# 作品名稱：『平』『長』心看三角形?

## 摘要：

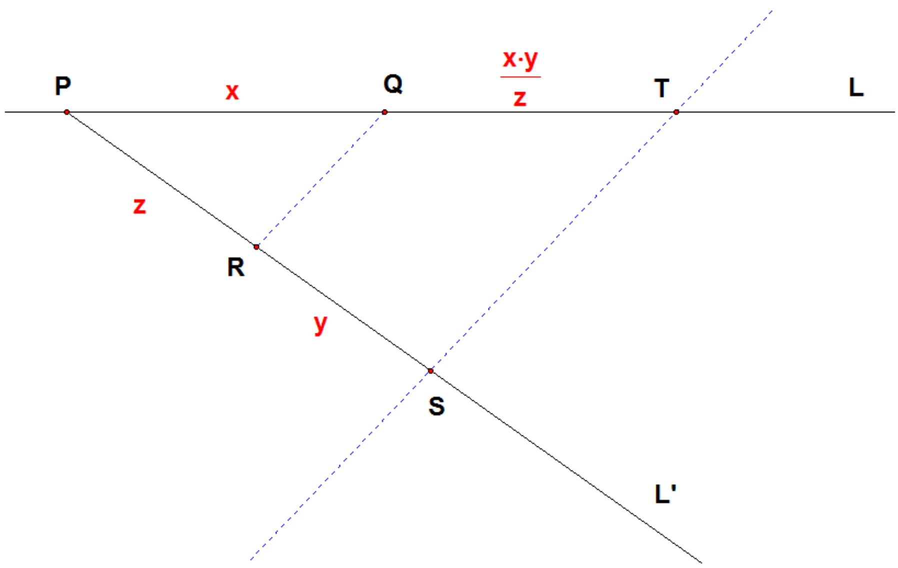
探討：任意三角形內部是否存在一點，使過此點作三邊的平行線段的長度相等，在試了一些實例後，原本以為：對任意三角形都存在這樣的點，但是在作理論探討時，發現並非任意三角形內都存在這樣的點。

本研究中，我們討論出：三角形的邊長必須符合什麼條件才存在這樣的點，及如何以『尺規作圖』找出這樣的點。

另外也討論出：過任意三角形內部的某一點，作三邊的平行線段後，此點應在何處才可以使以上三段平行線段的長度和達到最大或最小；以及原三角形內部的三個子三角形面積和的最大值或最小值。

## 本研究常用的作圖法：

給定三線段長 x、y、z，做一線段使其長為 $\frac{x \times y}{z}$ 。




[作法]：

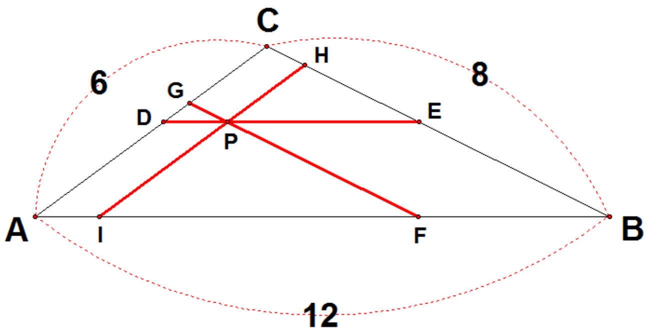
(1)作一直線 L，並取 $\overline{PQ} = x$ 。

(2)過 P 另作一直線 $L'$ ，並取 $\overline{PR} = z$ 、 $\overline{RS} = y$ 。

(3)連 $\overline{QR}$ 並作 $\overline{ST} // \overline{QR}$ 且交直線 L 於 T，則 $\overline{QT}$ 即為所求。

# 壹、研究動機：

在學到『比例線段與相似形』的應用時，老師問了我們一個問題：『P 是△ABC 內的一點，等長的三條線段 $\overline{DE}$ 、 $\overline{FG}$ 和 $\overline{HI}$ 分別平行於邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CA}$ ，並且都過 P 點（如圖）。




已知： $\overline{AB}=12$ 、 $\overline{BC}=8$ 、 $\overline{CA}=6$ 。 求證： $\overline{AI}:\overline{IF}:\overline{FB}=1:5:3$ 。』

經過一番假設、列式及計算後，我們證得了問題的答案。老師說，如果將原問題的邊長改成 3、4、5 時，則答案會如何？我們發現：仿照相同的方法，並不難找到答案。於是我們再將邊長改為 5、6、7 及 2、3、4，問題亦都可解。

就像忽然間有了一個靈感一樣，我們懷疑：是不是任意的三角形都可以找到一個 P 點，過 P 點做三邊的平行線段，使這三個線段的長度都相等。如果答案是肯定的，這樣的點是不是就像『外心』、『內心』、『重心』一樣，該給它一個特殊的名字。

於是這個問題便成了我們作科展想研究的主題。

# 貳、研究目的：

一、解決原問題並改變三角形的三邊長作探討。

二、探討：過三角形內部的一點 P，做三邊的平行線段等長時，此線段的長度。

三、探討：過三角形內部的一點 P，做三邊的平行線段等長時，3 個子三角形的周長及面積的比例。

四、探討：任意三角形內部是否都存在點 P，過 P 點做三角形的平行線段都相等，並探討線段的長度。

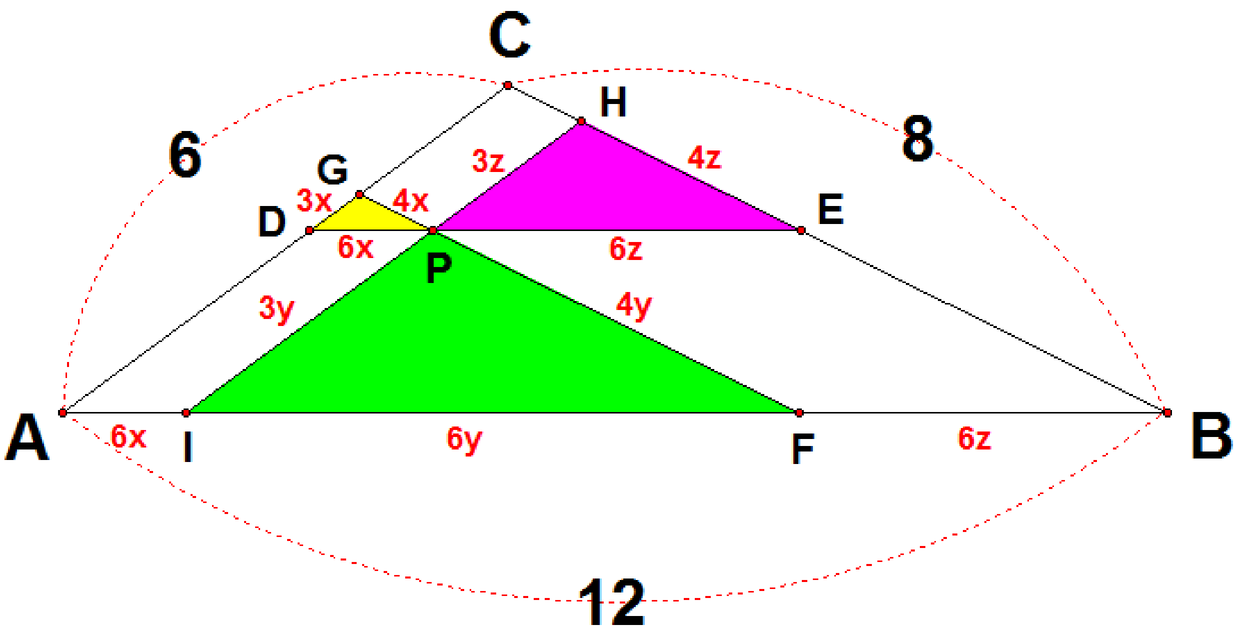
五、探討：如何以尺規作圖找到 P 點的位置。

# 叁、研究器材與設備：計算紙、筆、圓規、直尺、電腦、GSP 繪圖軟體、想挑戰的心。

# 肆、研究過程與方法：

一、解決原問題並改變三角形的三邊長作探討。

(一)先解決原問題：




因為$\overline{DE} // \overline{AB}$ 、$\overline{GF} // \overline{BC}$ 、$\overline{HI} // \overline{AC}$ ，

所以△GDP～△PIF～△HPE～△ABC 且 $12:8:6=6:4:3$

因此可設 $\overline{DP}=6x$ 、$\overline{GP}=4x$ 、$\overline{DG}=3x$

$\overline{IF}=6y$ 、$\overline{PF}=4y$ 、$\overline{PI}=3y$

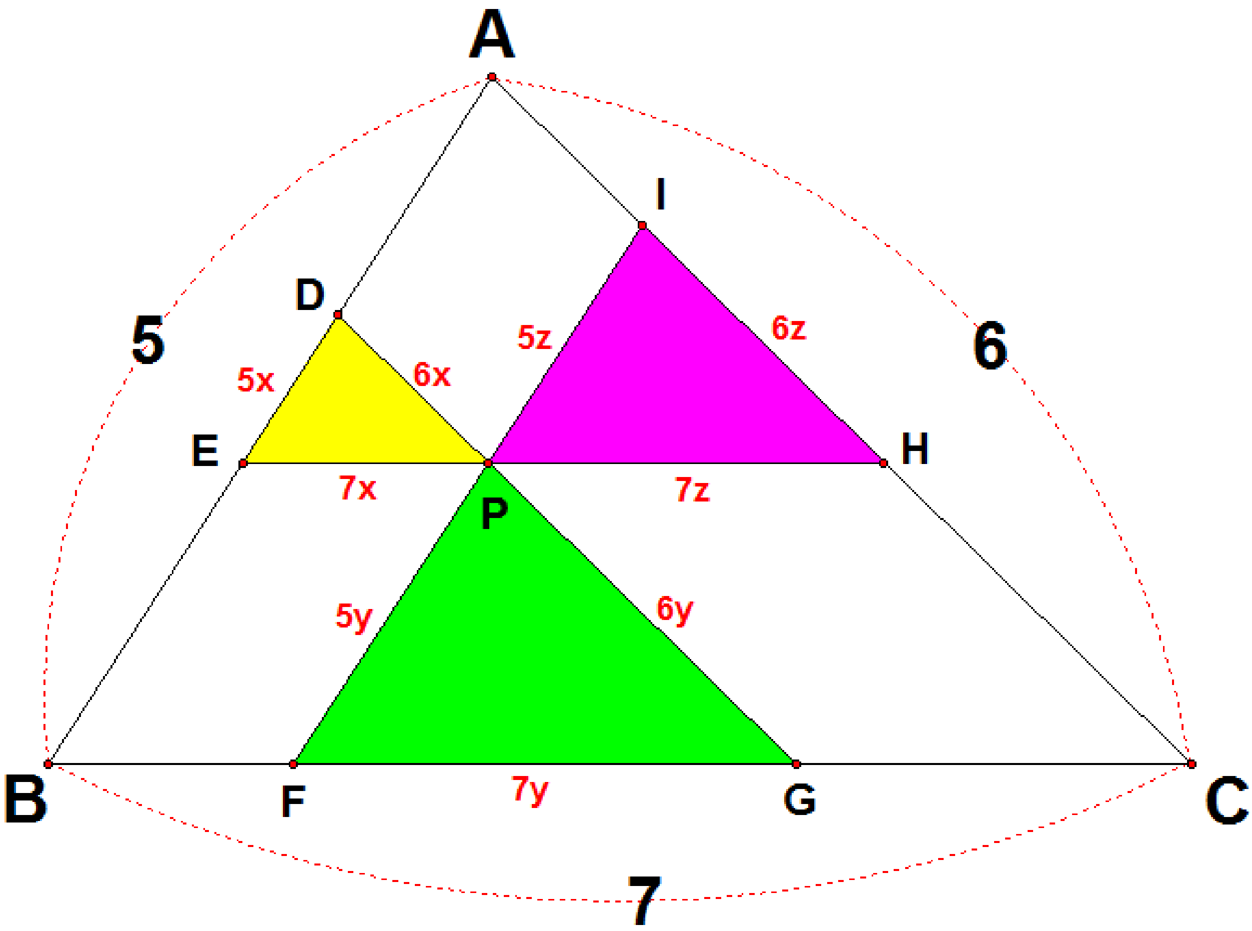
$\overline{PE}=6z$ 、$\overline{EH}=4z$ 、$\overline{PH}=3z$

因為 $\overline{DE}=\overline{IH}=\overline{GF}$ 所以$6x+6z=3y+3z=4x+4y$

求得 $x:y:z=1:5:3$ => $\overline{AI}:\overline{IF}:\overline{FB}=6x:6y:6z=x:y:z=1:5:3$

(二)改變三角形的邊長，探討是否存在 P 點，使過 P 點作原三角形三邊的平行線段長相等。

1.三角形三邊長為 5、6、7 時：




已知：△ABC 中，$\overline{BC}=7$ 、$\overline{AC}=6$、$\overline{AB}=5$，過內部一點 P，

作 $\overline{EH}\,//\,\overline{BC}$ 、$\overline{DG}\,//\,\overline{AC}$ 、$\overline{IF}\,//\,\overline{AB}$ 且 $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}$

因為△DEP～△PFG～△IPH～△ABC

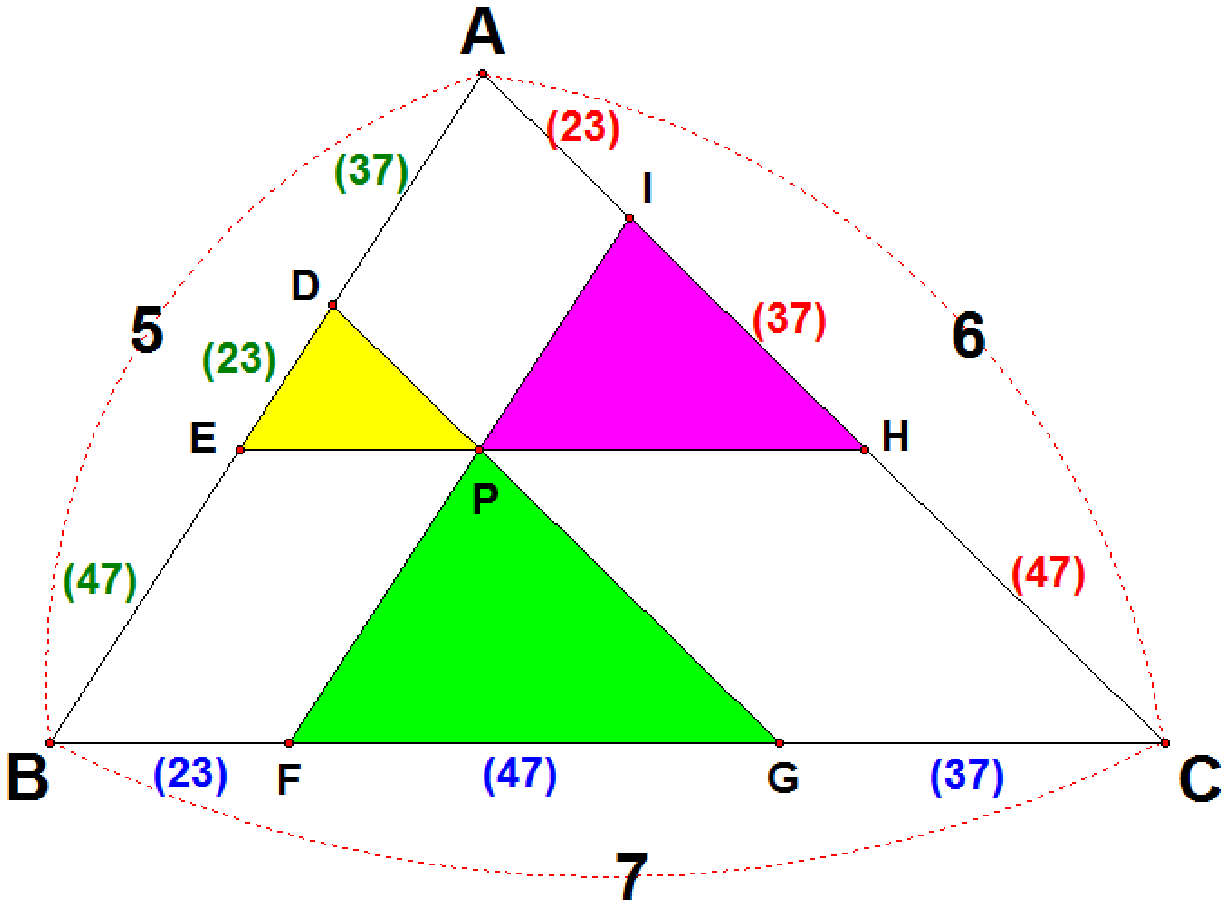
所以可設 $\overline{EP}=7x$ 、$\overline{PD}=6x$ 、$\overline{DE}=5x$

