘以(-1)加到第 4、5、6 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(3). 第 4 列乘以(-1)加到第 5、6、8 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(4). 第 5 列乘以(-1)加到第 7、8、9 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(5)、第3列乘以1加到第1、9列，第3列乘以(-1)加到第2、5、6、8列，第3列乘以2加到第4、7列，最後第3列同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

(6). 第6列乘以1加到第2、8列，第6列同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

(7)、第7列乘以2加到第2、8列，第7列乘以(-1)加到第4、6、9列，第7列乘以1加到第5列，最後第7列同乘以(-1)：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 9 列所對應的方程式為  $0a+0b+0c+0d+0e+0f+0g+0h=1$

故無解(不可解)

(二)第(2)小題：

1. 本小題即求解  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $g$ 、 $h$  使滿足

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} + aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{列出方程式：} \begin{cases} 0+a+e=1 \\ 3+a+b+f+g=0 \\ 2+a+h=1 \\ 6+b+c+e+f=0 \\ 7+a+b+c+d+e+f+g+h=0 \\ 0+b+c+g+h=0 \\ 4+d+e=1 \\ 9+c+d+f+g=0 \\ 5+d+h=1 \end{cases} ,$$

$$\text{移項後，} \begin{cases} a+e=1 \\ a+b+f+g=-3 \\ a+h=-1 \\ b+c+e+f=-6 \\ a+b+c+d+e+f+g+h=-7 \\ b+c+g+h=0 \\ d+e=-3 \\ c+d+f+g=-9 \\ d+h=-4 \end{cases} ,$$

2. 矩陣運算過程：

$$\text{方程組所對應的矩陣：} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(1)、第 1 列乘以(-1)加到第 2、3、5 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(2). 第 2 列乘以(-1)加到第 4、5、6 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(3). 第 4 列乘以(-1)加到第 5、6、8 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(4). 第 5 列乘以(-1)加到第 7、8、9 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(5). 第 3 列乘以 1 加到第 1、9 列，第 3 列乘以(-1)加到第 2、5、6、8 列，第 3 列乘以 2 加到第 4、7 列，最後第 3 列同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(6). 第 6 列乘以 1 加到第 2、8 列，第 6 列同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(7). 第 7 列乘以 2 加到第 2、8 列，第 7 列乘以(-1)加到第 4、6、9 列，第 7 列乘以 1 加到第 5 列，最後第 7 列同乘以(-1)：

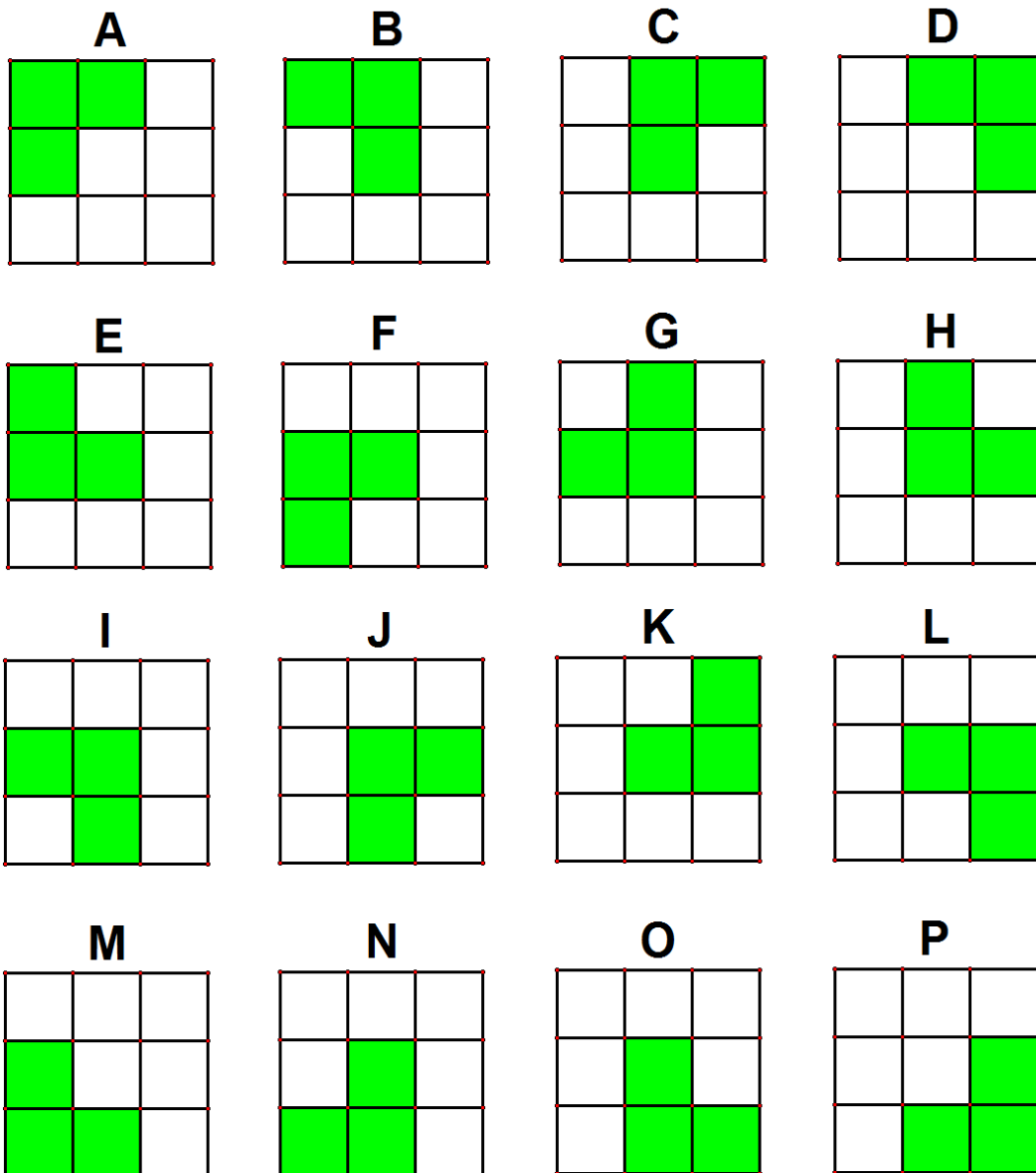
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 9 列所對應的方程式為  $0a+0b+0c+0d+0e+0f+0g+0h=1$

