研究主題:『連續正整數和』與『連續正奇數和』之探索

摘要:

將一個正整數表示成若干個連續正整數的和或若干個連續正奇數的和，一開始我們先以一個較小的正整數為起點，利用累加的方式，後來經過討論得知可以有兩種方向：一種是利用因數與倍數的關係先找到項數再找首項；另一種是先設定首項再找到項數。兩種方法都可以運用設定 excel 表格來減少運算程序。最後我們討論：可以表示成若干個連續正整數的和或若干個連續正奇數的和的這兩類數的性質，如：

2^m（m 為正整數或 0）都無法表示成若干個連續正整數的和，其他大於 1 的正整數都可以表示成若干個連續正整數的和；大於 2 的『2 的次方數』都可以表示成若干個連續正奇數的和；以及若一個數可以表示成若干個連續正奇數的和時，這樣的數必是完全平方數或某兩個正整數的平方差。

本研究使用的符號與公式:

1、continuing number：某正整數若可以表示為若干個(至少 2 個)連續正整數的和，我們稱此正整數為 continuing number。

2、f(x)：表示正整數 x 可以表示為若干個(至少 2 個)連續正整數的和的方法數。
如：$15=7+8$ 、$4+5+6$ 、$1+2+3+4+5$ ，故 $f(15)=3$ 。

3、odd-continuing number：某正整數若可以表示為若干個(至少 2 個)連續正奇數的和，我們稱此正整數 odd-continuing number。

4、g(x)：表示正整數 x 可以表示為若干個(至少 2 個)連續正奇數的和的方法數。
如：$16=1+3+5+7$ 、$7+9$ ，故 $g(16)=2$ 。

5、若等差數列的首項為 a ，公差為 d ，項數為 n ，則其和 $=\dfrac{[2a+(n-1)\cdot d]\cdot n}{2}$ 。

6、若 x 的一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（其中 a 、b 、c 為實數且 $a>0$）之二實根為 α 、β ，其中 $\alpha<\beta$ ，則
(1)不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解為 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ 。
(2)不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解為 $\alpha<x<\beta$ 。

壹、研究動機:

數學老師建議我們幾個喜歡數學的同學要多涉獵課本外的數學知識，於是喜歡數學及閱讀的我們就想找些課外書來看，圖書館中有一本書『神奇數學 117』，書中提到有些自然數可表示成兩個以上的正整數的和(詳見神奇數學 117 的 70 頁)，如：10 可以表示成 $1+2+3+4$ 、15 可以表示成 $4+5+6$ 或 $7+8$ ，但有些數卻無法辦到，而有些數可以表示成很多種不同的寫法，這引起我們的興趣。想知道其中的奧秘是什麼，有沒有一套不用一步一步加的策略；又如果將問題改變成『將一個正整數表示成若干個連續正奇數的和』又如何，於是我們決定要好好地來探索一番。

貳、研究目的：

一、1 至 100 的正整數中，可以表示為若干個(至少 2 個)連續正整數的和的數有哪些?又它們各分別有哪幾種表示法？可以表示成最多種表示法的數是哪一個？

二、103 是 continuing number 嗎？如果是，則 f(103)＝?

三、2014 是 continuing number 嗎？如果是，則 f(2014)＝?

四、1 至 10000 的正整數中，最大的 continuing number 是哪一個?

五、1 至 100 的正整數中，可以表示為若干個(至少 2 個)連續正奇數的和的數有哪些?又它們各分別有哪幾種表示法？可以表示成最多種表示法的數是哪一個？

六、103 是 odd-continuing number 嗎？如果是，則 g(103)＝?

七、2014 是 odd-continuing number 嗎？如果是，則 g(2014)＝?

八、1 至 10000 的正整數中，最大的 odd-continuing number 是哪一個?

叁、研究器材與設備：

計算機、計算紙、筆、電腦和人腦、微軟 office 軟體、積極挑戰的心。

肆、研究過程與方法：

一、1 至 100 的正整數中，可以表示為若干個(至少 2 個)連續正整數的和的數有哪些?又它們各分別有哪幾種表示法？可以表示成最多種表示法的數是哪一個？

(一)、首先我們想到用『土法煉鋼』的方法，以 30 為例，先以 1 為起點，用累加的方式，可是$1+2+3+4+5+6+7=28<30$、$1+2+3+4+5+6+7+8=36>30$，所以從 1 為起點不對，改以 2 為起點，又不對，……，再以 4 為起點，因為$4+5+6+7+8=30$，對了！……再以 6 為起點，因為$6+7+8+9=30$，對了！……再以 9 為起點，因為$9+10+11=30$，對了！……，依此類推。雖然這個方法很笨，但我們藉此可以更熟悉問題，且我們得知：若要將一個自然數 x，表示成至少 2 個以上的正整數之和，其起點必須小於$\frac{x}{2}$，以下列出 1～30 的討論結果。另外，也可以利用電腦表格來幫助計算。(請參考附錄)

自然數 x	是否為 continuing number?	表示法	f(x)＝?
2	否		0
3	是	1+2	1
4	否		0
5	是	2+3	1
6	是	1+2+3	1
7	是	3+4	1
8	否		0
9	是	4+5、2+3+4	2
10	是	1+2+3+4	1

11	是	5+6	1
12	是	3+4+5	1
13	是	6+7	1
14	是	2+3+4+5	1
15	是	7+8、4+5+6、1+2+3+4+5	3
16	否		0
17	是	8+9	1
18	是	5+6+7、3+4+5+6	2
19	是	9+10	1
20	是	2+3+4+5+6	1
21	是	10+11、6+7+8、1+2+3+4+5+6	3
22	是	4+5+6+7	1
23	是	11+12	1
24	是	7+8+9	1
25	是	12+13、3+4+5+6+7	2
26	是	5+6+7+8	1
27	是	13+14、8+9+10、2+3+4+5+6+7	3
28	是	1+2+3+4+5+6+7	1
29	是	14+15	1
30	是	9+10+11、6+7+8+9、4+5+6+7+8	3

(二)、雖然利用電腦表格來幫助計算有比較節省時間，但是這種方法實在有點遜，我們想尋找更有系統性的方法。

以下是我們的探討過程：

設 x_c 是一個 continuing number，它可以表示成 a、$a+1$、$a+2$、⋯、$a+(n-1)\cdot 1$ 等 n 個連續正整數的和，由等差級數和的公式可得

$\dfrac{[a+a+(n-1)\cdot 1]\times n}{2}=x_c$，其中 a、n、x_c 都是正整數且 $n\geq 2$

1. [想法一]由 n 找 a

將上式改寫成 $(2a+n-1)\times n=2x_c$

可知 n 是 $2x_c$ 的因數

$$\Rightarrow 2a+n-1=\frac{2x_c}{n}$$

$$\Rightarrow 2a=\frac{2x_c}{n}+1-n$$

$$\Rightarrow a=\frac{x_c}{n}+\frac{1}{2}-\frac{n}{2}=\frac{2x_c+n-n^2}{2n}$$

因為 a 為正(整)數，所以分子 $2x_c+n-n^2>0$

$\Rightarrow n^2 - n - 2x_c < 0$

$\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{1+8x_c}}{2} < n < \dfrac{1+\sqrt{1+8x_c}}{2}$

因為$n \geq 2$，所以$2 \leq n < \dfrac{1+\sqrt{1+8x_c}}{2}$

以$x_c = 60$為例

先計算$2x_c = 120$

120的正因數為1、2、3、4、5、6、8、10、12、15、20、24、30、40、60、120，

而$2 \leq n < \dfrac{1+\sqrt{1+8x_c}}{2} \Rightarrow 2 \leq n < \dfrac{1+\sqrt{1+8\cdot 60}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{481}}{2} = 11.46...$