$\overline{FG}=7y$ 、$\overline{PG}=6y$ 、$\overline{PF}=5y$

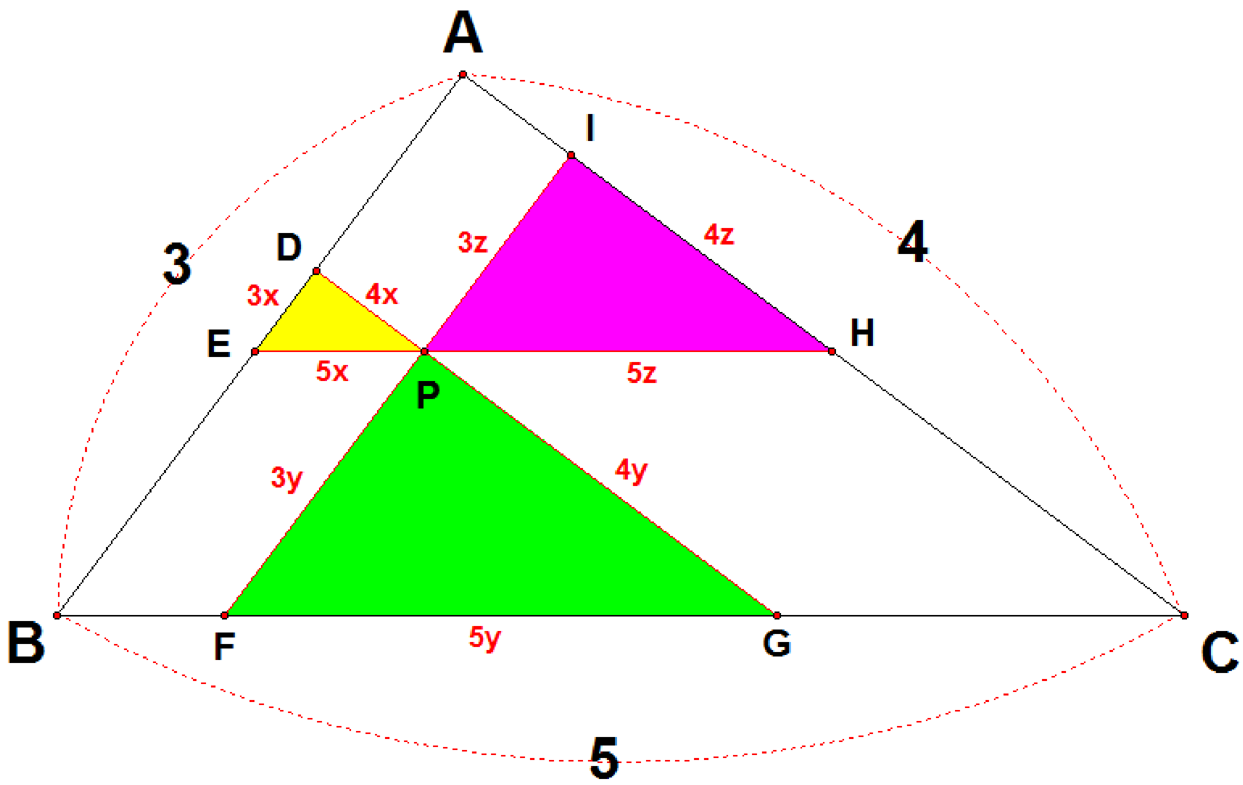
$\overline{PH}=7z$ 、$\overline{IH}=6z$ 、$\overline{IP}=5z$

因為 $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}$ 所以 $7x+7z=6x+6y=5y+5z$

求得 $x:y:z=23:47:37$ => $\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GC}=7x:7y:7z=x:y:z=23:47:37$


A
(23)
(37)
I
D
5
(23)
(37)
6
E
H
P
(47)
(47)
B
(23)
F
(47)
G
(37)
C
7

2.三角形三邊長為 3、4、5 時：




已知：△ABC 中，$\overline{BC}=5$、$\overline{AC}=4$、$\overline{AB}=3$，過內部一點 P，

作 $\overline{EH}\,//\,\overline{BC}$、$\overline{DG}\,//\,\overline{AC}$、$\overline{IF}\,//\,\overline{AB}$ 且 $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}$

因為△DEP～△PFG～△IPH～△ABC

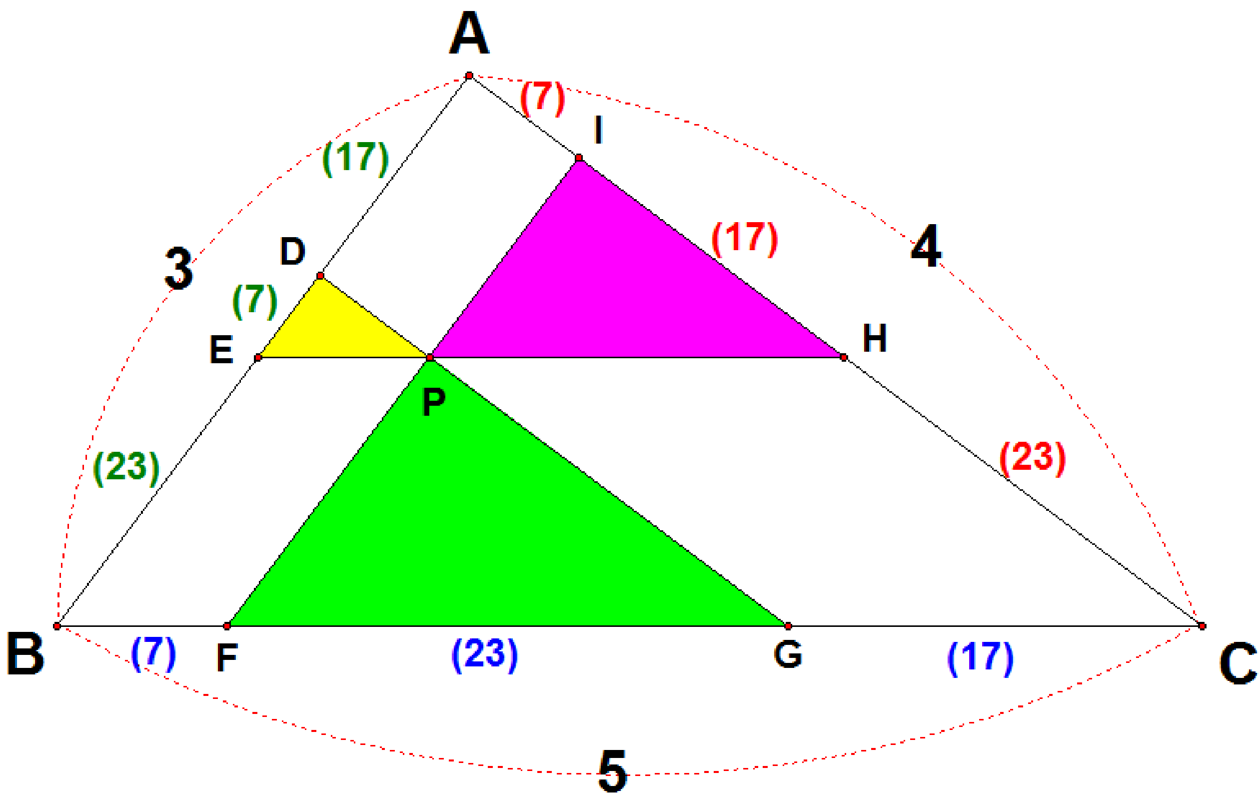
所以可設 $\overline{EP}=5x$、$\overline{PD}=4x$、$\overline{DE}=3x$

$\overline{FG}=5y$、$\overline{PG}=4y$、$\overline{PF}=3y$

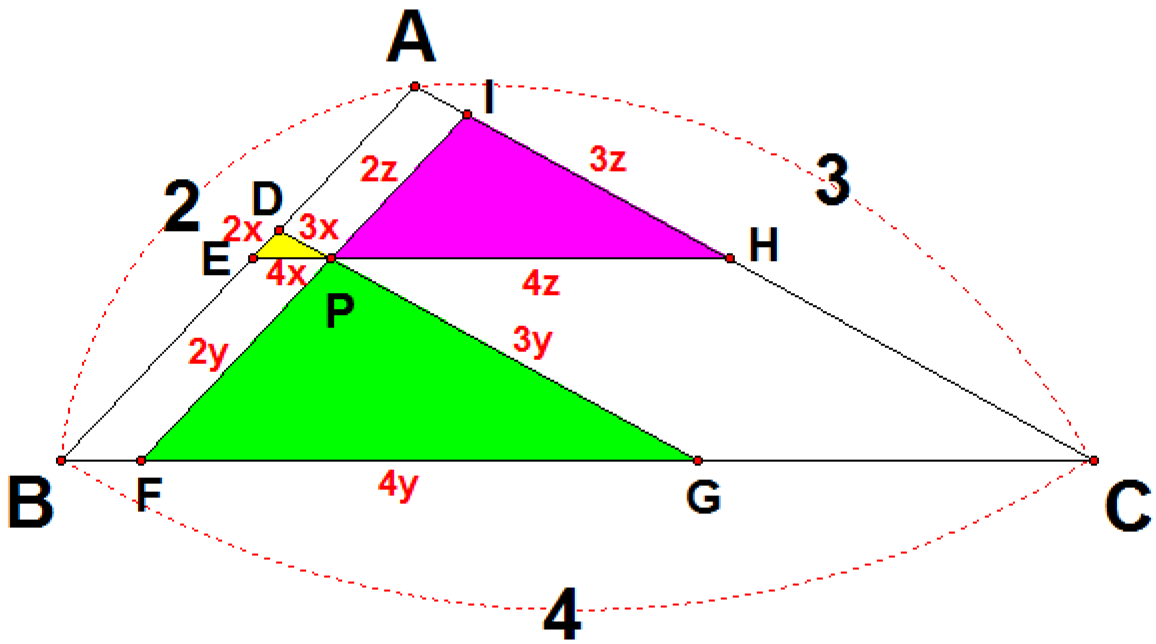
$\overline{PH}=5z$、$\overline{IH}=4z$、$\overline{IP}=3z$

因為 $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}$ 所以 $5x+5z=4x+4y=3y+3z$

求得 $x:y:z=7:23:17$ => $\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GC}=5x:5y:5z=x:y:z=7:23:17$


A
(7)
I
(17)
3
(17)
4
D
(7)
E
H
P
(23)
(23)
B
(7)
F
(23)
G
(17)
C
5

3.三角形三邊長為 2、3、4 時：




已知：△ABC 中，$\overline{BC}=4$ 、$\overline{AC}=3$ 、$\overline{AB}=2$，過內部一點 P，

作 $\overline{EH}//\overline{BC}$ 、$\overline{DG}//\overline{AC}$ 、$\overline{IF}//\overline{AB}$ 且 $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}$

因為△DEP～△PFG～△IPH～△ABC

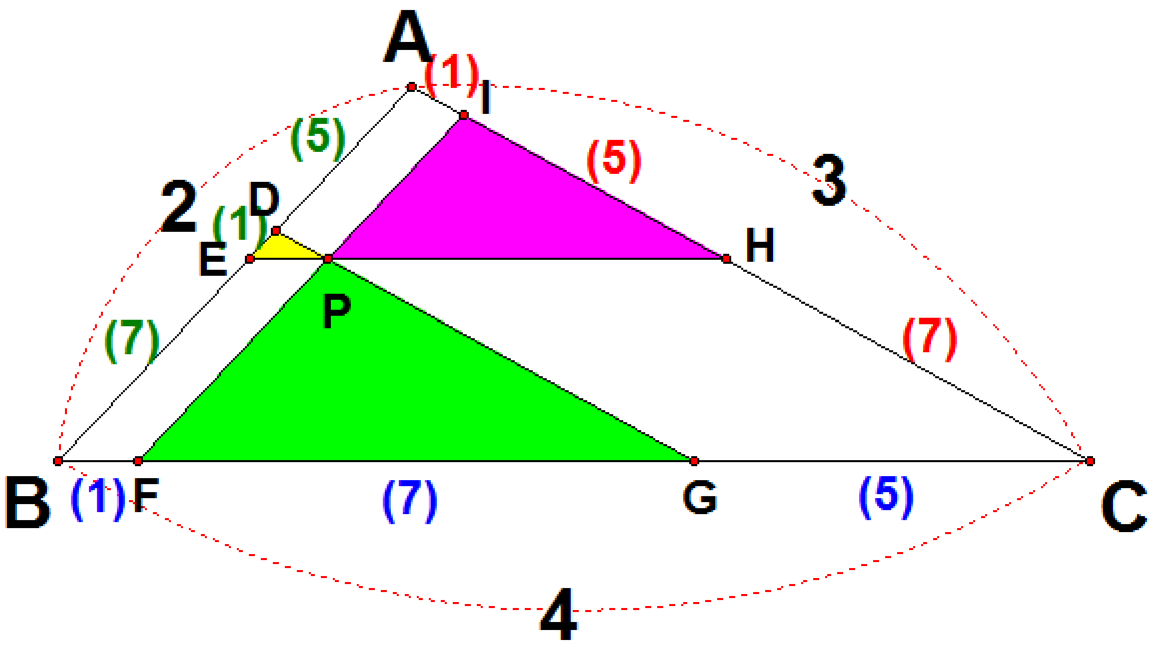
所以可設 $\overline{EP}=4x$ 、$\overline{PD}=3x$ 、$\overline{DE}=2x$