故無解(不可解)

五、改變問題的規則為：可以將小 L 形上的三個數同加上一個數。(變形規則 5)

### 小L形



問題：(1)可否根據變形規則 5 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

 。

(2)可否根據變形規則 5 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

1	0	1
0	0	0
1	0	1

 。

定義 16 個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(一)第(1)小題：

1. 本小題即求解  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p$  使滿足

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} + aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH$$

$$+ iI + jJ + kK + lL + mM + nN + oO + pP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{列出方程式：} \begin{cases} 0+a+b+e=0 \\ 3+a+b+c+d+g+h=0 \\ 2+c+d+k=0 \\ 6+a+e+f+g+i+m=0 \\ 7+b+c+e+f+g+h+i+j+k+l+n+o=0 \\ 0+d+h+j+k+l+p=0 \\ 4+f+m+n=0 \\ 9+i+j+m+n+o+p=0 \\ 5+l+o+p=0 \end{cases} ,$$

$$\text{移項後，} \begin{cases} a+b+e=0 \\ a+b+c+d+g+h=-3 \\ c+d+k=-2 \\ a+e+f+g+i+m=-6 \\ b+c+e+f+g+h+i+j+k+l+n+o=-7 \\ d+h+j+k+l+p=0 \\ f+m+n=-4 \\ i+j+m+n+o+p=-9 \\ l+o+p=-5 \end{cases}$$

2. 矩陣運算過程：

$$\text{方程組所對應的矩陣：} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(1). 第 1 列乘以(-1)加到第 2、4 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$



(2). 第 2 列乘以(-1)加到第 3、4 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(3). 第 3 列乘以(-1)加到第 1 列，第 3 列乘以 1 加到第 2 列，第 3 列乘以(-2)加到第 5 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(4). 第 4 列乘以 1 加到第 1、5 列，第 4 列再同乘以(-1)：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(5). 第 5 列乘以 1 加到第 2、6 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \Rightarrow 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(6). 第 6 列乘以  $(-\frac{2}{3})$  加到第 1 列, 第 6 列乘以  $(-1)$  加到第 2 列, 第 6 列乘以 1 加到

第 5 列, 第 6 列乘以  $\frac{1}{3}$  加到第 3、4 列, 最後第 6 列同乘以  $\frac{1}{3}$  :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(7). 第 8 列乘以  $\frac{1}{3}$  加到第 1、4 列, 第 8 列乘以  $(-\frac{2}{3})$  加到第 3、6 列 :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{17}{3} \\ \Rightarrow 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(8). 第 9 列乘以  $\frac{4}{3}$  加到第 1 列, 第 9 列乘以 1 加到第 2 列, 第 9 列乘以  $(-\frac{2}{3})$  加到第 3、4、6 列, 第 9 列乘以  $(-1)$  加到第 5 列 :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