故n可能為2、3、4、5、6、8、10

代入前面公式

x_c	n	$a(=\dfrac{2x_c+n-n^2}{2n})$
60	2	29.5
60	3	19
60	4	13.5
60	5	10
60	6	7.5
60	8	4
60	10	1.5

所以$60 = 19+20+21 = 10+11+12+13+14 = 4+5+6+7+8+9+10+11$

$f(60) = 3$

2.［想法二］由a找n

因為$(2a+n-1)\times n = 2x_c$

所以$2an + n^2 - n = 2x_c$

$\Rightarrow n^2 + (2a-1)\cdot n - 2x_c = 0$

(1).若上面n的一元二次方程式有(正整數)解

則必須判別式≥ 0

$\Rightarrow (2a-1)^2 + 8x_c \geq 0$，但此式必然成立

(2).解$n^2 + (2a-1)\cdot n - 2x_c = 0$

得$n = \dfrac{-(2a-1)\pm\sqrt{(2a-1)^2+8x_c}}{2\cdot 1}$

取正

得 $n=\dfrac{-(2a-1)+\sqrt{(2a-1)^2+8x_c}}{2\cdot 1}$

(3). 因為 n 為正整數，所以 $(2a-1)^2+8x_c$ 必須為完全平方數，且須為正奇數的平方

設 $(2a-1)^2+8x_c=(2k-1)^2$，其中 k 為正整數

故 $\sqrt{(2a-1)^2+8x_c}=2k-1$

推得 $n=\dfrac{-(2a-1)+(2k-1)}{2\cdot 1}=k-a$

(4). 因為 $n\geq 2$

所以 $0<a<\dfrac{x_c}{2}$

以 $x_c=60$ 為例，$0<a<\dfrac{x_c}{2}=30$（以此來設定 a 的範圍）

設定 excel 表格作計算：

x_c	a	$2a-1$	$(2a-1)^2$	$(2a-1)^2+8x_c$	$2k-1$ $(=\sqrt{(2a-1)^2+8x_c})$	k	$n(=k-a)$
60	1	1	1	481	21.9317122	11.4658561	10.4658561
60	2	3	9	489	22.11334439	11.55667219	9.556672194
60	3	5	25	505	22.47220505	11.73610253	8.736102527
60	4	7	49	529	23	12	8
60	5	9	81	561	23.68543856	12.34271928	7.342719282
60	6	11	121	601	24.51530134	12.75765067	6.757650672
60	7	13	169	649	25.47547841	13.2377392	6.237739203
60	8	15	225	705	26.55183609	13.77591805	5.775918047
60	9	17	289	769	27.73084925	14.36542462	5.365424624
60	10	19	361	841	29	15	5
60	11	21	441	921	30.34798181	15.67399091	4.673990905
60	12	23	529	1009	31.76476035	16.38238017	4.382380174
60	13	25	625	1105	33.24154028	17.12077014	4.120770139
60	14	27	729	1209	34.7706773	17.88533865	3.885338651
60	15	29	841	1321	36.34556369	18.67278185	3.672781845
60	16	31	961	1441	37.96050579	19.4802529	3.480252896
60	17	33	1089	1569	39.61060464	20.30530232	3.30530232
60	18	35	1225	1705	41.29164564	21.14582282	3.145822822
60	19	37	1369	1849	43	22	3
60	20	39	1521	2001	44.73253849	22.86626925	2.866269246
60	21	41	1681	2161	46.4865572	23.7432786	2.743278598

60	22	43	1849	2329	48.25971405	24.62985702	2.629857024
60	23	45	2025	2505	50.04997502	25.52498751	2.524987512
60	24	47	2209	2689	51.85556865	26.42778432	2.427784325
60	25	49	2401	2881	53.6749476	27.3374738	2.337473801
60	26	51	2601	3081	55.50675635	28.25337817	2.253378173
60	27	53	2809	3289	57.34980384	29.17490192	2.174901918
60	28	55	3025	3505	59.20304046	30.10152023	2.101520231
60	29	57	3249	3729	61.06553856	31.03276928	2.032769282

所以 $60=19+20+21=10+11+12+13+14=4+5+6+7+8+9+10+11$

$f(60)=3$

(三)最後我們列出 1~100 的結果：

x_c	a	$2a-1$	$(2a-1)^2$	$(2a-1)^2+8x_c$	$2k-1$ $(=\sqrt{(2a-1)^2+8x_c})$	k	$n(=k-a)$
3	1	1	1	25	5	3	2
5	2	3	9	49	7	4	2
6	1	1	1	49	7	4	3
7	3	5	25	81	9	5	2
9	2	3	9	81	9	5	3
9	4	7	49	121	11	6	2
10	1	1	1	81	9	5	4
11	5	9	81	169	13	7	2
12	3	5	25	121	11	6	3
13	6	11	121	225	15	8	2
14	2	3	9	121	11	6	4
15	1	1	1	121	11	6	5
15	4	7	49	169	13	7	3
15	7	13	169	289	17	9	2
17	8	15	225	361	19	10	2
18	3	5	25	169	13	7	4
18	5	9	81	225	15	8	3
19	9	17	289	441	21	11	2
20	2	3	9	169	13	7	5
21	1	1	1	169	13	7	6
21	6	11	121	289	17	9	3
21	10	19	361	529	23	12	2
22	4	7	49	225	15	8	4
23	11	21	441	625	25	13	2
24	7	13	169	361	19	10	3
25	3	5	25	225	15	8	5

25	12	23	529	729	27	14	2
26	5	9	81	289	17	9	4
27	2	3	9	225	15	8	6
27	8	15	225	441	21	11	3
27	13	25	625	841	29	15	2
28	1	1	1	225	15	8	7
29	14	27	729	961	31	16	2
30	4	7	49	289	17	9	5
30	6	11	121	361	19	10	4
30	9	17	289	529	23	12	3
31	15	29	841	1089	33	17	2
33	3	5	25	289	17	9	6
33	10	19	361	625	25	13	3
33	16	31	961	1225	35	18	2
34	7	13	169	441	21	11	4
35	2	3	9	289	17	9	7
35	5	9	81	361	19	10	5
35	17	33	1089	1369	37	19	2
36	1	1	1	289	17	9	8
36	11	21	441	729	27	14	3
37	18	35	1225	1521	39	20	2
38	8	15	225	529	23	12	4
39	4	7	49	361	19	10	6
39	12	23	529	841	29	15	3
39	19	37	1369	1681	41	21	2
40	6	11	121	441	21	11	5
41	20	39	1521	1849	43	22	2
42	3	5	25	361	19	10	7
42	9	17	289	625	25	13	4
42	13	25	625	961	31	16	3
43	21	41	1681	2025	45	23	2
44	2	3	9	361	19	10	8
45	1	1	1	361	19	10	9
45	5	9	81	441	21	11	6
45	7	13	169	529	23	12	5
45	14	27	729	1089	33	17	3
45	22	43	1849	2209	47	24	2
46	10	19	361	729	27	14	4
47	23	45	2025	2401	49	25	2

48	15	29	841	1225	35	18	3
49	4	7	49	441	21	11	7
49	24	47	2209	2601	51	26	2
50	8	15	225	625	25	13	5
50	11	21	441	841	29	15	4
51	6	11	121	529	23	12	6
51	16	31	961	1369	37	19	3
51	25	49	2401	2809	53	27	2
52	3	5	25	441	21	11	8
53	26	51	2601	3025	55	28	2
54	2	3	9	441	21	11	9
54	12	23	529	961	31	16	4
54	17	33	1089	1521	39	20	3
55	1	1	1	441	21	11	10
55	9	17	289	729	27	14	5
55	27	53	2809	3249	57	29	2
56	5	9	81	529	23	12	7
57	7	13	169	625	25	13	6
57	18	35	1225	1681	41	21	3
57	28	55	3025	3481	59	30	2
58	13	25	625	1089	33	17	4
59	29	57	3249	3721	61	31	2
60	4	7	49	529	23	12	8
60	10	19	361	841	29	15	5
60	19	37	1369	1849	43	22	3
61	30	59	3481	3969	63	32	2
62	14	27	729	1225	35	18	4
63	3	5	25	529	23	12	9
63	6	11	121	625	25	13	7
63	8	15	225	729	27	14	6
63	20	39	1521	2025	45	23	3
63	31	61	3721	4225	65	33	2
65	2	3	9	529	23	12	10
65	11	21	441	961	31	16	5
65	32	63	3969	4489	67	34	2
66	1	1	1	529	23	12	11
66	15	29	841	1369	37	19	4
66	21	41	1681	2209	47	24	3
67	33	65	4225	4761	69	35	2