$\overline{FG}=4y$ 、$\overline{PG}=3y$ 、$\overline{PF}=2y$

$\overline{PH}=4z$ 、$\overline{IH}=3z$ 、$\overline{IP}=2z$

因為 $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}$ 所以 $4x+4z=3x+3y=2y+2z$

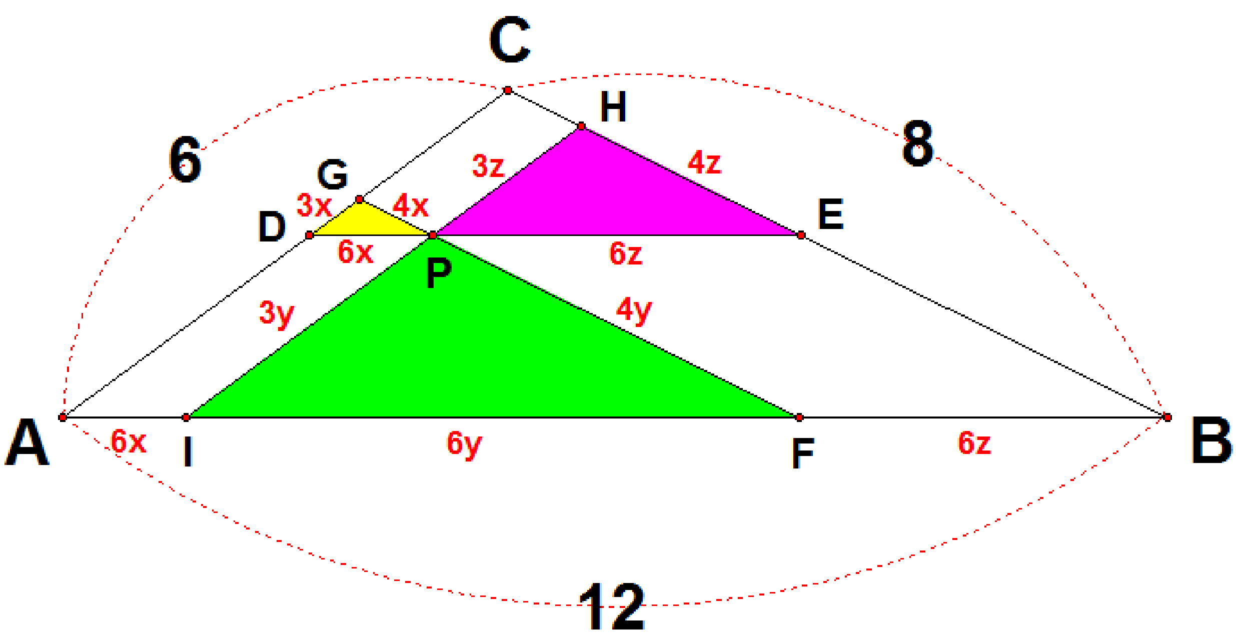
求得 $x:y:z=1:7:5$ => $\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GC}=4x:4y:4z=x:y:z=1:7:5$




(三)因為原問題及以上的例子都存在這樣的 P 點，於是我們懷疑：任意的三角形都具有這樣的 P 點。如果有，則任意三角形都具有一顆類似於『外心』、『內心』、『重心』的另一顆心。

二、探討：過三角形內部的一點 P，做三邊的平行線段等長時，此線段的長度。

(一)原問題：

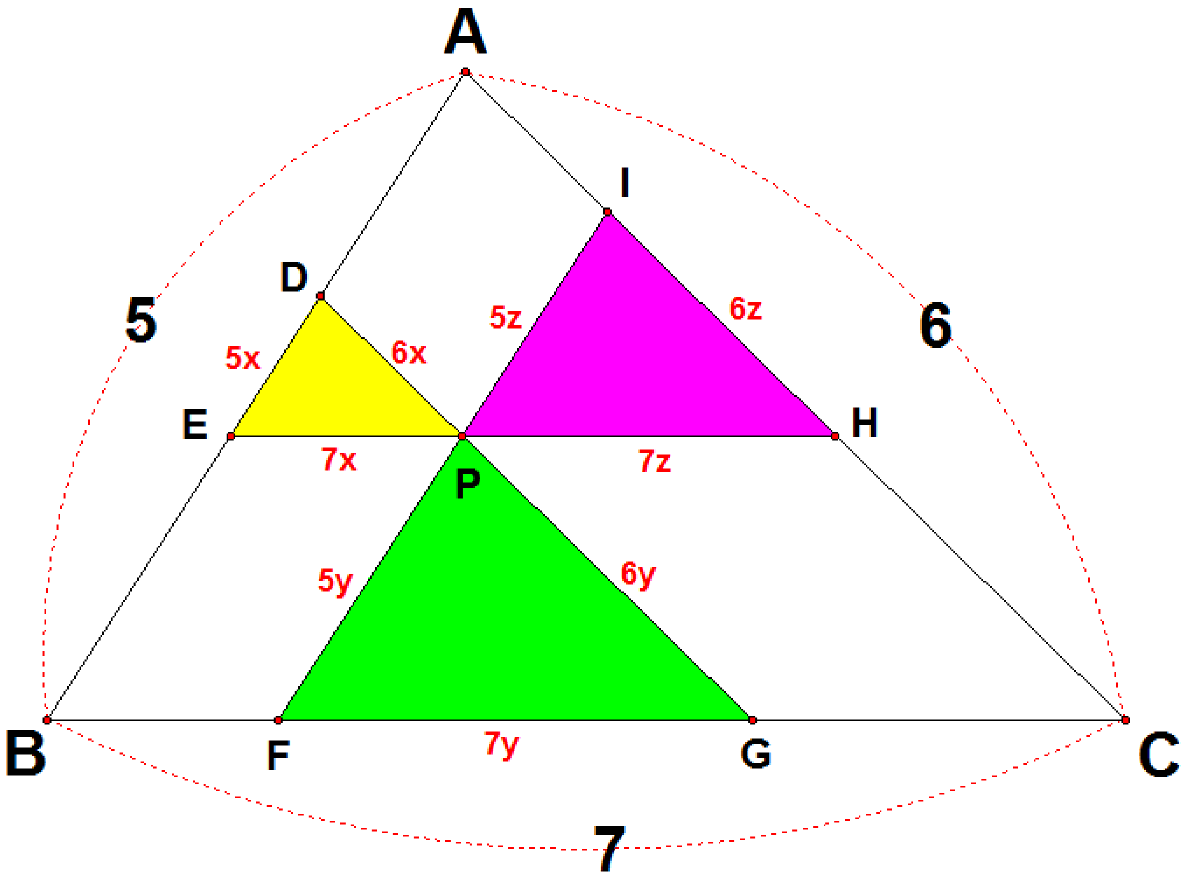



因為 $6x+6y+6z=12$ 所以 $x+y+z=2$

且 $x:y:z=1:5:3 \Rightarrow x+z=2\times\frac{1+3}{1+5+3}=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$

$\Rightarrow \overline{DE}=\overline{GF}=\overline{HI}=6x+6z=6(x+z)=6\times\frac{8}{9}=\frac{16}{3}$

(二)三角形三邊長為 5、6、7 時：

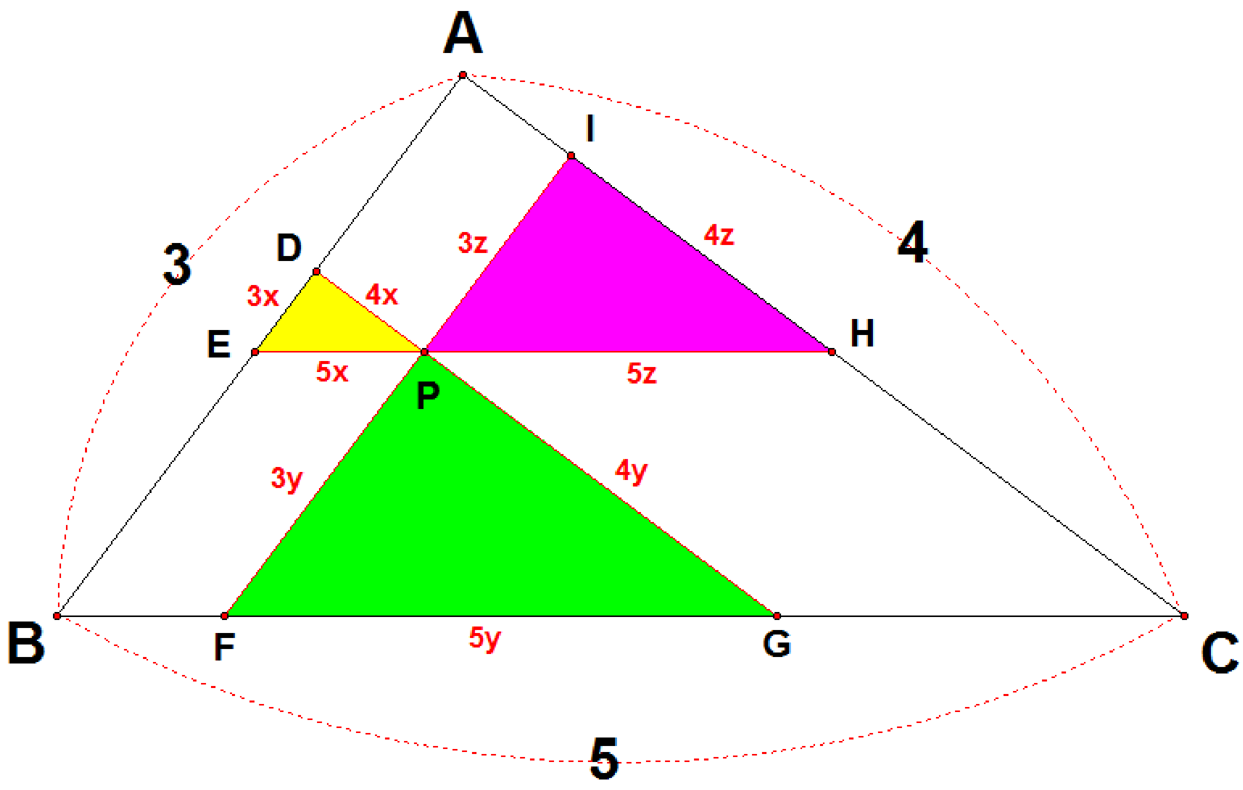



因為 $7x+7y+7z=7$，所以 $x+y+z=1$ ，

又因為 $x:y:z=23:47:37$ ，所以 $x+z=1\times\frac{23+37}{23+47+37}=\frac{60}{107}$

=> $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}=7x+7z=7(x+z)=7\cdot\frac{60}{107}=\frac{420}{107}$

(三)三角形三邊長為 3、4、5 時：

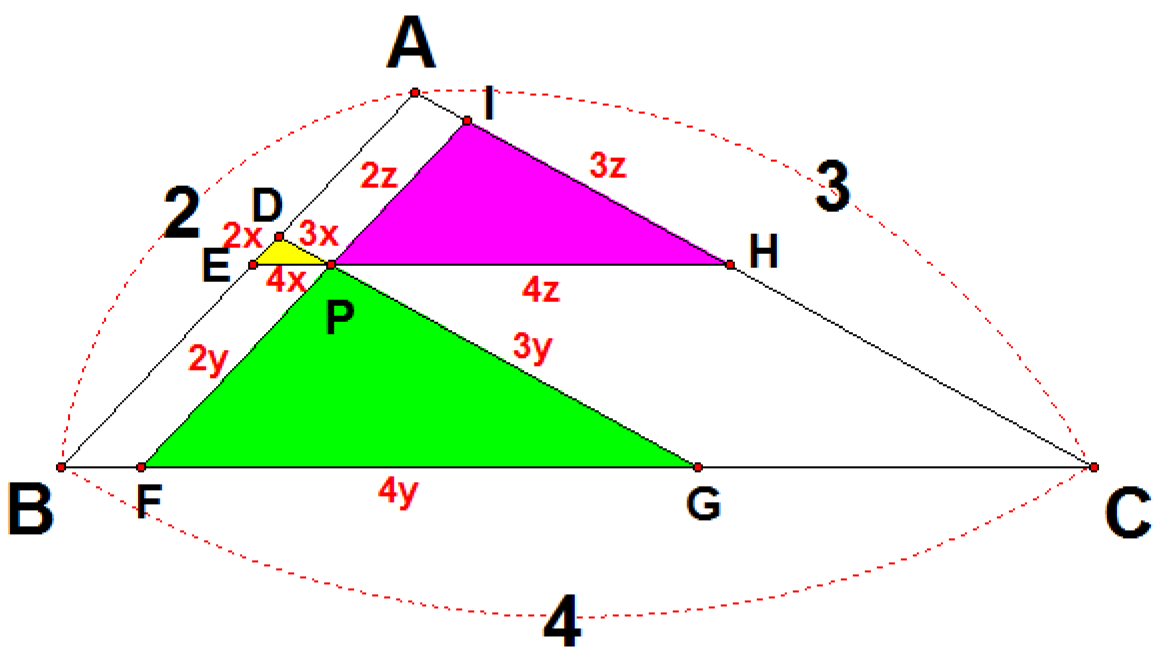



因為 $5x+5y+5z=5$，所以 $x+y+z=1$

又因為 $x:y:z=7:23:17$，所以 $x+z=1\times\dfrac{7+17}{7+23+17}=\dfrac{24}{47}$

=> $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}=5x+5z=5(x+z)=5\cdot\dfrac{24}{47}=\dfrac{120}{47}$

(四)三角形三邊長為 2、3、4 時：



因為 $4x+4y+4z=4$，所以 $x+y+z=1$

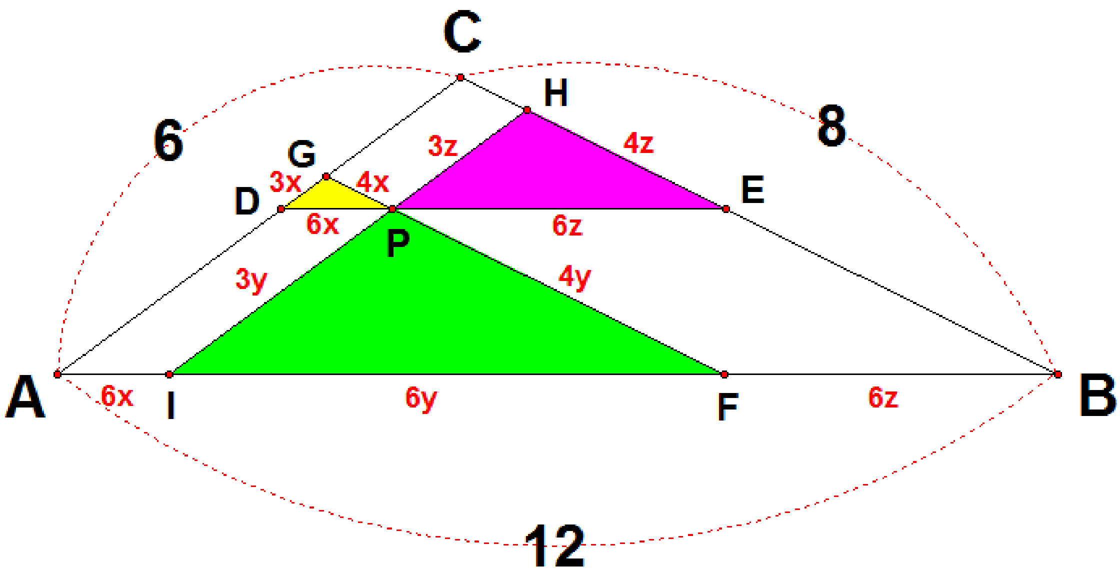
又因為 $x:y:z=1:7:5$，所以 $x+z=1\times\dfrac{1+5}{1+7+5}=\dfrac{6}{13}$