3. 解的討論：選定適當的參數，本小題可用參數表示未知數 a、b、c、……、p 的答案如下：

$$\begin{cases} a = -10 + t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_6 - t_7 \\ b = 1 - t_1 - t_2 - t_5 \\ c = -7 + t_1 + t_2 - t_6 \\ d = 5 - t_1 - t_2 - t_3 + t_6 \\ e = 9 - t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 \\ f = -4 - t_4 - t_5 \\ g = 8 - t_1 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 \\ h = t_1 \\ i = -9 - t_2 - t_4 - t_5 - t_6 - t_7 \\ j = t_2 \\ k = t_3 \\ l = -5 - t_6 - t_7 \\ m = t_4 \\ n = t_5 \\ o = t_6 \\ p = t_7 \end{cases}$$

若令  $t_1 = 0$ 、 $t_2 = 0$ 、……、 $t_7 = 0$ ，則

$$\begin{cases} a = -10 \\ b = 1 \\ c = -7 \\ d = 5 \\ e = 9 \\ f = -4 \\ g = 8 \\ h = 0 \\ i = -9 \\ j = 0 \\ k = 0 \\ l = -5 \\ m = 0 \\ n = 0 \\ o = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

(二)、第二小題：

1. 本小題及求解  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $g$ 、 $h$ 、 $i$ 、 $j$ 、 $k$ 、 $l$ 、 $m$ 、 $n$ 、 $o$ 、 $p$  使滿足

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} + aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH \\ + iI + jJ + kK + lL + mM + nN + oO + pP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{列出方程式：} \begin{cases} 0 + a + b + e = 1 \\ 3 + a + b + c + d + g + h = 0 \\ 2 + c + d + k = 1 \\ 6 + a + e + f + g + i + m = 0 \\ 7 + b + c + e + f + g + h + i + j + k + l + n + o = 0 \\ 0 + d + h + j + k + l + p = 0 \\ 4 + f + m + n = 1 \\ 9 + i + j + m + n + o + p = 0 \\ 5 + l + o + p = 1 \end{cases} ,$$

$$\text{移項後, } \begin{cases} a+b+e=1 \\ a+b+c+d+g+h=-3 \\ c+d+k=-1 \\ a+e+f+g+i+m=-6 \\ b+c+e+f+g+h+i+j+k+l+n+o=-7 \\ d+h+j+k+l+p=0 \\ f+m+n=-3 \\ i+j+m+n+o+p=-9 \\ l+o+p=-4 \end{cases}$$

2. 矩陣運算過程：

$$\text{方程組所對應的矩陣} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(1). 第 1 列乘以(-1)加到第 2、4 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(2). 第 2 列乘以(-1)加到第 3、4 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(3). 第 3 列乘以  $(-1)$  加到第 1 列, 第 3 列乘以 1 加到第 2 列, 第 3 列乘以  $(-2)$  加到第 5 列:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(4). 第 4 列乘以 1 加到第 1、5 列, 第 4 列再同乘以  $(-1)$ :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(5). 第 5 列乘以 1 加到第 2、6 列:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(6). 第 6 列乘以  $(-\frac{2}{3})$  加到第 1 列, 第 6 列乘以  $(-1)$  加到第 2 列, 第 6 列乘以 1 加到

第 5 列, 第 6 列乘以  $\frac{1}{3}$  加到第 3、4 列, 最後第 6 列同乘以  $\frac{1}{3}$ :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(7). 第 8 列乘以  $\frac{1}{3}$  加到第 1、4 列，第 8 列乘以  $(-\frac{2}{3})$  加到第 3、6 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(8). 第 9 列乘以  $\frac{4}{3}$  加到第 1 列，第 9 列乘以 1 加到第 2 列，第 9 列乘以  $(-\frac{2}{3})$  加到第 3、4、6 列，第 9 列乘以  $(-1)$  加到第 5 列：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