68	5	9	81	625	25	13	8
69	9	17	289	841	29	15	6
69	22	43	1849	2401	49	25	3
69	34	67	4489	5041	71	36	2
70	7	13	169	729	27	14	7
70	12	23	529	1089	33	17	5
70	16	31	961	1521	39	20	4
71	35	69	4761	5329	73	37	2
72	4	7	49	625	25	13	9
72	23	45	2025	2601	51	26	3
73	36	71	5041	5625	75	38	2
74	17	33	1089	1681	41	21	4
75	3	5	25	625	25	13	10
75	10	19	361	961	31	16	6
75	13	25	625	1225	35	18	5
75	24	47	2209	2809	53	27	3
75	37	73	5329	5929	77	39	2
76	6	11	121	729	27	14	8
77	2	3	9	625	25	13	11
77	8	15	225	841	29	15	7
77	38	75	5625	6241	79	40	2
78	1	1	1	625	25	13	12
78	18	35	1225	1849	43	22	4
78	25	49	2401	3025	55	28	3
79	39	77	5929	6561	81	41	2
80	14	27	729	1369	37	19	5
81	5	9	81	729	27	14	9
81	11	21	441	1089	33	17	6
81	26	51	2601	3249	57	29	3
81	40	79	6241	6889	83	42	2
82	19	37	1369	2025	45	23	4
83	41	81	6561	7225	85	43	2
84	7	13	169	841	29	15	8
84	9	17	289	961	31	16	7
84	27	53	2809	3481	59	30	3
85	4	7	49	729	27	14	10
85	15	29	841	1521	39	20	5
85	42	83	6889	7569	87	44	2
86	20	39	1521	2209	47	24	4

87	12	23	529	1225	35	18	6
87	28	55	3025	3721	61	31	3
87	43	85	7225	7921	89	45	2
88	3	5	25	729	27	14	11
89	44	87	7569	8281	91	46	2
90	2	3	9	729	27	14	12
90	6	11	121	841	29	15	9
90	16	31	961	1681	41	21	5
90	21	41	1681	2401	49	25	4
90	29	57	3249	3969	63	32	3
91	1	1	1	729	27	14	13
91	10	19	361	1089	33	17	7
91	45	89	7921	8649	93	47	2
92	8	15	225	961	31	16	8
93	13	25	625	1369	37	19	6
93	30	59	3481	4225	65	33	3
93	46	91	8281	9025	95	48	2
94	22	43	1849	2601	51	26	4
95	5	9	81	841	29	15	10
95	17	33	1089	1849	43	22	5
95	47	93	8649	9409	97	49	2
96	31	61	3721	4489	67	34	3
97	48	95	9025	9801	99	50	2
98	11	21	441	1225	35	18	7
98	23	45	2025	2809	53	27	4
99	4	7	49	841	29	15	11
99	7	13	169	961	31	16	9
99	14	27	729	1521	39	20	6
99	32	63	3969	4761	69	35	3
99	49	97	9409	10201	101	51	2
100	9	17	289	1089	33	17	8
100	18	35	1225	2025	45	23	5

二、103 是 continuing number 嗎？如果是，則 f(103)＝？

（一）、先利用想法一：由 n 找 a

設 x_c ＝103

先計算 $\frac{1+\sqrt{1+8x_c}}{2}=\frac{1+\sqrt{1+8\times103}}{2}=\frac{1+\sqrt{825}}{2}=14.86......$

$\Rightarrow 2\le n<\frac{1+\sqrt{825}}{2}=14.86......$

$2\times103=206$，206 的正因數為 1、2、103、206，

因為 $2\le n<14.86......$，所以 n 只可能是 2，代入前面公式

首項 $a=\frac{x_c}{n}+\frac{1}{2}-\frac{n}{2}=\frac{103}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=51$，

所以 103＝51+52，只有一種表示法，f(103)＝1。

（二）、利用想法二：由 a 找 n

從前面討論可知 $1\le a<\frac{103}{2}=51.5$，設定 excel 表格作計算：

x_c	a	$2a-1$	$(2a-1)^2$	$(2a-1)^2+8x_c$	$2k-1$ $(=\sqrt{(2a-1)^2+8x_c})$	k	$(n=k-a)$
103	1	1	1	825	28.722813	14.861407	13.861407
103	2	3	9	833	28.861739	14.930870	12.930870
103	3	5	25	849	29.137605	15.068802	12.068802
103	4	7	49	873	29.546573	15.273287	11.273287
103	5	9	81	905	30.083218	15.541609	10.541609
103	6	11	121	945	30.740852	15.870426	9.870426
103	7	13	169	993	31.511903	16.255951	9.255951
103	8	15	225	1049	32.388269	16.694135	8.694135
103	9	17	289	1113	33.361655	17.180827	8.180827
103	10	19	361	1185	34.423829	17.711914	7.711914
103	11	21	441	1265	35.566838	18.283419	7.283419
103	12	23	529	1353	36.783148	18.891574	6.891574
103	13	25	625	1449	38.065733	19.532866	6.532866
103	14	27	729	1553	39.408121	20.204060	6.204060
103	15	29	841	1665	40.804412	20.902206	5.902206
103	16	31	961	1785	42.249260	21.624630	5.624630
103	17	33	1089	1913	43.737855	22.368928	5.368928
103	18	35	1225	2049	45.265881	23.132941	5.132941
103	19	37	1369	2193	46.829478	23.914739	4.914739
103	20	39	1521	2345	48.425200	24.712600	4.712600
103	21	41	1681	2505	50.049975	25.524988	4.524988
103	22	43	1849	2673	51.701064	26.350532	4.350532
103	23	45	2025	2849	53.376025	27.188012	4.188012
103	24	47	2209	3033	55.072679	28.036340	4.036340

103	25	49	2401	3225	56.789083	28.894542	3.894542
103	26	51	2601	3425	58.523500	29.761750	3.761750
103	27	53	2809	3633	60.274373	30.637186	3.637186
103	28	55	3025	3849	62.040309	31.520155	3.520155
103	29	57	3249	4073	63.820060	32.410030	3.410030
103	30	59	3481	4305	65.612499	33.306249	3.306249
103	31	61	3721	4545	67.416615	34.208308	3.208308
103	32	63	3969	4793	69.231496	35.115748	3.115748
103	33	65	4225	5049	71.056316	36.028158	3.028158
103	34	67	4489	5313	72.890329	36.945164	2.945164
103	35	69	4761	5585	74.732858	37.866429	2.866429
103	36	71	5041	5865	76.583288	38.791644	2.791644
103	37	73	5329	6153	78.441061	39.720530	2.720530
103	38	75	5625	6449	80.305666	40.652833	2.652833
103	39	77	5929	6753	82.176639	41.588320	2.588320
103	40	79	6241	7065	84.053554	42.526777	2.526777
103	41	81	6561	7385	85.936023	43.468011	2.468011
103	42	83	6889	7713	87.823687	44.411844	2.411844
103	43	85	7225	8049	89.716219	45.358110	2.358110
103	44	87	7569	8393	91.613318	46.306659	2.306659
103	45	89	7921	8745	93.514705	47.257352	2.257352
103	46	91	8281	9105	95.420124	48.210062	2.210062
103	47	93	8649	9473	97.329338	49.164669	2.164669
103	48	95	9025	9849	99.242128	50.121064	2.121064
103	49	97	9409	10233	101.158292	51.079146	2.079146
103	50	99	9801	10625	103.077641	52.038820	2.038820
103	51	101	10201	11025	105	53	2

所以 103＝51+52，只有一種表示法，f(103)＝1。

三、2014 是 continuing number 嗎？如果是，則 f(2014)＝?