=> $\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}=4x+4z=4(x+z)=4\cdot\dfrac{6}{13}=\dfrac{24}{13}$

三、探討：過三角形內部的一點 P，做三邊的平行線段等長時，3 個子三角形的周長及面積的比例。

[說明]因為我們觀察到：不管 P 點位置在哪裡，△GDP～△PIF～△HPE～△ABC，好像一種『母子相似』的關係，且△GDP、△PIF、△HPE 的邊長比正好是底邊三個線段 $\overline{AI}$、$\overline{IF}$、$\overline{GB}$ 的比。

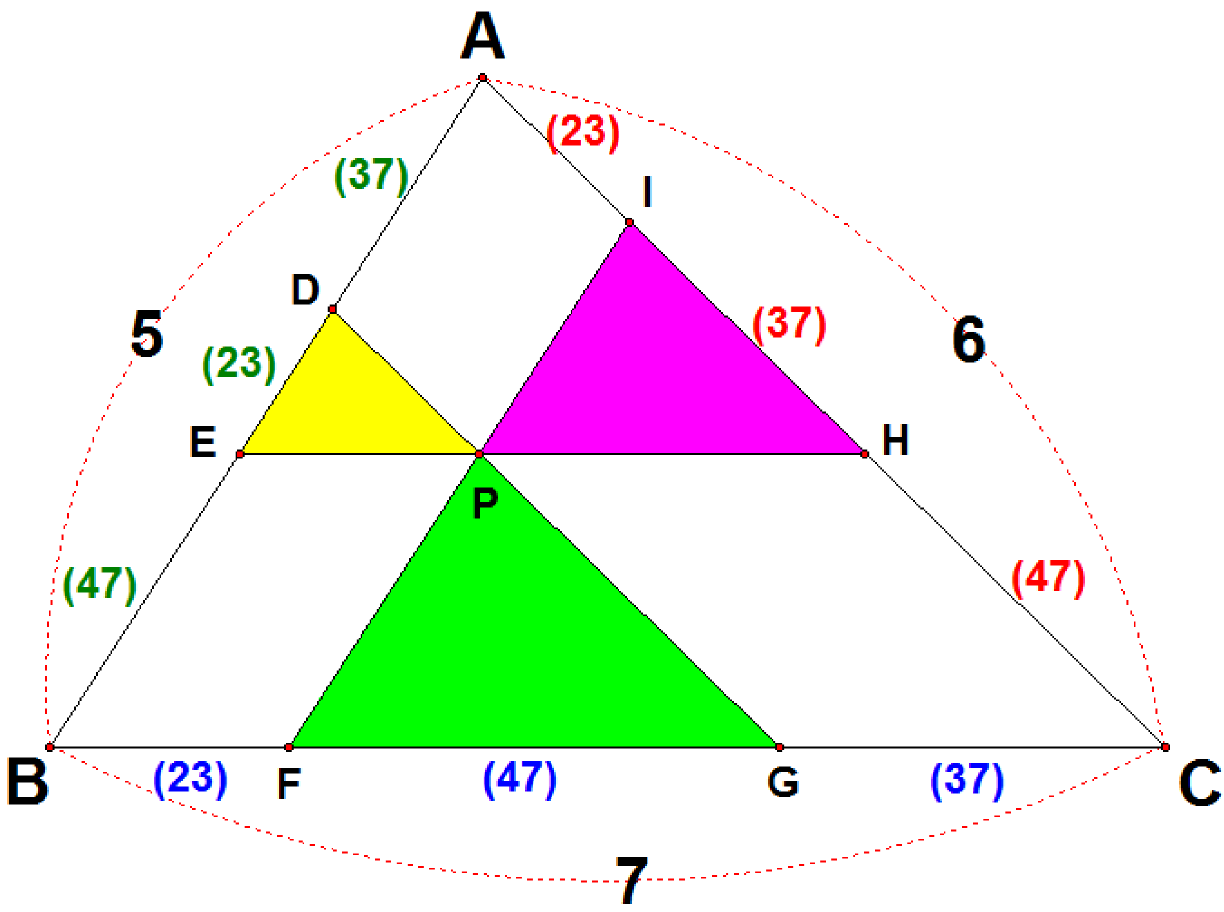
(一)原問題：




△GDP、△PIF、△HPE、△ABC 的周長比$=x:y:z:(x+y+z)=1:5:3:9$

△GDP、△PIF、△HPE、△ABC 的面積比$=1^2:5^2:3^2:9^2$

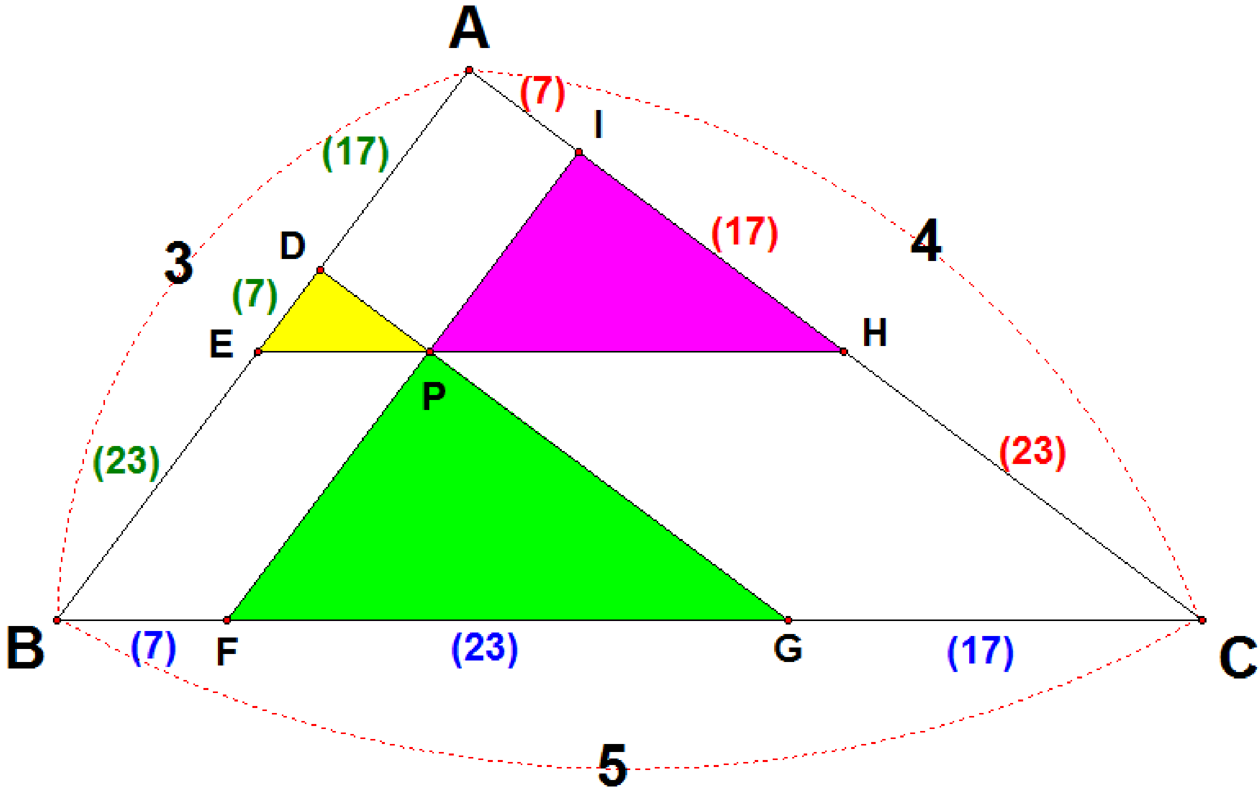
(二)三角形三邊長為 5、6、7 時：




△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的周長比 $=23:47:37:107$

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的面積比 $=23^2:47^2:37^2:107^2$

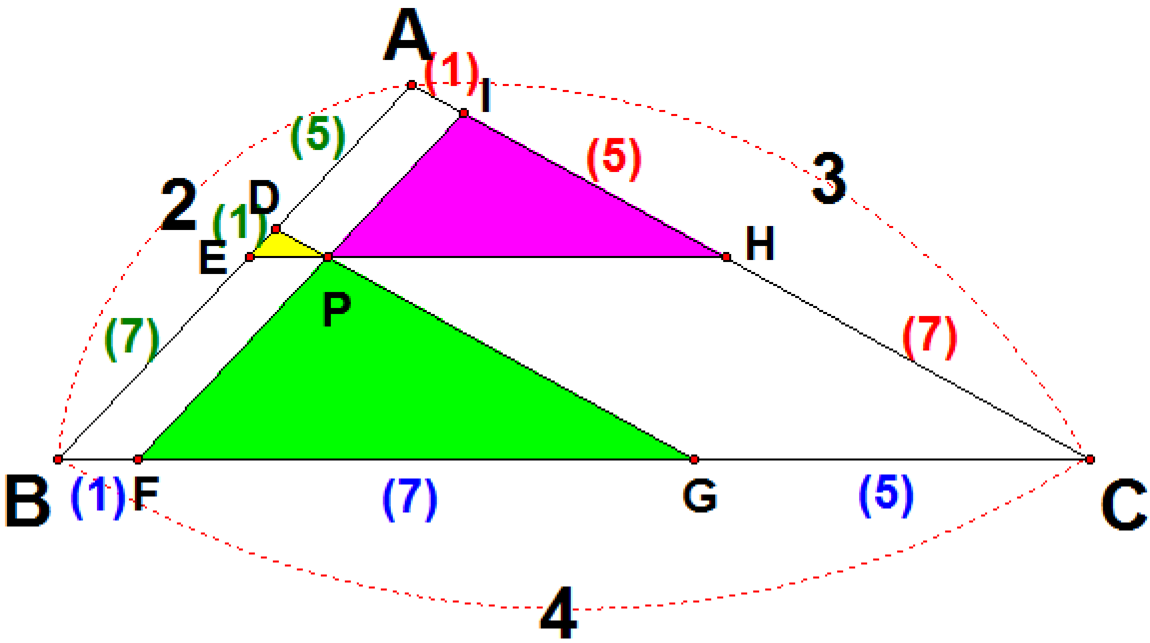
(三)三角形三邊長為 3、4、5 時：




△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的周長比＝$7:23:17:47$

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的面積比＝$7^2:23^2:17^2:47^2$

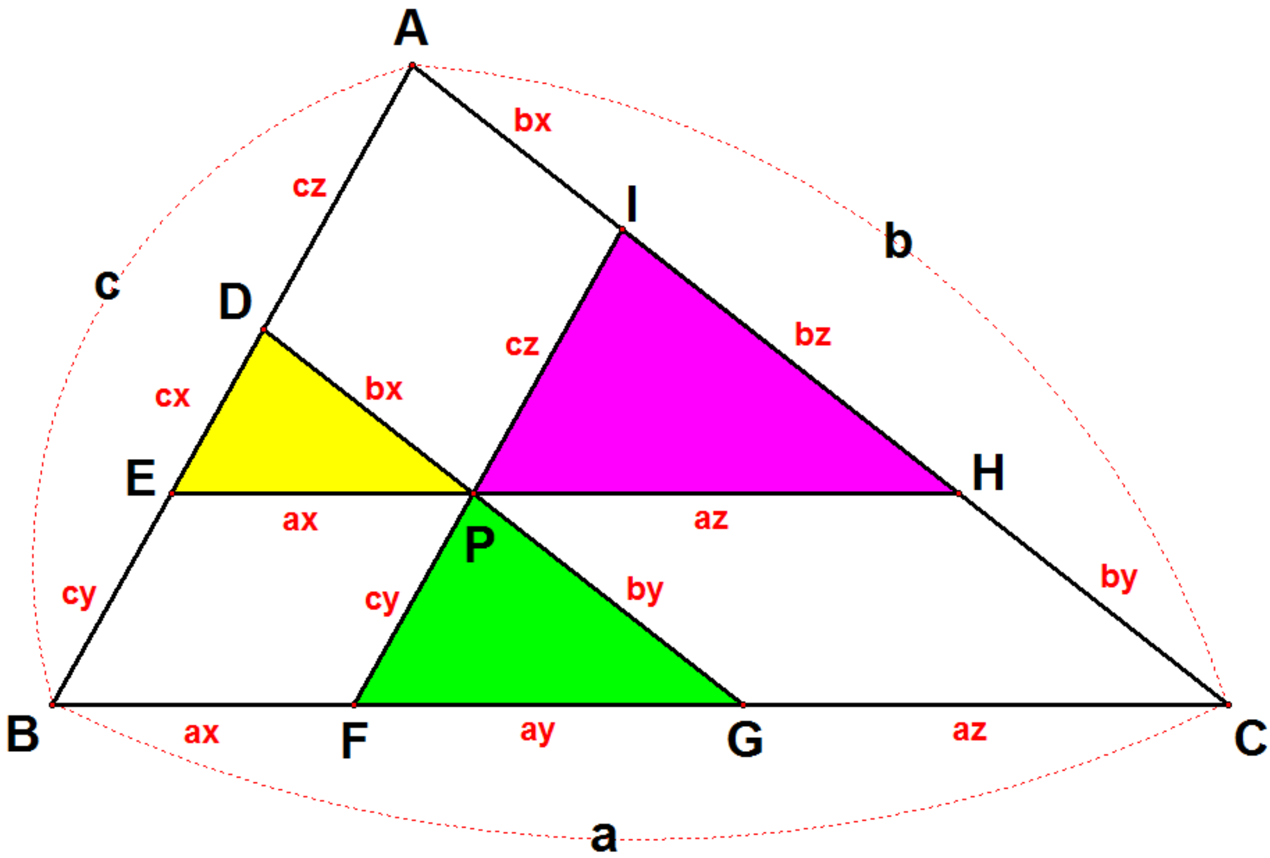
(四)三角形三邊長為 2、3、4 時：




△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的周長比＝$1:7:5:13$

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的面積比＝$1^2:7^2:5^2:13^2$

四、探討：任意三角形內部是否都存在點 P，過 P 點做三邊的平行線段都相等，並探討線段的長度。




如圖，△ABC 的三邊長 $\overline{AB}=c$ 、 $\overline{BC}=a$ 、 $\overline{CA}=b$ ，

不失一般性，可假設 a、b、c 均為正數，且 $a \ge b \ge c$ ， $b+c>a$ ，

過 P 點作三邊的平行線段 $\overline{EH}\,//\,\overline{BC}$ 、 $\overline{IF}\,//\,\overline{AB}$ 、 $\overline{DG}\,//\,\overline{AC}$ 且 $\overline{EH}=\overline{IF}=\overline{DG}$ ，