3. 解的討論：選定適當的參數，本小題可用參數表示未知數 a、b、c、……、p 的答案如下：

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a = -\frac{23}{3} + t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_6 - t_7 \\
 b = \frac{1}{3} - t_1 - t_2 - t_5 \\
 c = -5 + t_1 + t_2 - t_6 \\
 d = 4 - t_1 - t_2 - t_3 + t_6 \\
 e = \frac{25}{3} - t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 \\
 f = -3 - t_4 - t_5 \\
 g = \frac{16}{3} - t_1 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 \\
 h = t_1 \\
 i = -9 - t_2 - t_4 - t_5 - t_6 - t_7 \\
 j = t_2 \\
 k = t_3 \\
 l = -4 - t_6 - t_7 \\
 m = t_4 \\
 n = t_5 \\
 o = t_6 \\
 p = t_7
 \end{array} \right.$$

若令  $t_1 = 0$ 、 $t_2 = 0$ 、……、 $t_7 = 0$ ，則



$$\left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{23}{3} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -5 \\ d = 4 \\ e = \frac{25}{3} \\ f = -3 \\ g = \frac{16}{3} \\ h = 0 \\ i = -9 \\ j = 0 \\ k = 0 \\ l = -4 \\ m = 0 \\ n = 0 \\ o = 0 \\ p = 0 \end{array} \right.$$

### 伍、研究結果：

一、『在  $3 \times 3$  正方形表格中填上如圖所示的數，將該表按下列步驟變形，每一步可以將任意相鄰兩格中的數加上同一個數（相鄰是指有公共邊的兩小格）。問能否經過若干個步驟變形，