(一)、先利用想法一：由 n 找 a

設 $x_c = 2014$

先計算 $2\times 2014 = 4028$

4028 的正因數為：1、2、4、19、38、53、76、106、212、1007、2014、4028

再計算 $\dfrac{1+\sqrt{1+8x_c}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{1+8\times 2014}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{16113}}{2}=63.96......$

$$\Rightarrow 2 \le n < \frac{1+\sqrt{1+8x_c}}{2} \Rightarrow 2 \le n < 63.96...$$

故 n 可能為 2、4、19、38、53

代入前面公式並設定設定 excel 表格作計算：

x_c	n	$a(=\dfrac{2x_c+n-n^2}{2n})$
2014	2	1006.5
2014	4	502
2014	19	97
2014	38	34.5
2014	53	12

所以 $2014 = 502+503+504+505 = 97+98+99+......+115 = 12+13+14+......+64$

$f(2014)=3$

（二）、利用想法二：由 a 找 n

從前面討論可知 $1 \le a < \dfrac{2014}{2} = 1007$，設定 excel 表格作計算：

僅列出部分表格(紅色表示正確的情形)

x_c	a	$2a-1$	$(2a-1)^2$	$(2a-1)^2+8x_c$	$2k-1$ $(=\sqrt{(2a-1)^2+8x_c})$	k	$(n=k-a)$
2014	1	1	1	16113	126.9369922	63.96849612	62.96849612
2014	2	3	9	16121	126.9685	63.98425002	61.98425002
2014	3	5	25	16137	127.0314922	64.01574608	61.01574608
…	…	…	…	…	…	…	…
2014	12	23	529	16641	129	65	53
…	…	…	…	…	…	…	…
2014	97	193	37249	53361	231	116	19
…	…	…	…	…	…	…	…
2014	502	1003	1006009	1022121	1011	506	4

所以 $2014 = 502+503+504+505 = 97+98+99+......+115 = 12+13+14+......+64$

$f(2014)=3$

四、1 至 10000 的正整數中，最大的 continuing number 是哪一個?

從前面的討論得知：大於 1 的正奇數必為 continuing number，原因如下：

設 x 為大於 1 的正奇數

則 $x \div 2 = y + 0.5$（y 為正整數 ），

則可知 $x=2(y+0.5)=2y+1=y+(y+1)$：可表為 2 個連續正整數的和

故本題若 10000 是 continuing number，則答案即為 10000，

若不是，則答案為 9999。($9999=4999+5000$)

10000 是否為 continuing number 之探討：

(一)、利用想法一：由 n 找 a

設 $x_c=10000$

先計算 $2\times10000=20000$

20000 的正因數為：1、2、4、5、8、10、16、20、25、32、40、50、80、100、125、160、200、250、400、500、625、800、1000、1250、2000、2500、4000、5000、10000、20000。

再計算 $\frac{1+\sqrt{1+8x_c}}{2}=\frac{1+\sqrt{1+8\times10000}}{2}=\frac{1+\sqrt{80001}}{2}=141.92......$

$\Rightarrow 2\le n<\frac{1+\sqrt{1+8x_c}}{2}\Rightarrow 2\le n<141.92......$

故 n 可能為 2、4、5、8、10、16、20、25、32、40、50、80、100、125

代入前面公式並設定設定 excel 表格作計算：

x_c	n	$a(=\frac{2x_c+n-n^2}{2n})$
10000	2	4999.5
10000	4	2498.5
10000	5	1998
10000	8	1246.5
10000	10	995.5
10000	16	617.5
10000	20	490.5
10000	25	388
10000	32	297
10000	40	230.5
10000	50	175.5
10000	80	85.5
10000	100	50.5
10000	125	18

故 $10000=18+19+...+142=297+298+......+328=388+389+......+412$

$=1998+1999+2000+2001+2002$

所以 10000 是 continuing number。

(二)、利用想法二：由 a 找 n

從前面討論可知 $1\le a<\frac{10000}{2}=50000$，設定 excel 表格作計算：

(因表格龐大，僅列出正確的情形)

x_c	a	$2a-1$	$(2a-1)^2$	$(2a-1)^2+8x_c$	$2k-1$ $(=\sqrt{(2a-1)^2+8x_c})$	k	$(n=k-a)$
10000	18	35	1225	81225	285	143	125
10000	297	593	351649	431649	657	329	32
10000	388	775	600625	680625	825	413	25
10000	1998	3995	15960025	16040025	4005	2003	5

與前面得到的結果相同。

五、1 至 100 的正整數中，可以表示為若干個(至少 2 個)連續正奇數的和的數有哪些?又它們各分別有哪幾種表示法？可以表示成最多種表示法的數是哪一個？

(一)、理論探討：

設 x_{oc} 是一個 odd-continuing number，它可以表示成 $2m-1$、$2m+1$、…、$(2m-1)+(n-1)\cdot 2$ 等 n 個連續正奇數的和，

$\dfrac{\{(2m-1)+[(2m-1)+(n-1)\cdot 2]\}\times n}{2}=x_{oc}$，其中 m、n、x_{oc} 都是正整數且 $n\ge 2$

1. [想法一]由 n 找 $(2m-1)$

將上式改寫

$\dfrac{[(4m-2)+(2n-2)]\times n}{2}=x_{oc}$

$(2m+n-2)\times n=x_{oc}$

可知 n 是 x_{oc} 的正因數

$\Rightarrow 2m+n-2=\dfrac{x_{oc}}{n}$

$\Rightarrow 2m=\dfrac{x_{oc}}{n}+2-n$

$\Rightarrow m=\dfrac{x_{oc}}{2n}+1-\dfrac{n}{2}=\dfrac{x_{oc}+2n-n^2}{2n}$

因為 m 為正(整)數，所以 $x_{oc}+2n-n^2>0$

$\Rightarrow n^2-2n-x_{oc}<0$

$\Rightarrow \dfrac{2-\sqrt{4+4x_{oc}}}{2}<n<\dfrac{2+\sqrt{4+4x_{oc}}}{2}$

$\Rightarrow 1-\sqrt{1+x_{oc}}<n<1+\sqrt{1+x_{oc}}$

因為 $n\ge 2$，所以 $\Rightarrow 2\le n<1+\sqrt{1+x_{oc}}$

以 75 為例作探討：

設 $x_{oc}=75$

75 的正因數為：1、3、5、15、25、75

計算$1+\sqrt{1+x_{oc}}=1+\sqrt{1+75}=9.71...$

且$\because 2\le n<1+\sqrt{1+x_c}\Rightarrow 2\le n<9.71...$

故 n 可能為 3、5

代入前面公式，並設定 excel 表格作計算：

x_{oc}	n	$m(=\dfrac{x_{oc}+2n-n^2}{2n})$	$2m-1$
75	3	12	23
75	5	6	11

故 $75=23+25+27=11+13+15+17+19$

$g(75)=2$

2.［想法二］由 m 找 n

因為 $(2m+n-2)\times n=x_{oc}$

$\Rightarrow n^2+(2m-2)\cdot n-x_{oc}=0$

(1). 因為判別式 $(2m-2)^2+4x_{oc}$ 恆 >0

故方程式恆有實數解

(2). 解 $n^2+(2m-2)\cdot n-x_{oc}=0$

得 $n=\dfrac{-(2m-2)\pm\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}}}{2\cdot 1}$