由前面的過程，可知：△DEP～△ABC=> $\overline{EP}:\overline{DP}:\overline{DE}=a:b:c$ ，

故可假設 $\overline{EP}=ax$ 、 $\overline{PD}=bx$ 、 $\overline{DE}=cx$

同理△PFG～△ABC，可假設 $\overline{FG}=ay$ 、 $\overline{GP}=by$ 、 $\overline{PF}=cy$

及△IPH～△ABC，可假設 $\overline{PH}=az$ 、 $\overline{IH}=bz$ 、 $\overline{IP}=cz$ 、
又因為四邊形 ADPI、四邊形 BFPE、四邊形 GCHP 都是平行四邊形，
故圖中各線段長度可假設如上圖所示。

因為 $\overline{EH}=\overline{IF}=\overline{DG}$ ，所以 $ax+az=cy+cz=bx+by$ ，可整理成聯立方程式：

$$\begin{cases} ax-cy+(a-c)z=0 \\ bx+(b-c)y-cz=0 \end{cases},$$ 解得 $x:y:z=(-ab+ac+bc):(ac+ab-bc):(bc+ab-ac)$

因為 $a \geq b \geq c$，所以 $ac+ab-bc>0$ 且 $bc+ab-ac>0$，

但是 $-ab+ac+bc$ 是否必為正數呢？

因為 $-ab+ac+bc=-a(b-c)+bc=bc-a(b-c)$

(一)當 $a=b=c$ 時，則 $bc-a(b-c)=bc$ 為正數，且此時 $x:y:z=1:1:1$

可知：P 即為△ABC 的重心。（△ABC 為正三角形）

(二)當 $a>b=c$ 時，則 $bc-a(b-c)=bc$ 為正數，故 P 點必有解。

且此時 $x:y:z=b:(2a-b):b$，P 點必是等腰△ABC 之底邊($\overline{BC}$)上的高上之一點。

(三)當 $a=b>c$ 時，則 $-ab+ac+bc=-a^2+ac+ac=2ac-a^2=a(2c-a)$

則必須 $2c>a$（即 $c>\frac{1}{2}a$）時，$-ab+ac+bc$ 才是正數，P 才有解。

若有解時，P 點必是等腰△ABC 之底邊($\overline{AB}$)上的高上之一點。

(四)當 $a>b>c$ 時，因為 $-ab+ac+bc=bc-a(b-c)$

1. $bc-a(b-c)=0 \quad \Leftrightarrow a=\dfrac{bc}{b-c}$

2. 若 $a>\dfrac{bc}{b-c}$ 時，則 $a(b-c)>bc \quad => \quad ab-ac>bc \quad => \quad bc+ac-ab<0$

故 P 點無解。

3. 若 $a<\dfrac{bc}{b-c}$ 時，則 $a(b-c)<bc \quad => \quad ab-ac<bc \quad => \quad bc+ac-ab>0$

故 P 點有解。

故當 $a>b>c$ 且 $a<\dfrac{bc}{b-c}$ 時，P 點才有解。

小結：

判別三角形內部是否存在點 P，使過 P 點做三邊的平行線段都相等的條件：

1. 等腰三角形時：當 $\frac{1}{2}\cdot$腰長 < 底邊長 < $2\cdot$腰長時，P 點才有解。

2. 三邊都不等長時：若△ABC 的三邊長為 a、b、c 且 $a>b>c$，$b+c>a$ 時，

當 $a<\dfrac{bc}{b-c}$ 時，則 P 點才有解。

3.當 P 點有解時，平行線段截最長邊，變成三段，其比例為

$$x:y:z=(-ab+ac+bc):(ac+ab-bc):(bc+ab-ac)$$

4.因為 $x+y+z=1$，

所以 $x=1\times\dfrac{-ab+ac+bc}{ab+bc+ac}$ 、 $y=1\times\dfrac{ac+ab-bc}{ab+bc+ac}$ 、 $z=1\times\dfrac{bc+ab-ac}{ab+bc+ac}$

可推得：等長線段長度 $l=ax+az=a(x+z)=a\times\dfrac{2bc}{ab+bc+ac}=\dfrac{2abc}{ab+bc+ac}$

五、探討：如何以『尺規作圖』找到 P 點的位置。

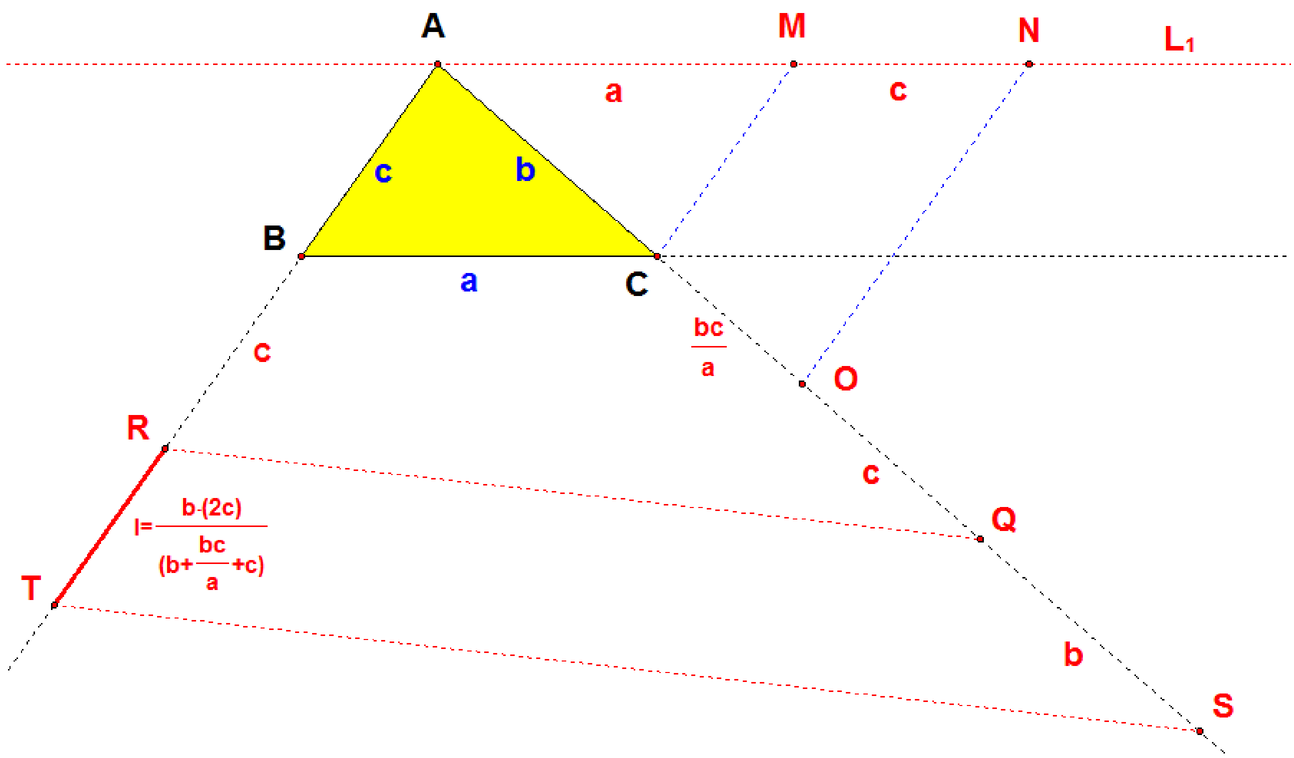
(一)作法一：

若三角形 ABC 之三邊長符合使 P 點可解的條件，則 $l=\dfrac{2abc}{ab+bc+ac}$

經過討論，P 點可以以下列方法以『尺規作圖』做出來：

先將 $l=\dfrac{2abc}{ab+bc+ac}$ 的分母、分子同除以 a：

$$l=\frac{2bc}{b+\frac{bc}{a}+c}=\frac{b\cdot(2c)}{(b+\frac{bc}{a}+c)}$$



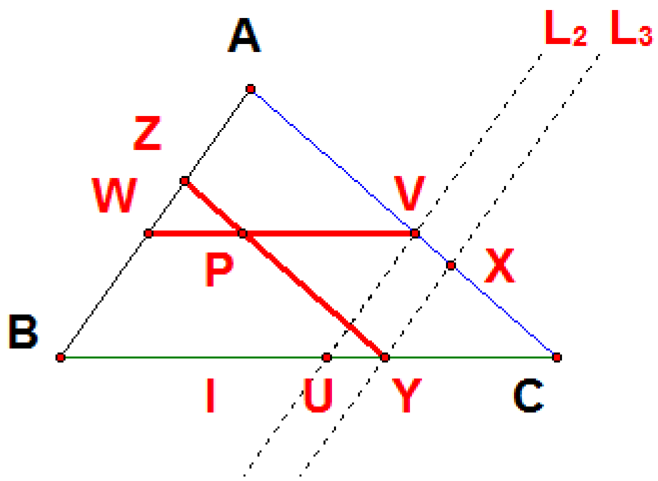

1.過 A 做直線 $L_1 // \overline{BC}$，並取 M、N 使 $\overline{AM}=a$ 、 $\overline{MN}=c$

2.連 $\overline{CM}$，過 N 作 $\overline{NO} // \overline{CM}$，交 $\overline{AC}$ 之延長線於 O，則 $\overline{CO}=\dfrac{bc}{a}$

3.在$\overline{AC}$的延長線上取 Q、S，使$\overline{OQ}=c$ 、$\overline{QS}=b$ ，則$\overline{AQ}=b+\frac{bc}{a}+c$

4.在$\overline{AB}$的延長線上取 R，使$\overline{AR}=2c$

5.連$\overline{RQ}$ ，過 S 作$\overline{ST}\,//\,\overline{RQ}$交$\overline{AB}$的延長線於 T，則$\overline{RT}=l=\dfrac{(2c)\cdot b}{(b+\frac{bc}{a}+c)}$




6.在$\overline{BC}$上取 U，使$\overline{BU}=l$ ，過 U 作$L_2\,//\,\overline{AB}$交$\overline{AC}$於 V，

作$\overline{VW}\,//\,\overline{BC}$交$\overline{AB}$於 W，則$\overline{VW}=l$

7.在$\overline{AC}$上取 X，使$\overline{AX}=l$ ，過 X 作$L_3\,//\,\overline{AB}$交$\overline{BC}$於 Y，

作$\overline{YZ}\,//\,\overline{AC}$交$\overline{AB}$於 Z，則$\overline{YZ}=l$

8.則$\overline{VW}$與$\overline{YZ}$的交點即為 P 的位置。

(二)作法二：

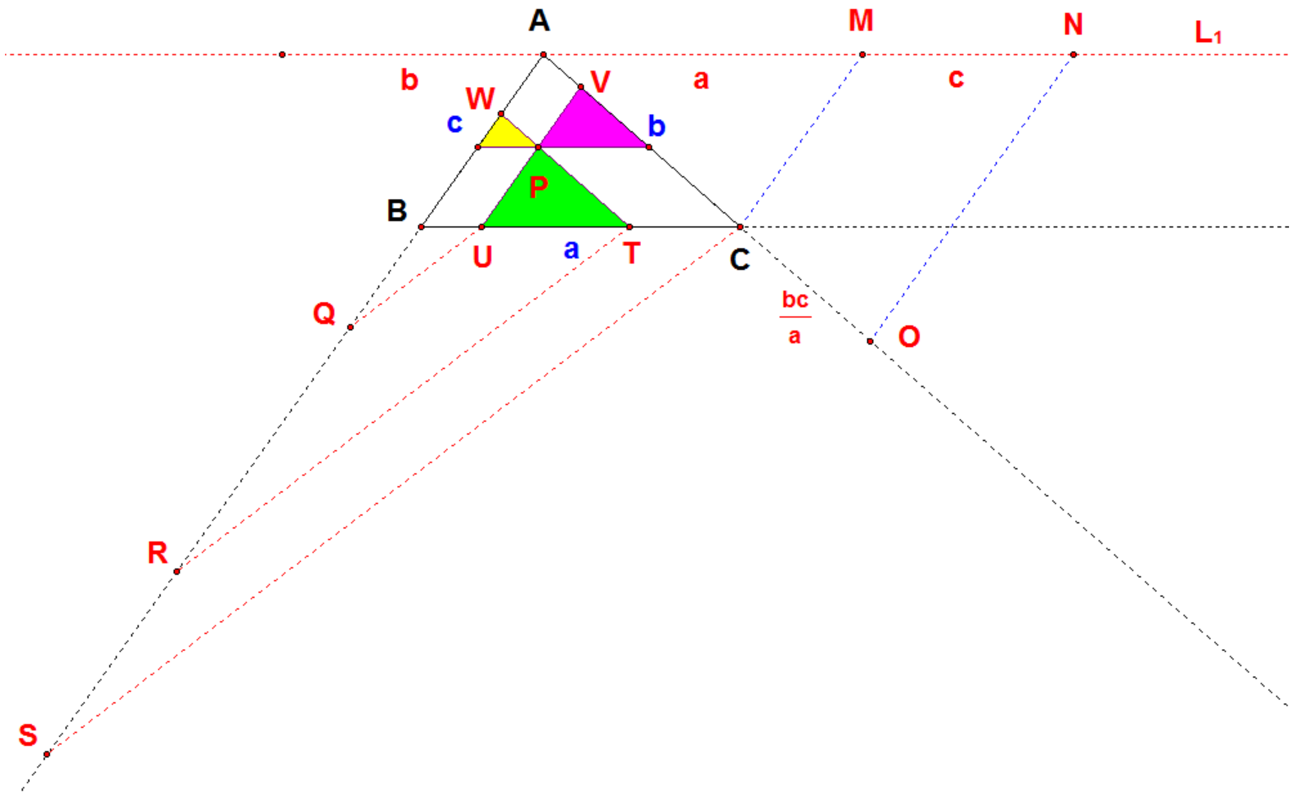
因為三角形最長邊被截成三線段，其比例為：

$x:y:z=(-ab+ac+bc):(ac+ab-bc):(bc+ab-ac)$

同除以 a：

得到$x:y:z=(-b+c+\frac{bc}{a}):(c+b-\frac{bc}{a}):(\frac{bc}{a}+b-c)$

$$=(c+\frac{bc}{a}-b):(c+b-\frac{bc}{a}):(\frac{bc}{a}+b-c)$$




作法：

1.過 A 做直線 $L_1 // \overline{BC}$ ，並取 M、N 使 $\overline{AM} = a$ 、$\overline{MN} = c$

2.連 $\overline{CM}$ ，過 N 作 $\overline{NO} // \overline{CM}$ ，交 $\overline{AC}$ 之延長線於 O，則 $\overline{CO} = \dfrac{bc}{a}$

3.在 $\overline{AB}$ 的延長線上取 Q、R、S，使 $\overline{BQ} = (c + \dfrac{bc}{a} - b)$ 、$\overline{QR} = (c + b - \dfrac{bc}{a})$ 、$\overline{RS} = (\dfrac{bc}{a} + b - c)$

4.連 $\overline{SC}$ ，分別過 R、Q 作 $\overline{RT} // \overline{SC}$ 、$\overline{QU} // \overline{SC}$ 交 $\overline{BC}$ 於 T、U。