問題：(1) 可否根據變形規則 1 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

。

答：可以。

(2) 可否根據變形規則 1 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

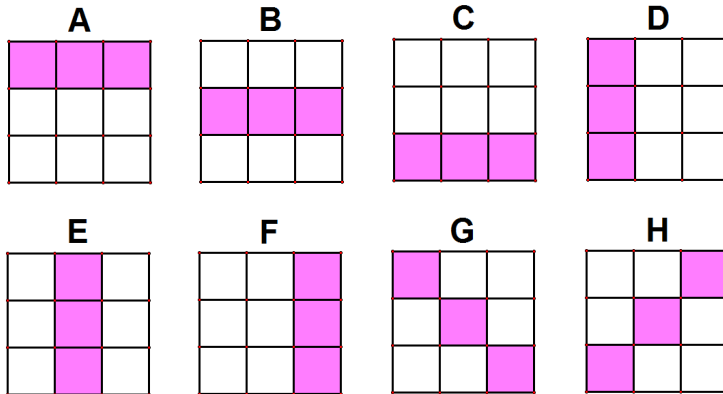
1	0	1
0	0	0
1	0	1

。

答：不可以。

二、變形規則 2：可以將原九宮格中的某列加上同一個數，或某行加上同一個數，或某對角線加同上一個數。

列,行,對角線形



問題：(1)可否根據變形規則 2 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

 。

答：不可以。

(2)可否根據變形規則 2 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

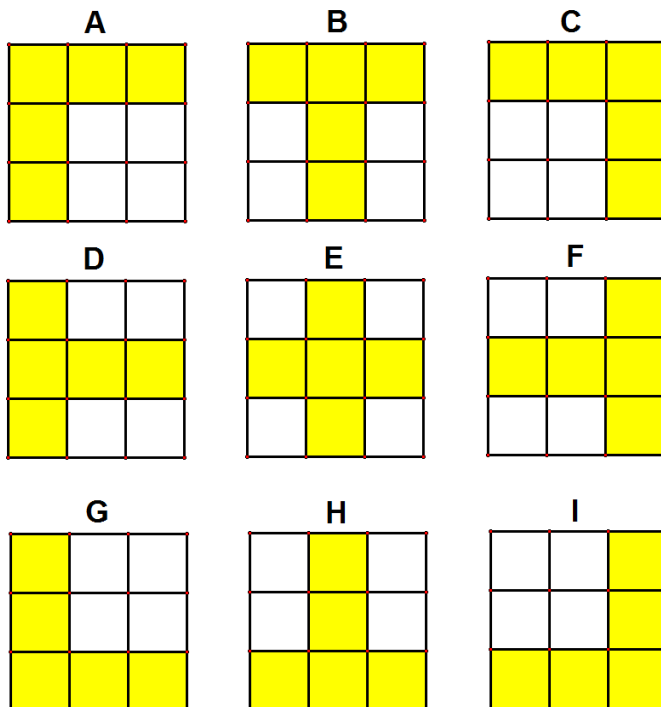
1	0	1
0	0	0
1	0	1

 。

答：不可以。

三、變形規則 3：可以將十字形或不平衡十字形上的五個數同加上一個數。

十字形或不平衡十字形



問題：(1)可否根據變形規則 3 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

 。

答：可以。

(2)可否根據變形規則 3 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

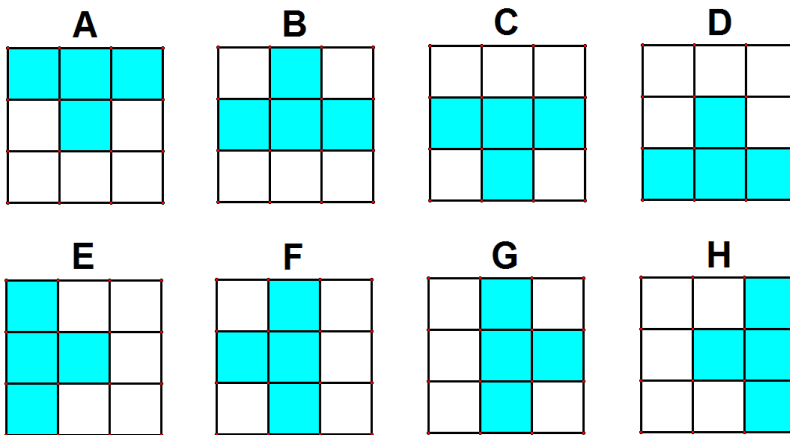
1	0	1
0	0	0
1	0	1

 。

答：可以。

四、變形規則 4：可以將短 T 形上的四個數同加上一個數。

### 短 T 形



問題：(1)可否根據變形規則 4 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

 。

答：不可以。

(2)可否根據變形規則 4 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

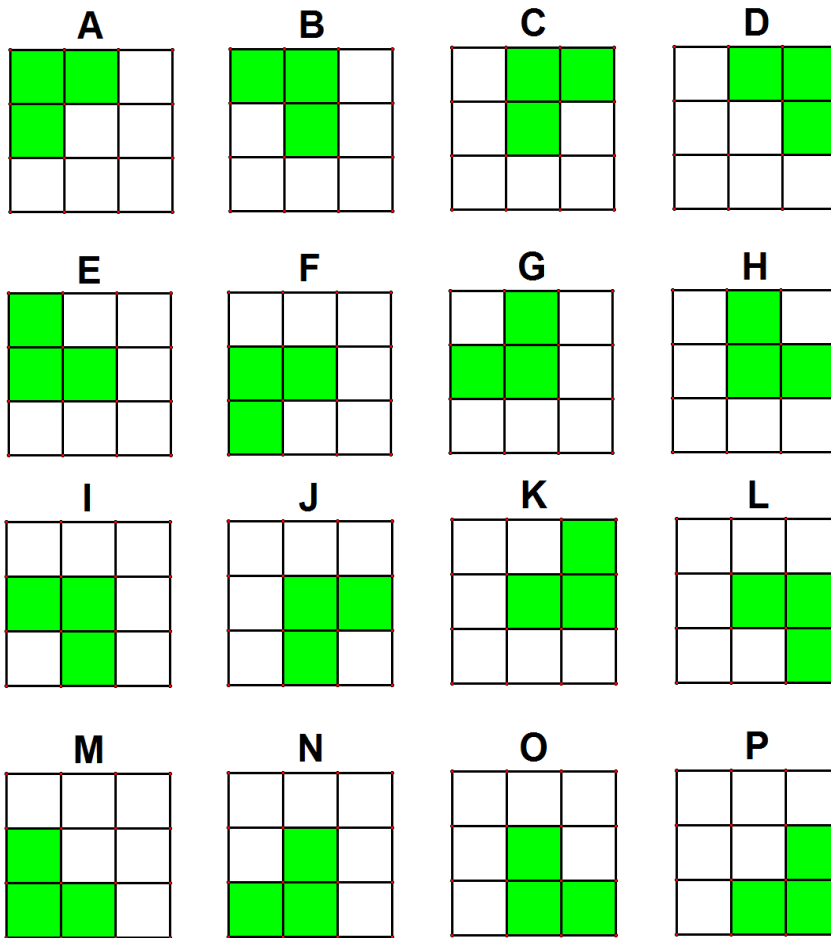
1	0	1
0	0	0
1	0	1

 。

答：不可以。

五、變形規則 5：可以將小 L 形上的三個數同加上一個數。

小 L 形



問題：(1) 可否根據變形規則 5 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

 。

答：可以。

(2) 可否根據變形規則 5 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 

1	0	1
0	0	0
1	0	1

 。

答：可以。

陸、研究討論：

- 一、在探討變形規則 5(小 L 形)時，我們觀察到，  
 在選定適當的參數後，可以用參數表示第(1)小題中未知數 a、b、c、……、p  
 的答案如下：

$$\begin{cases} a = -10 + t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_6 - t_7 \\ b = 1 - t_1 - t_2 - t_5 \\ c = -7 + t_1 + t_2 - t_6 \\ d = 5 - t_1 - t_2 - t_3 + t_6 \\ e = 9 - t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 \\ f = -4 - t_4 - t_5 \\ g = 8 - t_1 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 \\ h = t_1 \\ i = -9 - t_2 - t_4 - t_5 - t_6 - t_7 \\ j = t_2 \\ k = t_3 \\ l = -5 - t_6 - t_7 \\ m = t_4 \\ n = t_5 \\ o = t_6 \\ p = t_7 \end{cases}$$