取正

得 $n=\dfrac{-(2m-2)+\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}}}{2\cdot 1}$

(3). 因為 n 為正整數，所以 $(2m-2)^2+4x_{oc}$ 必須為完全平方數且須為正偶數的平方

設 $(2m-2)^2+4x_{oc}=(2k)^2$ ，其中 k 為正整數

故 $\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}}=2k$

推得 $n=\dfrac{-(2m-2)+(2k)}{2}=k-m+1$

(4). 因為 $n\ge 2$

所以首項 $2m-1<\dfrac{x_{oc}}{2}$

$\Rightarrow m<\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}$，且 m 為正整數

(a)若 $\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}$ 是整數，可設 $m=1$、2、3、…、$[\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}]-1$

符號 $[\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}]$ 表示小於或等於 $\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}$ 的最大整數。

(b)若 $\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}$ 不是整數，可設 $m=1$、2、3、…、$[\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}]$

以 75 為例作探討：

設 $x_{oc}=75$

$\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{75}{4}+\dfrac{1}{2}=19.25$

可設 $m=1$、2、3、…、19

設定 excel 表格作計算：

x_{oc}	m	$2m-1$	$2m-2$	$(2m-2)^2+4x_{oc}$	$2k(=\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}})$	k	$n(=k-m+1)$
75	1	1	0	300	17.32050808	8.660254	8.660254038
75	2	3	2	304	17.43559577	8.7177979	7.717797887
75	3	5	4	316	17.77638883	8.8881944	6.888194417
75	4	7	6	336	18.33030278	9.1651514	6.16515139
75	5	9	8	364	19.07878403	9.539392	5.539392014
75	6	11	10	400	20	10	5
75	7	13	12	444	21.07130751	10.535654	4.535653753
75	8	15	14	496	22.27105745	11.135529	4.135528726
75	9	17	16	556	23.57965225	11.789826	3.789826123
75	10	19	18	624	24.97999199	12.489996	3.489995997
75	11	21	20	700	26.45751311	13.228757	3.228756555
75	12	23	22	784	28	14	3
75	13	25	24	876	29.59729717	14.798649	2.798648587
75	14	27	26	976	31.2409987	15.620499	2.620499352
75	15	29	28	1084	32.92415527	16.462078	2.462077633
75	16	31	30	1200	34.64101615	17.320508	2.320508076
75	17	33	32	1324	36.3868108	18.193405	2.193405399
75	18	35	34	1456	38.15756806	19.078784	2.078784028
75	19	37	36	1596	39.94996871	19.974984	1.974984355

故 $75=23+25+27=11+13+15+17+19$

$g(75)=2$

(二)、最後我們列出 4~100 的結果：

x_{oc}	m	$2m-1$	$2m-2$	$(2m-2)^2+4x_{oc}$	$2k(=\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}})$	k	$n(=k-m+1)$
4	1	1	0	16	4	2	2
8	2	3	2	36	6	3	2
9	1	1	0	36	6	3	3
12	3	5	4	64	8	4	2
15	2	3	2	64	8	4	3
16	1	1	0	64	8	4	4
16	4	7	6	100	10	5	2
20	5	9	8	144	12	6	2
21	3	5	4	100	10	5	3
24	2	3	2	100	10	5	4
24	6	11	10	196	14	7	2
25	1	1	0	100	10	5	5
27	4	7	6	144	12	6	3
28	7	13	12	256	16	8	2
32	3	5	4	144	12	6	4
32	8	15	14	324	18	9	2
33	5	9	8	196	14	7	3
35	2	3	2	144	12	6	5
36	1	1	0	144	12	6	6
36	9	17	16	400	20	10	2
39	6	11	10	256	16	8	3
40	4	7	6	196	14	7	4
40	10	19	18	484	22	11	2
44	11	21	20	576	24	12	2
45	3	5	4	196	14	7	5
45	7	13	12	324	18	9	3
48	2	3	2	196	14	7	6
48	12	23	22	676	26	13	2
49	1	1	0	196	14	7	7
51	8	15	14	400	20	10	3
52	13	25	24	784	28	14	2
55	4	7	6	256	16	8	5
56	6	11	10	324	18	9	4
56	14	27	26	900	30	15	2
57	9	17	16	484	22	11	3
60	3	5	4	256	16	8	6
60	15	29	28	1024	32	16	2

63	2	3	2	256	16	8	7
63	10	19	18	576	24	12	3
64	1	1	0	256	16	8	8
64	7	13	12	400	20	10	4
64	16	31	30	1156	34	17	2
65	5	9	8	324	18	9	5
68	17	33	32	1296	36	18	2
69	11	21	20	676	26	13	3
72	4	7	6	324	18	9	6
72	8	15	14	484	22	11	4
72	18	35	34	1444	38	19	2
75	6	11	10	400	20	10	5
75	12	23	22	784	28	14	3
76	19	37	36	1600	40	20	2
77	3	5	4	324	18	9	7
80	2	3	2	324	18	9	8
80	9	17	16	576	24	12	4
80	20	39	38	1764	42	21	2
81	1	1	0	324	18	9	9
81	13	25	24	900	30	15	3
84	5	9	8	400	20	10	6
84	21	41	40	1936	44	22	2
85	7	13	12	484	22	11	5
87	14	27	26	1024	32	16	3
88	10	19	18	676	26	13	4
88	22	43	42	2116	46	23	2
91	4	7	6	400	20	10	7
92	23	45	44	2304	48	24	2
93	15	29	28	1156	34	17	3
95	8	15	14	576	24	12	5
96	3	5	4	400	20	10	8
96	6	11	10	484	22	11	6
96	11	21	20	784	28	14	4
96	24	47	46	2500	50	25	2
99	2	3	2	400	20	10	9
99	16	31	30	1296	36	18	3
100	1	1	0	400	20	10	10
100	25	49	48	2704	52	26	2

六、103 是 odd-continuing number 嗎？如果是，則 g(103)＝?

（一）、利用想法一：由 n 找 $(2m-1)$

設 $x_{oc}=103$

103 的正因數為：1、103

計算 $1+\sqrt{1+x_{oc}}=1+\sqrt{1+103}=11.19...$

$2\le n<1+\sqrt{1+x_c}\Rightarrow 2\le n<11.19...$

故 n 無解

103 不是 odd-continuing number。

（二）、利用想法二：由 m 找 n

設 $x_{oc}=103$

計算 $\frac{x_{oc}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{103}{4}+\frac{1}{2}=26.25$

可設 $m=1$、2、3、…、26

x_{oc}	m	$2m-1$	$2m-2$	$(2m-2)^2+4x_{oc}$	$2k(=\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}})$	k	$n(=k-m+1)$
103	1	1	0	412	20.29778313	10.14889157	10.14889157
103	2	3	2	416	20.39607805	10.19803903	9.198039027
103	3	5	4	428	20.68816087	10.34408043	8.344080433
103	4	7	6	448	21.16601049	10.58300524	7.583005244
103	5	9	8	476	21.81742423	10.90871211	6.908712115
103	6	11	10	512	22.627417	11.3137085	6.313708499
103	7	13	12	556	23.57965225	11.78982612	5.789826123
103	8	15	14	608	24.65765601	12.32882801	5.328828006
103	9	17	16	668	25.84569597	12.92284798	4.922847983
103	10	19	18	736	27.12931993	13.56465997	4.564659966
103	11	21	20	812	28.4956137	14.24780685	4.247806849
103	12	23	22	896	29.93325909	14.96662955	3.966629547
103	13	25	24	988	31.43246729	15.71623365	3.716233646
103	14	27	26	1088	32.984845	16.4924225	3.492422502
103	15	29	28	1196	34.58323293	17.29161647	3.291616466
103	16	31	30	1312	36.22154055	18.11077028	3.110770276
103	17	33	32	1436	37.89459064	18.94729532	2.947295321
103	18	35	34	1568	39.59797975	19.79898987	2.798989873
103	19	37	36	1708	41.32795664	20.66397832	2.66397832

103	20	39	38	1856	43.08131846	21.54065923	2.540659229
103	21	41	40	2012	44.85532298	22.42766149	2.427661492
103	22	43	42	2176	46.64761516	23.32380758	2.323807579
103	23	45	44	2348	48.45616576	24.22808288	2.228082879
103	24	47	46	2528	50.27922036	25.13961018	2.13961018
103	25	49	48	2716	52.11525688	26.05762844	2.057628442
103	26	51	50	2912	53.96295025	26.98147513	1.981475126

故 103 不是 odd-continuing number。

g(103)＝0

七、2014 是 odd-continuing number 嗎？如果是，則 g(2014)＝?