5.過 T 作 $\overline{TW} // \overline{AC}$ 交 $\overline{AB}$ 於 W。

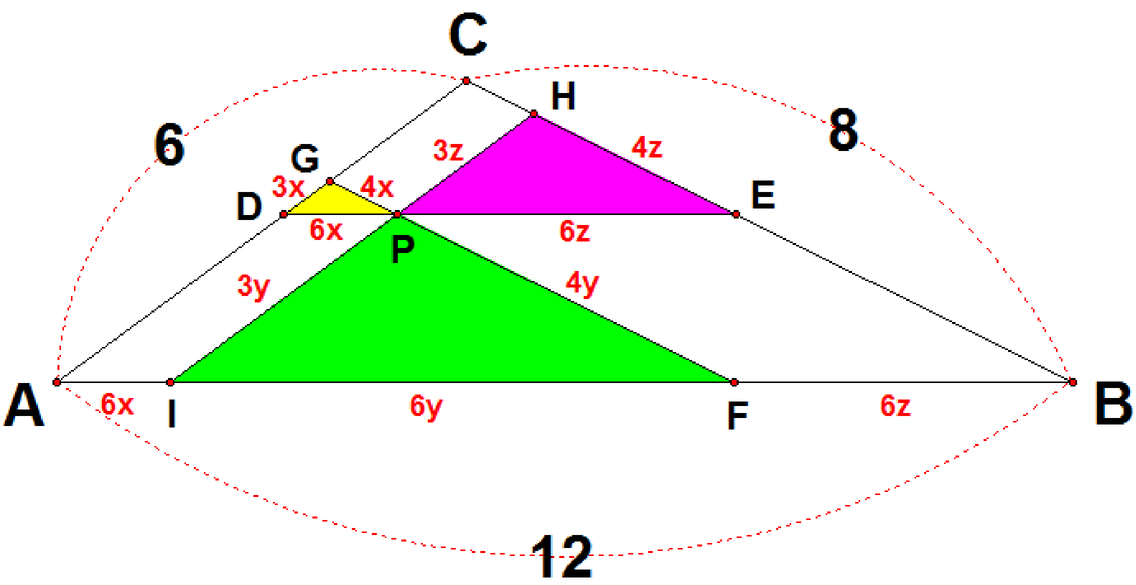
6.過 U 作 $\overline{UV} // \overline{AB}$ 交 $\overline{AC}$ 於 V。

7.則 $\overline{UV}$ 與 $\overline{TW}$ 的交點即為 P 的位置。

# 伍、研究結果：

## 一、實例探討：

(一)原問題：三角形三邊長為 6、8、12



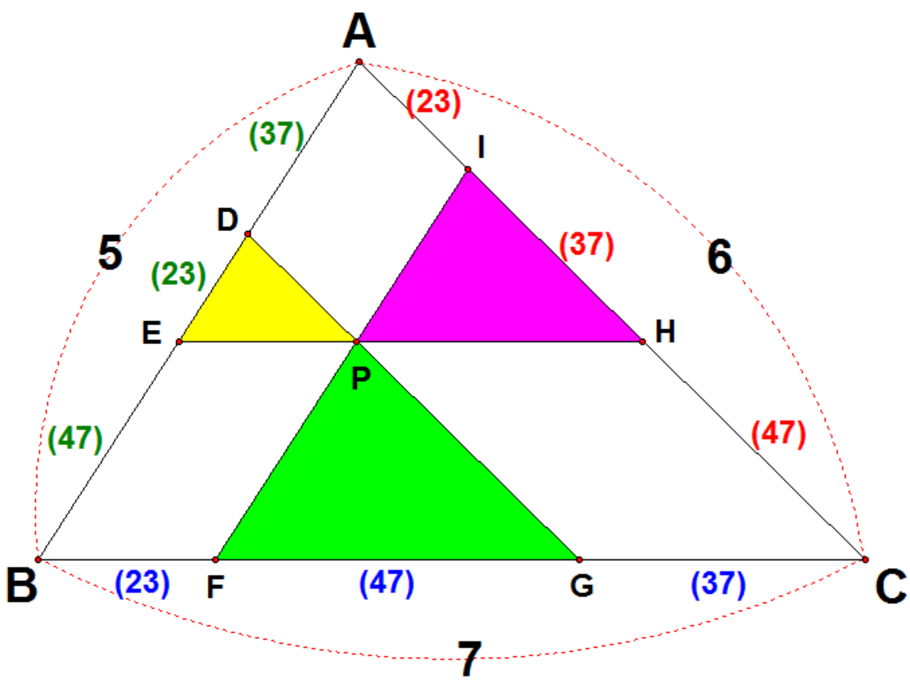

$$\overline{AI}:\overline{IF}:\overline{FB}=6x:6y:6z=x:y:z=1:5:3$$

$$\overline{DE}=\overline{GF}=\overline{HI}=\frac{16}{3}$$

△GDP、△PIF、△HPE、△ABC 的周長比$=x:y:z:(x+y+z)=1:5:3:9$

△GDP、△PIF、△HPE、△ABC 的面積比$=1^2:5^2:3^2:9^2$

（二）三角形三邊長為 5、6、7 時：



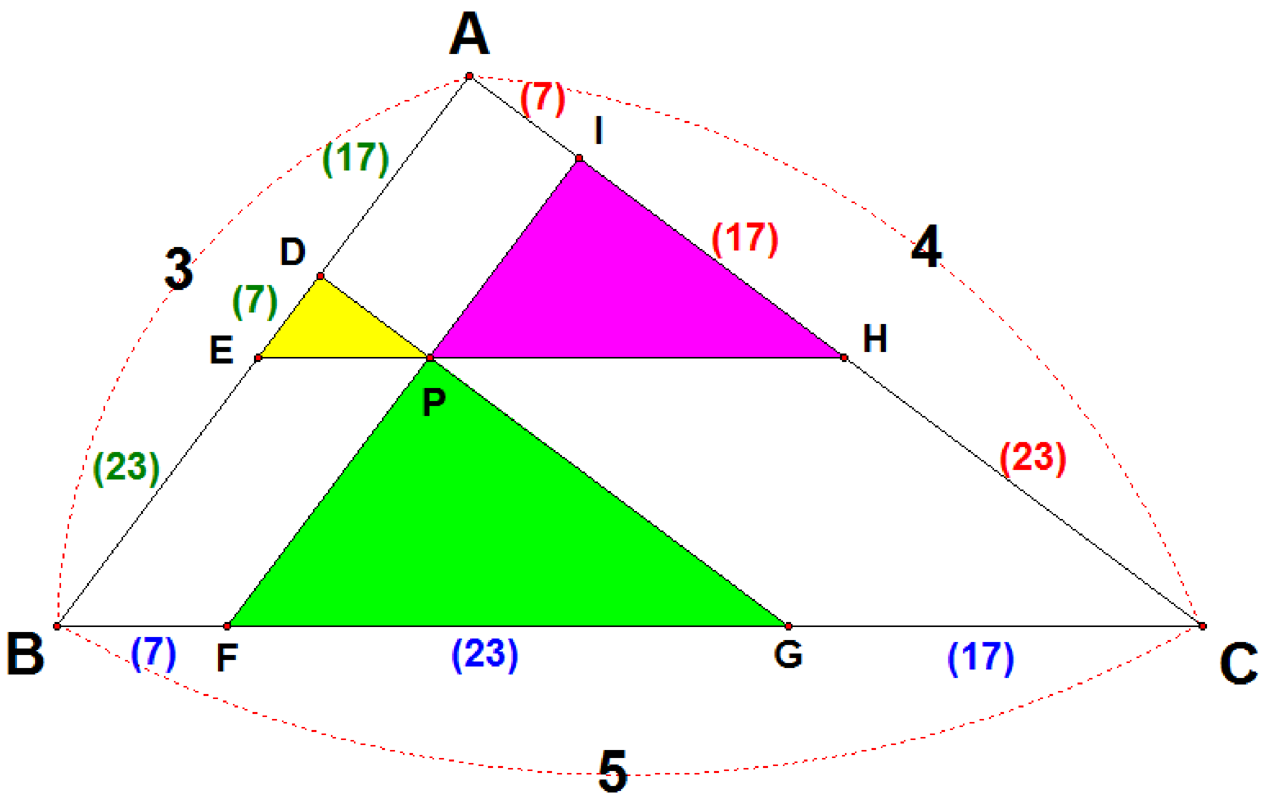
$\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GC}=23:47:37$

$\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}=\dfrac{420}{107}$

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的周長比$=23:47:37:107$

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的面積比$=23^2:47^2:37^2:107^2$

（三）三角形三邊長為 3、4、5 時：



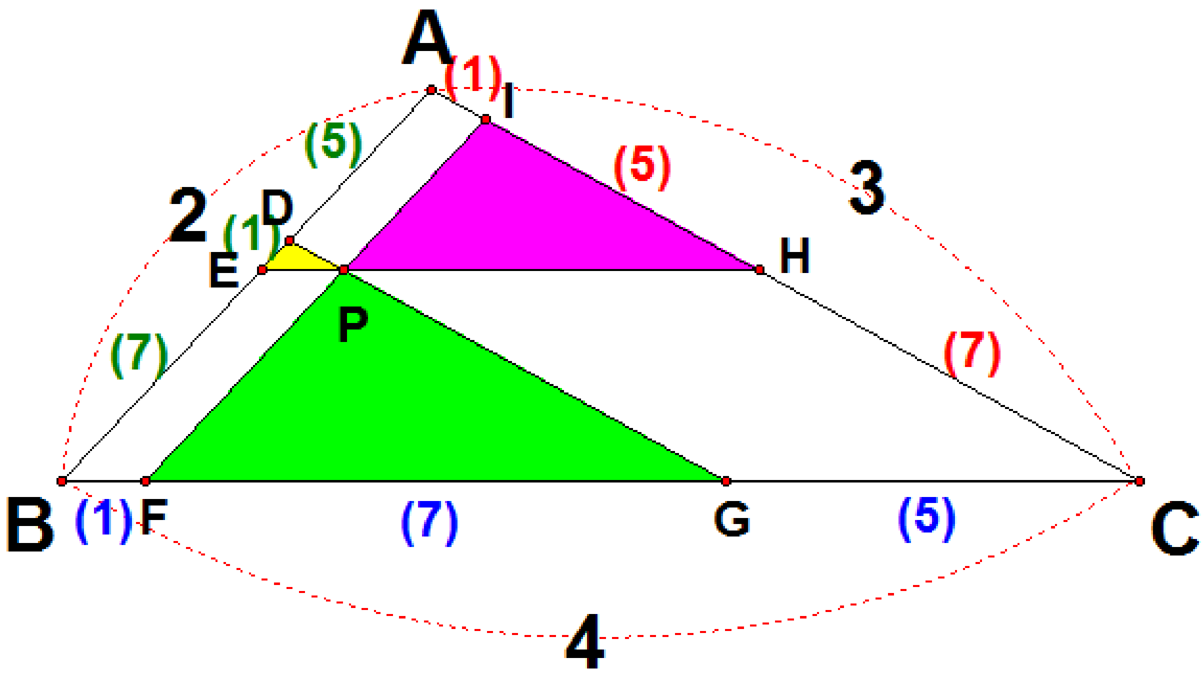

$\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GC}=7:23:17$

$\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}=\dfrac{120}{47}$

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的周長比$=7:23:17:47$

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的面積比$=7^2:23^2:17^2:47^2$

（四）三角形三邊長為 2、3、4 時：



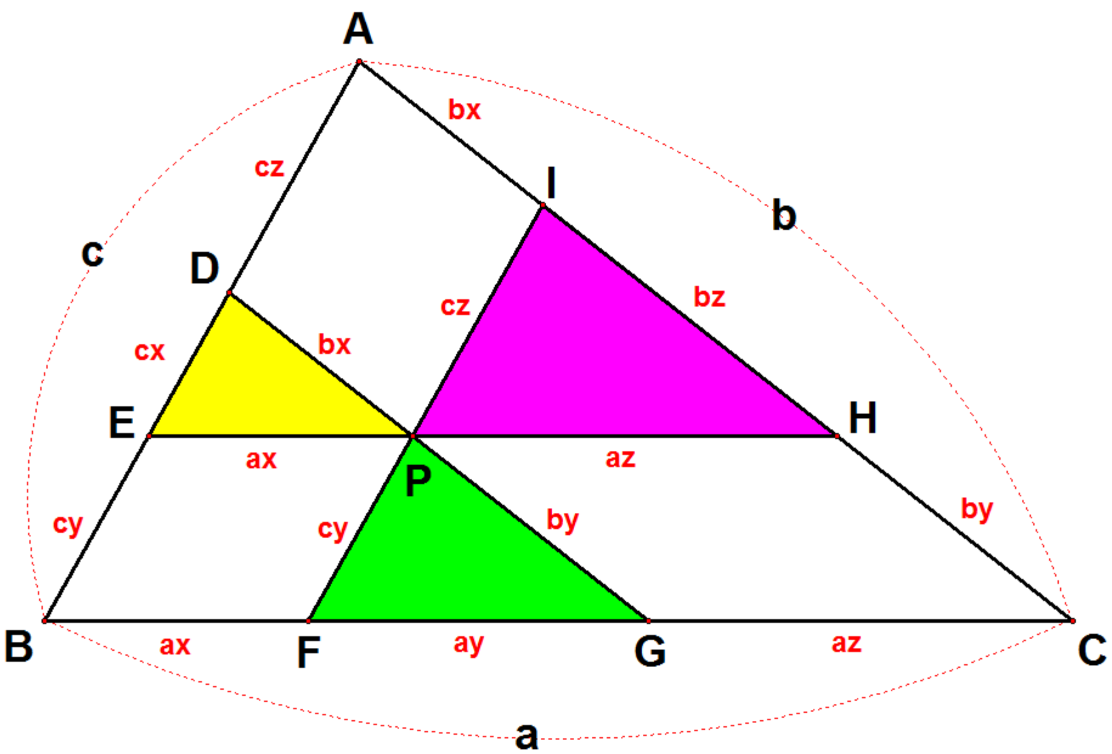

$\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GC}=1:7:5$

$\overline{EH}=\overline{DG}=\overline{IF}=\dfrac{24}{13}$

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的周長比＝1:7:5:13

△DEP、△PFG、△IPH、△ABC 的面積比＝$1^2:7^2:5^2:13^2$

二、理論探討：任意三角形內部是否都存在點 P，過 P 點做三角形的平行線段都相等，並探討線段的長度。



如圖，△ABC 的三邊長 $\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$，假設 a、b、c 均為正數，且 $a\ge b\ge c$，

$b+c>a$，過 P 點作三邊的平行線段 $\overline{EH}//\overline{BC}$、$\overline{IF}//\overline{AB}$、$\overline{DG}//\overline{AC}$ 且 $\overline{EH}=\overline{IF}=\overline{DG}$，