若令  $t_1 = 0$ 、 $t_2 = 0$ 、……、 $t_7 = 0$

則只需 9 種小 L 型 (A、B、C、D、E、F、G、I、L) 的操作，即可達成原問題的結果，  
 另外的七個完全不必用到。

- 二、在探討的過程中，我們或指導老師有時會亂出一些數字，來看看有沒有答案。例如：  
 (一)、以下的問題，若依據『變形規則 1』，可不可能有答案：

1. 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 


 (1~9 不同的數字)。

答：不可能。

2. 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 


 (相同的數字)。

答：0。

3. 將九宮格 

0	3	2
6	7	0
4	9	5

 中的數字變形為 


 ( $2^0$ 、 $2^1$ 、 $2^2$ 、……、 $2^8$ )。

答：不可能。

4. 將九宮格 

2	1	3
4	3	5
7	9	6

 中的數字變形為 


 (1~9 不同的數字)，可以有幾種。

答：不可能。

5. 將九宮格 

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 中的數字變形為 

7	8	9
6	1	2
5	4	3

 (龍捲風形)。

答：可以。

6. 將九宮格 

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 中的數字變形為 


 (相同的數字)。

答：5。

7. 將九宮格 

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 中的數字變形為 


 ( $2^0$ 、 $2^1$ 、 $2^2$ 、……、 $2^8$ )。

答：不可能。

(二)、以下的問題，若依據『變形規則 2』，可不可能有答案：

1. 將九宮格 

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 中的數字變形為 

0	0	0
0	0	0
0	0	0

。

答：可以。

2. 將九宮格 

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 中的數字變形為 

9	8	7
6	5	4
3	2	1

。

答：可以。

3. 將九宮格 


 (用抽籤亂排的 1~9) 中的數字變形為 

1	2	3
4	5	6
7	8	9

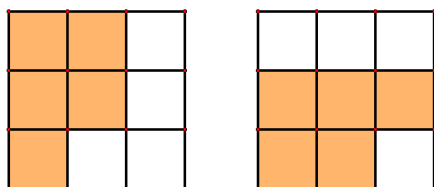
 (排好的 1~9)。

答：討論中，歡迎加入。

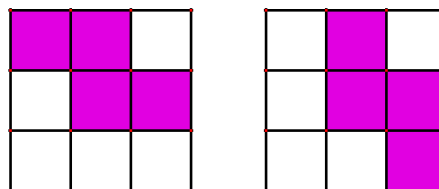
(三)、遇到不同的變形規則或不是  $3 \times 3$  的九宮格怎麼辦？

一、若更改變形規則，如：F 形及對稱 F 形、Z 形(如下圖)等，只要能夠將相對應的各種矩陣定義出來，仿照前面建立模式，就可以解決這類問題。

**F形,對稱F形**



**Z形**



二、若遇到  $4 \times 4$  的方格紙或其他形式的方格紙都可以仿照前面的模式，來求解。

就算是不可解，至少我們知道為何不可解而不是解不出來；如果真的不可解，就不要解了，以免浪費時間。

### 柒、參考資料：

- (一)、胡炳生、胡禮祥著——一九七八~一九九零大陸地區數學競賽題解九章出版社——第 263 頁—民國 83 年版
- (二)、洪有情主編—國中數學第二冊—二元一次聯立方程式—民國 102 年 2 月再版—出版地：台灣—康軒文教事業出版—民國 102 年 2 月出版
- (三)、許志農主編—普通高級中學數學課本第四冊—矩陣單元—龍騰文化事業股份有限公司出版—103 年 2 月再版