(一)、利用想法一：由 n 找 $(2m-1)$

設 $x_{oc}=2014$

2014 的正因數為：1、2、19、38、57、114、1007、2014

計算 $1+\sqrt{1+x_{oc}}=1+\sqrt{1+2014}=45.88...$

$2\le n<1+\sqrt{1+x_c}\Rightarrow 2\le n<45.88...$

故 n 可能為 2、19、38

代入前面公式

x_{oc}	n	$m(=\dfrac{x_{oc}+2n-n^2}{2n})$	$2m-1$
2014	2	503.5	1006
2014	19	44.5	88
2014	38	8.5	16

故 2014 不是 odd-continuing number。

g(2014)＝0

(二)、利用想法二：由 m 找 n

設 $x_{oc}=2014$

$\dfrac{x_{oc}}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2014}{4}+\dfrac{1}{2}=504$

可設 $m=1$、2、3、…、503

(因表格龐大，僅列出部分表格)

x_{oc}	m	$2m-1$	$2m-2$	$(2m-2)^2+4x_{oc}$	$2k(=\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}})$	k	$n(=k-m+1)$
2014	1	1	0	8056	89.75522269	44.87761134	44.87761134
2014	2	3	2	8060	89.77750275	44.88875137	43.88875137

2014	3	5	4	8072	89.84430978	44.92215489	42.92215489
2014	4	7	6	8092	89.95554458	44.97777229	41.97777229
2014	5	9	8	8120	90.11104261	45.0555213	41.0555213
2014	6	11	10	8156	90.31057524	45.15528762	40.15528762
2014	7	13	12	8200	90.55385138	45.27692569	39.27692569
2014	8	15	14	8252	90.84051959	45.4202598	38.4202598
2014	9	17	16	8312	91.17017056	45.58508528	37.58508528
2014	10	19	18	8380	91.54233993	45.77116997	36.77116997
…	…	…	…	…	…	…	…
2014	494	987	986	980252	990.0767647	495.0383824	2.03838235
2014	495	989	988	984200	992.068546	496.034273	2.034273009
2014	496	991	990	988156	994.0603603	497.0301802	2.03018017
2014	497	993	992	992120	996.0522075	498.0261037	2.026103734
2014	498	995	994	996092	998.0440872	499.0220436	2.022043601
2014	499	997	996	1000072	1000.035999	500.0179997	2.017999676
2014	500	999	998	1004060	1002.027944	501.0139719	2.013971861
2014	501	1001	1000	1008056	1004.01992	502.0099601	2.009960061
2014	502	1003	1002	1012060	1006.011928	503.0059642	2.005964179
2014	503	1005	1004	1016072	1008.003968	504.0019841	2.001984123

亦得前面相同之結果。

八、1 至 10000 的正整數中，最大的 odd-continuing number 是哪一個?

（一）、因為 $9999 \div 3 = 3333$ 為奇數

所以 9999 可表為 $(3333-2)+3333+(3333+2)=3331+3333+3335$

故本題若 10000 為 odd-continuing number，則答案即為 10000，

若不是，則答案為 9999。

（二）、10000 是否為 odd-continuing number 之探討：

1. 利用想法一：由 n 找 $(2m-1)$

設 $x_{oc}=10000$

10000 的正因數為：1、2、4、5、8、10、16、20、25、40、50、80、100、125、200、250、400、500、625、1000、1250、2000、2500、5000、10000

計算 $1+\sqrt{1+x_{oc}}=1+\sqrt{1+10000}=101.00...$

$2 \le n < 1+\sqrt{1+x_c} \Rightarrow 2 \le n < 101.00...$

故 n 可能為 2、4、5、8、10、16、20、25、40、50、80、100

代入前面公式

x_{oc}	n	$m(=\dfrac{x_{oc}+2n-n^2}{2n})$	$2m-1$
10000	2	2500	4999
10000	4	1249	2497
10000	5	998.5	1996
10000	8	622	1243
10000	10	496	991
10000	16	305.5	610
10000	20	241	481
10000	25	188.5	376
10000	40	106	211
10000	50	76	151
10000	80	23.5	46

故 10000 是 odd-continuing number。

g(10000)＝7

2. 利用想法二：由 m 找 n

設 $x_{oc}=10000$

$$\frac{x_{oc}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{10000}{4}+\frac{1}{2}=2500.5$$

可設 $m=1$、2、3、…、2500

(因表格龐大，僅列出正確的情形)

x_{oc}	m	$2m-1$	$2m-2$	$(2m-2)^2+4x_{oc}$	$2k(=\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}})$	k	$n(=k-m+1)$
10000	76	151	150	62500	250	125	50
10000	106	211	210	84100	290	145	40
10000	241	481	480	270400	520	260	20
10000	496	991	990	1020100	1010	505	10
10000	622	1243	1242	1582564	1258	629	8
10000	1249	2497	2496	6270016	2504	1252	4
10000	2500	4999	4998	25020004	5002	2501	2

故 10000 是 odd-continuing number。

g(10000)＝7

伍、研究討論：

一、可否找到一個正整數同時可以表示成 2、3、4、5、6、7、8、9、10 個連續正整數的和？最小的數是多少？

經過我們的討論，答案是不可能。

理由如下：

若某正整數可以表示成 2 個連續正整數的和，則此正整數必為奇數

(因為奇數＋偶數或偶數＋奇數都等於奇數)

若某正整數可以表示成 4 個連續正整數的和，則此正整數必為偶數

(因為奇數＋偶數＋奇數＋偶數或偶數＋奇數＋偶數＋奇數都等於偶數)

故無法找到一個正整數同時可以表示成 2、3、4、5、6、7、8、9、10 個連續正整數的和。

二、可否找到一個正整數同時可以表示成 2、3、4、5、6、7、8、9、10 個連續正奇數的和？最小的數是多少？

答案也是：不可能。

理由如下：

若某正整數可以表示成 2 個連續正奇數的和，則此正整數必為偶數

(因為奇數＋奇數等於偶數)

若某正整數可以表示成 3 個連續正奇數的和，則此正整數必為奇數

(因為奇數＋奇數＋奇數等於奇數)

故無法找到一個正整數同時可以表示成 2、3、4、5、6、7、8、9、10 個連續正奇數的和。

三、非 continuing number 之探討：

由前面得到的結果中，察覺到像 2^m (其中 m 為自然數)的數都不是 continuing number。

原因如下：若 2^m (其中 m 為自然數)是 continuing number

則可得到 $(2a+n-1)\times n = 2\cdot 2^m = 2^{m+1}$

可知 n 是 2^{m+1} 的正因數：1(不合)、2^1、2^2、…、2^{m+1}

假設 $n=2^i$，i 為 1、2、3、……、$m+1$

$$\Rightarrow a=\frac{2x_c+n-n^2}{2n}=\frac{2\cdot 2^m+2^i-2^{2i}}{2\cdot 2^i}=2^{m-i}+\frac{1}{2}-2^{i-1}$$