判別三角形內部是否存在點 P，使過 P 點做三邊的平行線段都相等的條件：

(一)等腰三角形時：

當 $\frac{1}{2}\cdot$腰長$<$底邊長$<2\cdot$腰長 時，P 點才有解。

(二)三邊都不等長時：若△ABC 的三邊長為 a、b、c 且 $a>b>c$，$b+c>a$ 時，

當 $a<\frac{bc}{b-c}$ 時，則 P 點才有解。

而當 P 點有解時，平行線段截最長邊，變成三段，其比例為

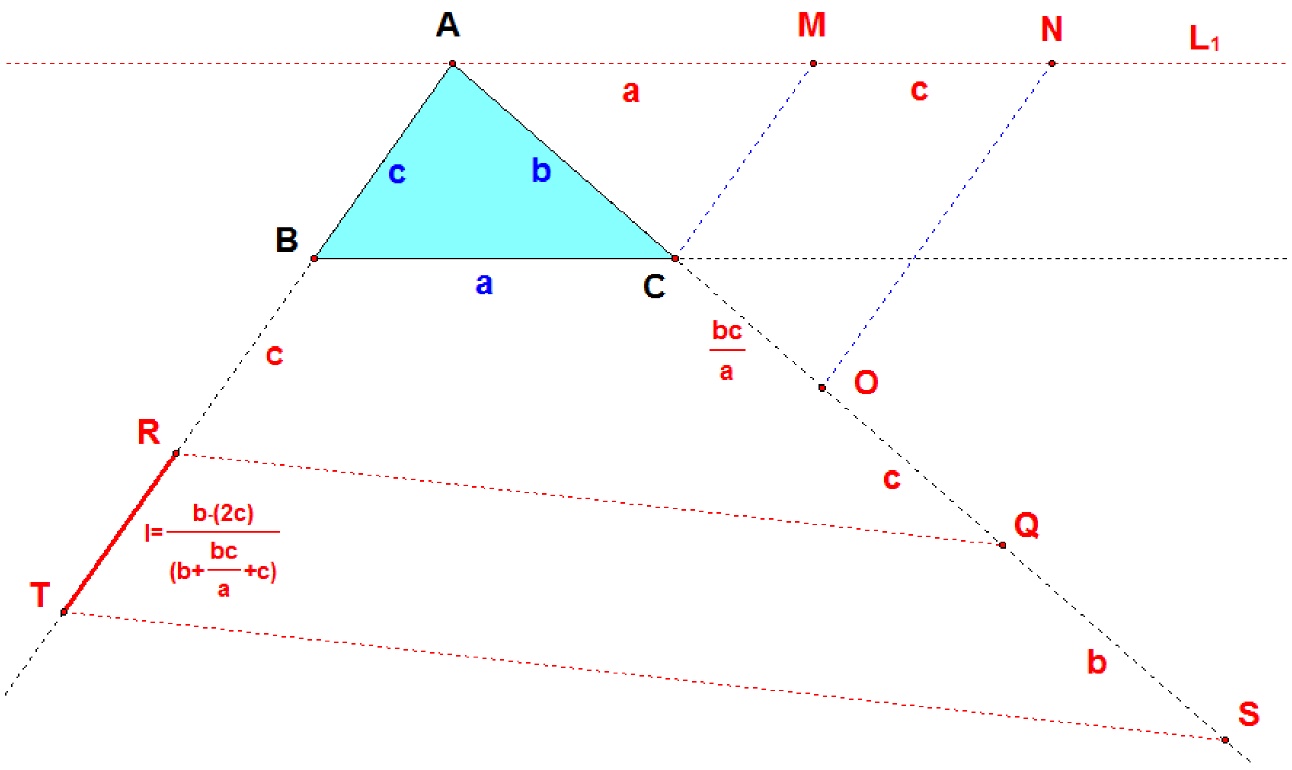
$$x:y:z=(-ab+ac+bc):(ac+ab-bc):(bc+ab-ac)$$

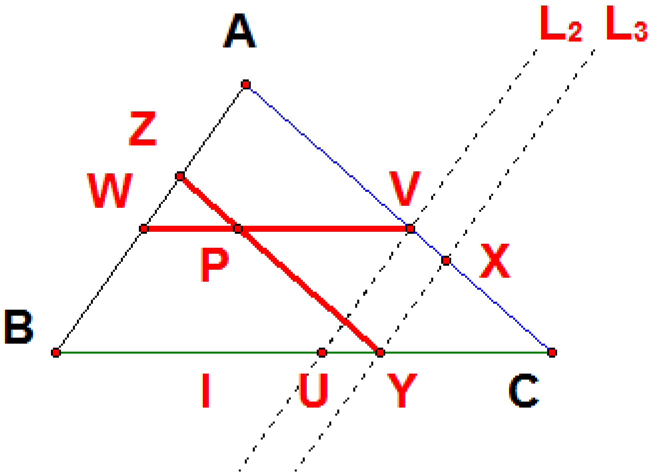
等長線段長度 $l=ax+az=a(x+z)=a\times\frac{2bc}{ab+bc+ac}=\frac{2abc}{ab+bc+ac}$

三、尺規作圖探討：如何以尺規作圖找到 P 點的位置。

(一)作法一：

$$l=\frac{2abc}{ab+bc+ac}=\frac{2bc}{b+\frac{bc}{a}+c}=\frac{b\cdot(2c)}{(b+\frac{bc}{a}+c)}$$



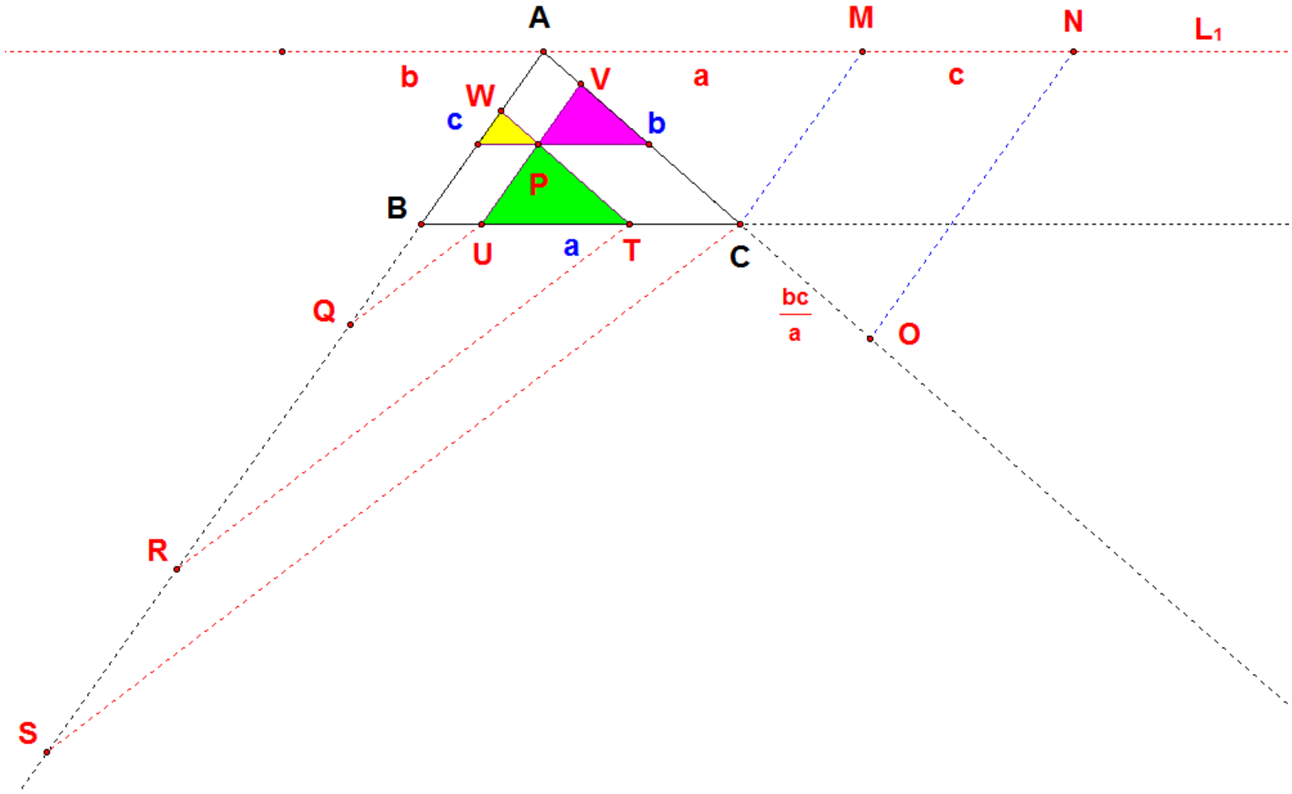



(二)作法二：

三角形最長邊被截成三線段，其比例為：

$$x:y:z=(-ab+ac+bc):(ac+ab-bc):(bc+ab-ac)$$

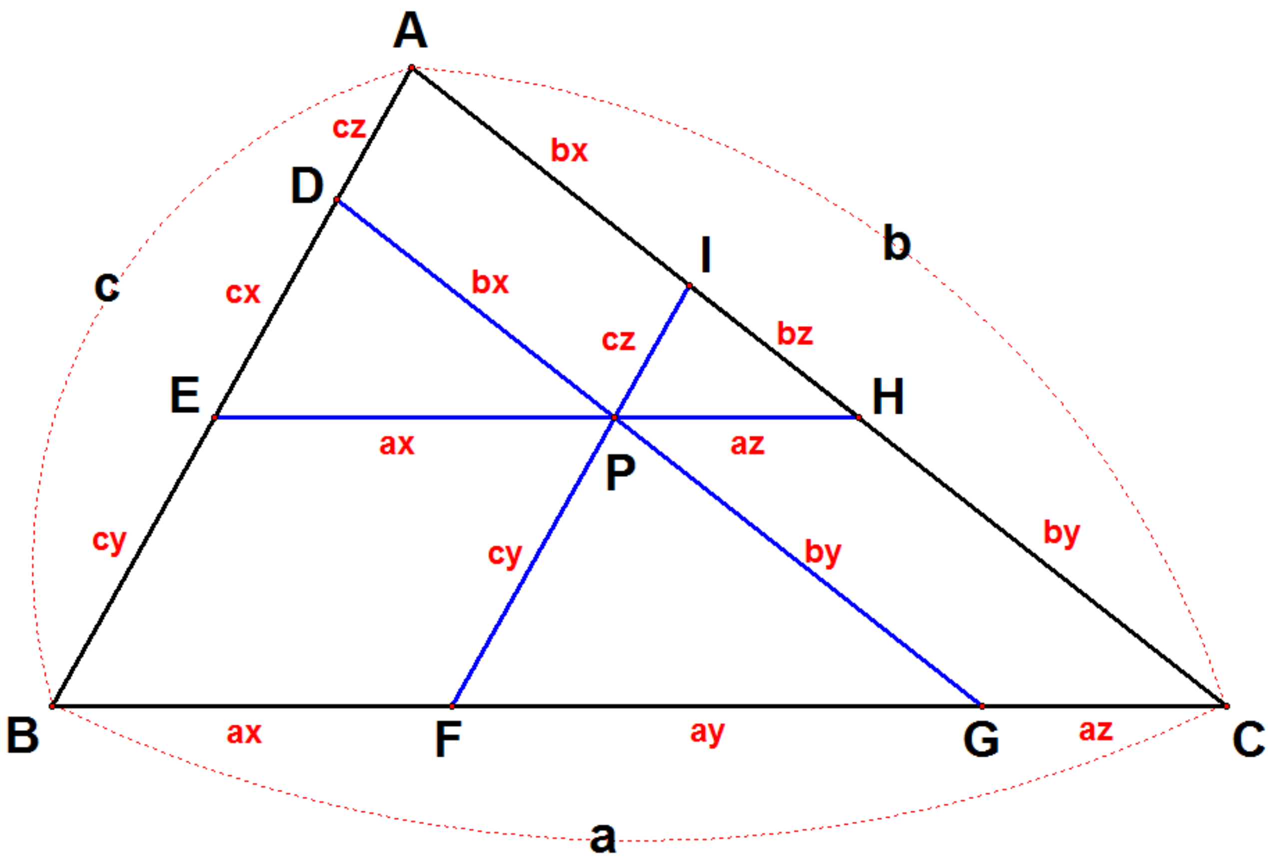
$$=(c+\frac{bc}{a}-b):(c+b-\frac{bc}{a}):(\frac{bc}{a}+b-c)$$



## 陸、研究討論：

### 一、過任意三角形之內部一點 P，做三邊的平行線段，求此三線段長度和的最大值與最小值。

[說明]因為我們觀察到：當 P 點在三角形內部移動時，過 P 做三邊的平行線段的長度也是在變動的，我們想知道：P 點必須在哪一個位置才可以使此三線段長度和達到最大或最小。




圖中 $\overline{EH}+\overline{DG}+\overline{IF}=(ax+az)+(bx+by)+(cy+cz)$ ，

故本問題即求 $(ax+az)+(bx+by)+(cy+cz)$ 之最大值與最小值。

原式 $=(ax+az\underline{+ay-ay})+(bx+by\underline{+bz-bz})+(cy+cz\underline{+cx-cx})$