1. 當 $i=1$、2、3、…、m

   因為 2^{m-i} 與 2^{i-1} 都是整數

   所以 $a=2^{m-i}+\frac{1}{2}-2^{i-1}$ 必不是整數。

2. 當 $i=m+1$

   則 $a=2^{-1}+\frac{1}{2}-2^m=-2^m$ 必不是正整數。

四、2^m (m 為正整數或 0) 都不是 continuing number，其他大於 1 的正整數都是 continuing number。

設 x 是一個大於 1 但不是 2 的乘方的數

1. 若 x 為奇數，則根據(理由請參閱 P13~P14)的說明，可知 x 必為 continuing number。
2. 若 x 為偶數但不是 2 的乘方的數，則 x 必可以化成 $p\times 2^m$ 的形式

（其中 p 為 ≥ 3 的奇數、m 為 ≥ 1 的整數）

設 $x_c = p\times 2^m$，則 $2x_c = 2\times p\times 2^m = p\times 2^{m+1}$

因為 p 為奇數、2^{m+1} 為偶數

所以 $p \neq 2^{m+1}$

(1)若 $p < 2^{m+1}$

則令 $n = p$

代入前面公式，得

首項 $a = \dfrac{x_c}{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2} = \dfrac{p\times 2^m}{p} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{p}{2} = \dfrac{2^{m+1} - p + 1}{2}$，此數必為正整數

(2)若 $2^{m+1} < p$

則令 $n = 2^{m+1}$

代入前面公式，得

首項 $a = \dfrac{x_c}{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2} = \dfrac{p\times 2^m}{2^{m+1}} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2^{m+1}}{2} = \dfrac{p - 2^{m+1} + 1}{2}$，此數必為正整數

故得到上述結論

五、大於 2 的質數都是 continuing number，且都只有一種表示法。

若 p 為大於 2 的質數，則 p 必為奇數，前面已知 p 必為 continuing number

（理由請參閱 P13~P14）

且若 p 為大於 2 的質數，則 p 只有 2 個正因數：1、p

設 $x_c = p$

則 $2x_c = 2\times p$

2p 的正因數為：1、2、p、2p

因為 $n \geq 2$，所以 n 只可能為 2、p、2p

代入公式：首項 $a = \dfrac{x_c}{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2}$

1. 當 $n = 2$ 時，$a = \dfrac{x_c}{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2} = \dfrac{p}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2}$

因為 p 為大於 2 的奇數

假設 $p = 2t + 1$（t 為自然數）

所以 $a = \dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2t+1}{2} - \dfrac{1}{2} = t$

$\Rightarrow p = t + (t+1)$

2. 當 $n = p$ 時，$a = \dfrac{x_c}{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2} = \dfrac{p}{p} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{p}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{p}{2} \leq 0$（不合）

3. 當 $n = 2p$ 時，$a = \dfrac{x_c}{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2} = \dfrac{p}{2p} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2p}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - p < 0$（不合）

故 p 為 continuing number 且只有一種表示法。

六、形如 2^m($m \geq 2$ 且 m 為自然數)形式的數都是 odd-continuing number，且 2^{2i} 及 2^{2i+1}(i 為自然數)都正好有 i 種表示為若干個(至少 2 個)連續正奇數和的方法。

因為我們觀察到

$2^2 = 4 = 1+3$

$2^3 = 8 = 3+5$

$2^4 = 16 = 7+9 = 1+3+5+7$

$2^5 = 32 = 15+17 = 5+7+9+11$

$2^6 = 64 = 31+32 = 13+15+17+19 = 1+3+5+7+9+11+13+15$

再看 $2^7 = 128 = ?$

x_{oc}	n	$m(=\dfrac{x_{oc}+2n-n^2}{2n})$	$2m-1$
128	2	32	63
128	4	15	29
128	8	5	9

或

x_{oc}	m	$2m-1$	$2m-2$	$(2m-2)^2+4x_{oc}$	$2k(=\sqrt{(2m-2)^2+4x_{oc}})$	k	$n(=k-m+1)$
128	1	1	0	512	22.627417	11.3137085	11.3137085
128	2	3	2	516	22.71563338	11.35781669	10.35781669
128	3	5	4	528	22.97825059	11.48912529	9.489125293
128	4	7	6	548	23.40939982	11.70469991	8.704699911
128	5	9	8	576	24	12	8
128	6	11	10	612	24.73863375	12.36931688	7.369316877
128	7	13	12	656	25.61249695	12.80624847	6.806248475
128	8	15	14	708	26.60826939	13.3041347	6.304134696
128	9	17	16	768	27.71281292	13.85640646	5.856406461
128	10	19	18	836	28.91366459	14.45683229	5.456832295
128	11	21	20	912	30.19933774	15.09966887	5.099668871
128	12	23	22	996	31.55946768	15.77973384	4.779733838
128	13	25	24	1088	32.984845	16.4924225	4.492422502
128	14	27	26	1188	34.46737588	17.23368794	4.23368794
128	15	29	28	1296	36	18	4
128	16	31	30	1412	37.57658846	18.78829423	3.788294228
128	17	33	32	1536	39.19183588	19.59591794	3.595917942
128	18	35	34	1668	40.84115571	20.42057786	3.420577857
128	19	37	36	1808	42.52058325	21.26029163	3.260291625

128	20	39	38	1956	44.22668877	22.11334439	3.113344387
128	21	41	40	2112	45.95650117	22.97825059	2.978250586
128	22	43	42	2276	47.70744177	23.85372088	2.853720884
128	23	45	44	2448	49.47726751	24.73863375	2.738633754
128	24	47	46	2628	51.26402247	25.63201124	2.632011236
128	25	49	48	2816	53.06599665	26.53299832	2.532998323
128	26	51	50	3012	54.88169094	27.44084547	2.440845468
128	27	53	52	3216	56.70978752	28.35489376	2.354893758
128	28	55	54	3428	58.54912467	29.27456234	2.274562337
128	29	57	56	3648	60.39867548	30.19933774	2.199337741
128	30	59	58	3876	62.25752967	31.12876483	2.128764833
128	31	61	60	4112	64.12487817	32.06243908	2.062439084
128	32	63	62	4356	66	33	2

所以

$2^7=128=63+65=29+31+33+35=9+11+13+15+17+19+21+23$：有三種表示法

$g(2^7)=3$

於是我們作以下的猜測並討論：形如 2^m（$m\geq 2$ 且 m 為自然數)形式的數都是 odd-continuing number，且 2^{2i} 及 2^{2i+1}（i 為自然數)都正好有 i 種表示為若干個(至少 2 個)連續正奇數和的方法。

1. 若 $x_{oc}=2^{2i}$（i 為自然數）

則 x_{oc} 的正因數為 2^0 、2^1 、2^2 、……、2^{2i}

$\because n\geq 2$ 且 n 為 x_{oc} 的正因數

$\therefore n$ 只可能是 2^1 、2^2 、……、2^{2i}

由公式 $m=\dfrac{x_{oc}}{2n}+1-\dfrac{n}{2}=\dfrac{x_{oc}}{2n}-\dfrac{n}{2}+1$

將 $x_{oc}=2^{2i}$ 代入

得 $m=\dfrac{x_{oc}}{2n}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{x_{oc}-n^2}{2n}+1=\dfrac{2^{2i}-n^2}{2n}+1$

令 $n=\ 2^j$（$j=1$、2、3、……、$2i$）

代入前式，得

$$m=\frac{2^{2i}-(2^j)^2}{2\cdot 2^j}+1=\frac{2^{2i}-2^{2j}}{2\cdot 2^j}+1=\frac{1}{2}\cdot(\frac{2^{2i}-2^{2j}}{2^j})+1$$

$$=2^{-1}\cdot(2^{2i-j}-2^j)+1=(2^{2i-j-1}-2^{j-1})+1$$

(1). 當 $1\leq j\leq i-1$

則 $2i-j-1\geq 2i-(i-1)-1=i$

$\Rightarrow m=2^{2i-j-1}-2^{j-1}+1\geq 2^i-2^{j-1}+1>1$

且 $m=2^{2i-j-1}-2^{j-1}+1$ 必為正整數

所以 m 有解

(2). 當 $j=i$，則 $m=2^{2i-j-1}-2^{j-1}+1=2^{2i-i-1}-2^{i-1}+1=1$

(3). 當 $j\geq i+1$，

則 $2j\geq 2i+2$

$\Rightarrow 2i-j-1\leq j-3<j-1$

$\Rightarrow m=2^{2i-j-1}-2^{j-1}+1<0$

故只有當 $n=\ 2^{j}$ ($j=1$、2、3、……、i)成立，故有 i 種表示法。

2. 若 $x_{oc}=2^{2i+1}$ (i 為自然數)

則 x_{oc} 的正因數為 2^0 、2^1 、2^2 、……、2^{2i} 、2^{2i+1}

$\because n\geq 2$ 且 n 為 x_{oc} 的正因數

$\because n$ 只可能是 2^1 、2^2 、……、2^{2i} 、2^{2i+1}

由公式 $m=\dfrac{x_{oc}}{2n}+1-\dfrac{n}{2}=\dfrac{x_{oc}}{2n}-\dfrac{n}{2}+1$

將 $x_{oc}=2^{2i+1}$ 代入

得 $m=\dfrac{x_{oc}}{2n}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{x_{oc}-n^2}{2n}+1=\dfrac{2^{2i+1}-n^2}{2n}+1$

令 $n=\ 2^{j}$ ($j=1$、2、3、……、$2i$ 、$2i+1$)

代入前式，得

$$m=\frac{2^{2i+1}-(2^{j})^2}{2\cdot 2^{j}}+1=\frac{2^{2i+1}-2^{2j}}{2\cdot 2^{j}}+1=(2^{2i-j}-2^{j-1})+1$$

(1). 當 $1\leq j\leq i$

則 $2i-j\geq 2i-i$

$\Rightarrow 2^{2i-j}\geq 2^{i}>2^{i-1}\geq 2^{j-1}\geq 2^{0}=1$

$\Rightarrow m=(2^{2i-j}-2^{j-1})+1$ 必為正整數

所以 m 有解

(2). 當 $j\geq i+1$，

則 $2j-j\geq 2i+2-j\Rightarrow 2i-j\leq j-2<j-1$

$2^{2i-j}<2^{j-1}\Rightarrow 2^{2i-j}-2^{j-1}<0$

$\Rightarrow m=(2^{2i-j}-2^{j-1})+1<1$：非正整數

故只有當 $n=\ 2^{j}$ ($j=1$、2、3、……、i)成立，故有 i 種表示法。

七、odd-continuing number 必是完全平方數或某兩個正整數的平方差。

從前面的研討，我們觀察到：

$4=1+3(=2^2)$

$9=1+3+5(=3^2)$

$16=1+3+5+7(=4^2)$

$25=1+3+5+7+9(=5^2)$

$36=1+3+5+7+9+11(=6^2)$

$49=1+3+5+7+9+11+13(=7^2)$

$64=1+3+5+7+9+11+13+15(=8^2)$

$81=1+3+5+7+9+11+13+15+17(=9^2)$

$100=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19(=10^2)$......

所以

$7+9+11+13+15+17+19=[(1+3+5)+7+9+11+13+15+17+19]-(1+3+5)=10^2-3^2$

一般情形

設 x_{oc} 可表示成 $2m-1$ 、 $2m+1$ 、⋯、 $(2m-1)+(n-1)\cdot 2$ 等 n 個連續正奇數的和

$x_{oc}=(2m-1)+(2m+1)+......+[(2m-1)+(n-1)\cdot 2]$

$=[1+3+5+...+(2m-3)+(2m-1)+(2m+1)+......+(2m-1)+(n-1)\cdot 2]-[1+3+5+...+(2m-3)]$

因為 $1+3+5+...+(2m-3)$ 共有 $m-1$ 個連續正奇數

所以 $1+3+5+...+(2m-3)=(m-1)^2$

故原式 $=(n+m-1)^2-(m-1)^2$

陸、研究結果：

一、

1. 1 至 100 的正整數中，可以表示為若干個(至少 2 個)連續正整數的和的數有哪些?

答：除了 2^m（m 為正整數或 0）都不是 continuing number，其他大於 1 的正整數都是 continuing number。

2. 它們各分別有哪幾種表示法？

請參閱 P6~P10

3. 可以表示成最多種表示法的數是哪一個？

答：45、63、75、90、99，各有 5 種表示法。

二、103 是 continuing number 嗎？如果是，則 f(103)=?

答：是，f(103)=1。

三、2014 是 continuing number 嗎？如果是，則 f(2014)=?

答：是，f(2014)=3。

四、1 至 10000 的正整數中，最大的 continuing number 是哪一個?

答：10000。

五、

1. 1 至 100 的正整數中，可以表示為若干個(至少 2 個)連續正奇數的和的數有哪些?

請參閱 P18~P19

2. 它們各分別有哪幾種表示法？

請參閱請參閱 P18~P19

3. 可以表示成最多種表示法的數是哪一個？

答： 96，有 4 種表示法。

六、103 是 odd-continuing number 嗎？如果是，則 g(103)＝?

答：否，g(103)＝0。

七、2014 是 odd-continuing number 嗎？如果是，則 g(2014)＝?

答：否，g(2014)＝0。

八、1 至 10000 的正整數中，最大的 odd-continuing number 是哪一個?

答：10000。

九、正奇數除了 1 之外，其他的數都是 continuing number。

十、可否找到一個正整數同時可以表示成 2、3、4、5、6、7、8、9、10 個連續正整數的和？

答案是：不可能。

十一、可否找到一個正整數同時可以表示成 2、3、4、5、6、7、8、9、10 個連續正奇數的和？

答案是：不可能。

十二、非 continuing number：像 2^m（其中 m 為自然數)的數都不是 continuing number。

十三、2^m（m 為正整數或 0）都不是 continuing number，其他大於 1 的正整數都是 continuing number。

十四、大於 2 的質數都是 continuing number，且都只有一種表示法。

十五、形如 2^m（$m \geq 2$ 且 m 為自然數)形式的數都是 odd-continuing number，且 2^{2i} 及 2^{2i+1}（i 為自然數)都正好有 i 種表示為若干個(至少 2 個)連續正奇數和的方法。

十六、odd-continuing number 必是完全平方數或某兩個正整數的平方差。

柒、參考資料：

一、Alfred S.Posamentier 著(葉偉文譯)－神奇數學 117－民國 94 年 8 月出版－出版地：台灣－天下文化出版－P70~73 連續整數的和

二、洪有情主編－國中數學第四冊(等差數列與等差級數)－民國 102 年 2 月再版－出版地：台灣－康軒文教事業出版－民國 102 年 2 月出版

三、林福來等主編－高中數學課本第一冊－民國 101 年 2 月修訂－出版地：台灣－南一書局出版－多項不等式(P142~P158)－民國 101 年 2 月修訂出版

（附錄）

1	**1**													
2	3	**2**												
3	6	5	**3**											
4	10	9	7	**4**										
5	15	14	12	9	**5**									
6	21	20	18	15	11	**6**								
7	28	27	25	22	18	13	**7**							
8	36	35	33	30	26	21	15	**8**						
9	45	44	42	39	35	30	24	17	**9**					
10	55	54	52	49	45	40	34	27	19	**10**				
11	66	65	63	60	56	51	45	38	30	21	**11**			
12	78	77	75	72	68	63	57	50	42	33	23	**12**		
13	91	90	88	85	81	76	70	63	55	46	36	25	**13**	
14	105	104	102	99	95	90	84	77	69	60	50	39	27	**14**
15	120	119	117	114	110	105	99	92	84	75	65	54	42	29