$=(ax+az+ay)-ay+(bx+by+bz)-bz+(cy+cz+cx)-cx$

$=a(x+z+y)-ay+b(x+y+z)-bz+c(y+z+x)-cx$

因為 $x+y+z=1$ ，

所以原式 $=a-ay+b-bz+c-cx$

$=a+b+c-cx-ay-bz=(a+b+c)-(ay+bz+cx)$

又因為 $x+y+z=1$ ，可令 $z=1-x-y$ 代入 $(ay+bz+cx)$ 中

得 $ay+bz+cx=ay+b(1-x-y)+cx=ay+b-bx-by+cx$

$$=b-(bx-cx)+(ay-by)=b-(b-c)x+(a-b)y$$

原式 $=(a+b+c)-(ay+bz+cx)=(a+b+c)-[b-(b-c)x+(a-b)y]$

$$=a+c+(b-c)x-(a-b)y$$

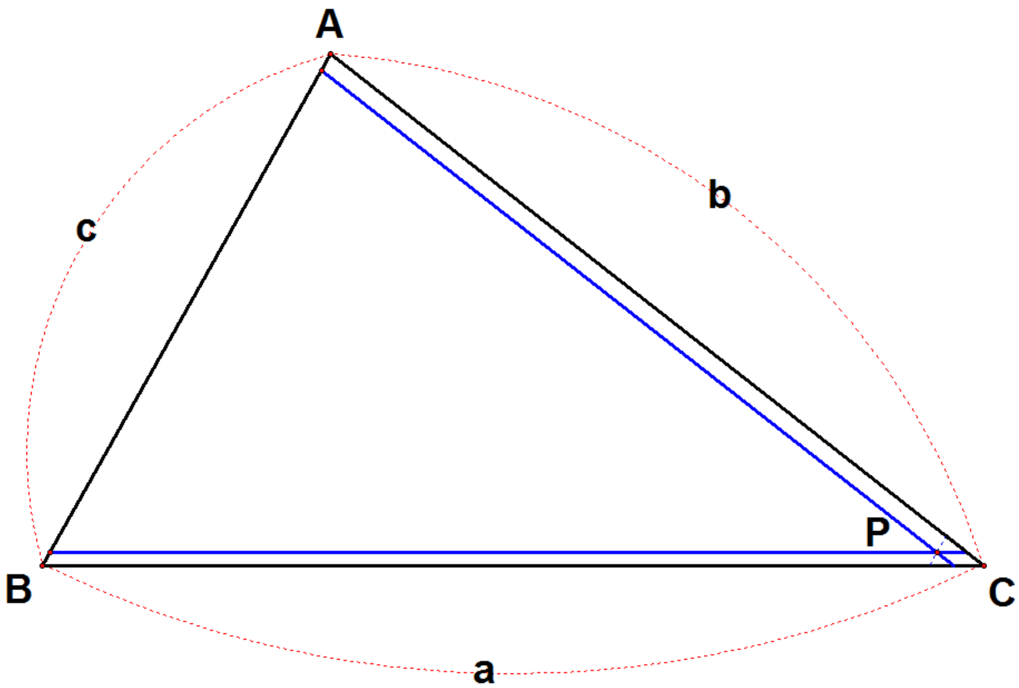
本問題轉成：當 $0<x<1$ 、$0<y<1$ 且 $0<x+y<1$ 時

探討：$a+c+(b-c)x-(a-b)y$ 的最大值與最小值。

討論後得知：

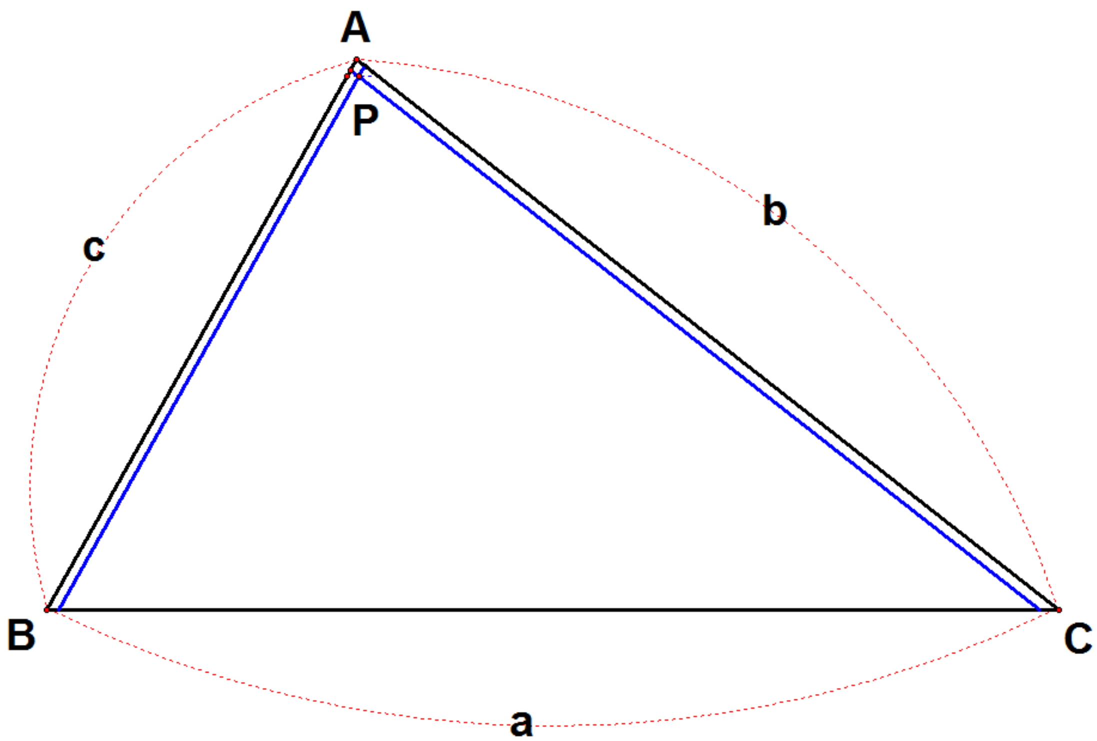
1.當 $x\to 1$ 、$y\to 0$ 、$z\to 0$ 時

$a+c+(b-c)x-(a-b)y\to a+c+(b-c)=a+b$ 為最大值。



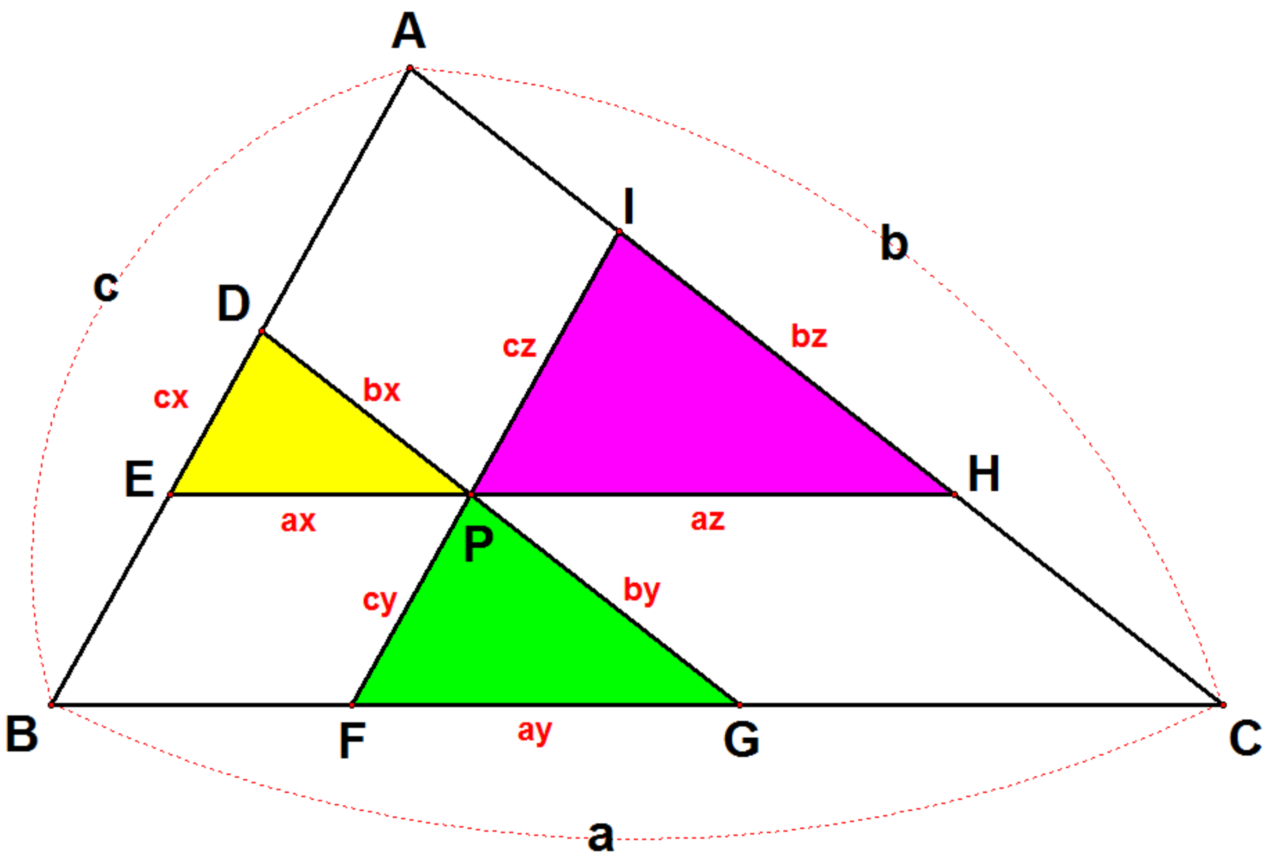

2.當 $x\to 0$ 、$y\to 1$ 、$z\to 0$ 時，

$a+c+(b-c)x-(a-b)y\to a+c-(a-b)=b+c$ 為最小值。




二、過任意三角形之內部一點 P，做三邊的平行線段，求內部三個子三角形面積和的最大值與最小值。

[說明]因為我們觀察到：當 P 點在三角形內部移動時，過 P 做三邊的平行線段後，原三角形中有三個子三角形，而這三個子三角形的面積也是在變動的，我們想知道：P 點必須在哪一個位置才可以使這三個子三角形的面積和達到最大或最小。




$\because \Delta DEP \sim \Delta ABC$ 且邊長比 $\overline{EP}:\overline{BC} = ax:(ax+ay+az) = ax:a(x+y+z) = x:1$

$\therefore \Delta DEP$面積 : $\Delta ABC$面積 $= x^2 : 1^2$

$\Rightarrow \Delta DEP$面積 $= x^2 \cdot \Delta ABC$面積

同理可得 $\Delta PFG$面積 $= y^2 \cdot \Delta ABC$面積 、

$\Delta IPH$面積 $= z^2 \cdot \Delta ABC$面積

$\Delta DEP$ 、$\Delta PFG$ 、$\Delta IPH$ 的面積和 $= (x^2+y^2+z^2)\cdot \Delta ABC$的面積

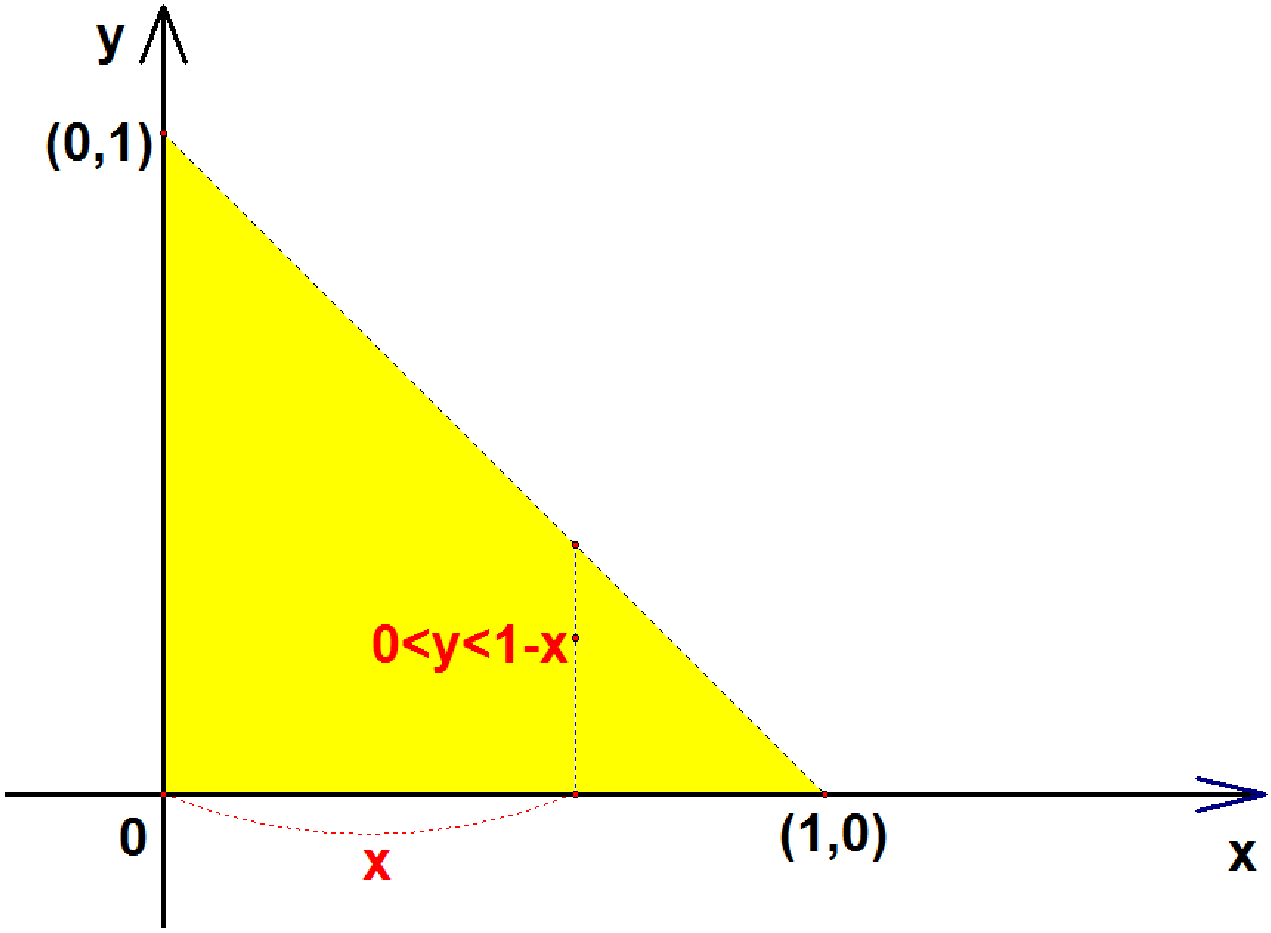
因為 $x+y+z=1$ ，令 $z = 1-x-y$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(1-x-y)^2 = x^2+y^2+1+x^2+y^2-2x-2y+2xy$

$= 2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$

故本題就是在下圖中的座標平面中的黃色區域(不含邊界)取一個點座標 $(x\ ,\ y)$

使 $2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$ 達到最大或最小




先將 x 視為 0 到 1 之間的一個定數，而 y 在 0 到(1－x)之間變動，

將原式改寫為 y 的二次函數：

$$2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$$

$$=2y^2+(2x-2)y+2x^2-2x+1$$

$$=2[y^2+(x-1)y+\frac{(x-1)^2}{4}]+2x^2-2x+1-\frac{(x-1)^2}{2}$$

$$=2(y+\frac{x-1}{2})^2+\frac{4x^2-4x+2-x^2+2x-1}{2}$$

$$=2(y+\frac{x-1}{2})^2+\frac{3x^2-2x+1}{2}$$

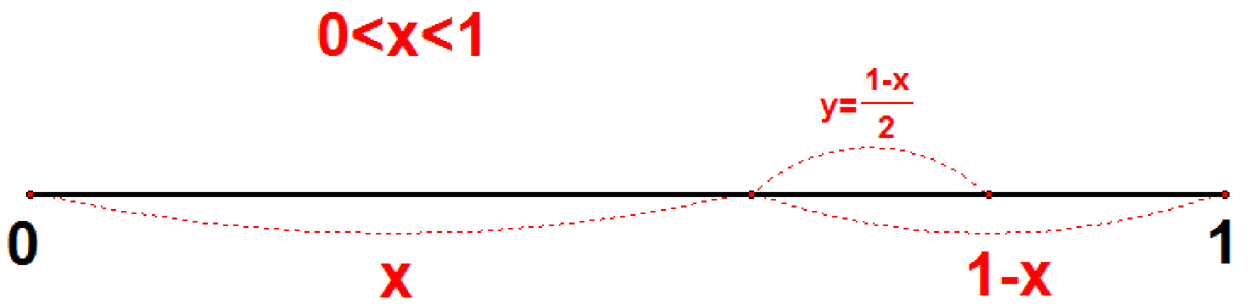
$$=2(y-\frac{1-x}{2})^2+\frac{3x^2-2x+1}{2}$$

$$=2(y-\frac{1-x}{2})^2+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$$

$$=2(y-\frac{1-x}{2})^2+\frac{3}{2}(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9})+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$$

$$=2(y-\frac{1-x}{2})^2+\frac{3}{2}(x-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}$$

故當 $y=\frac{1-x}{2}$ 時，原式有最小值 $\frac{3}{2}(x-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}$

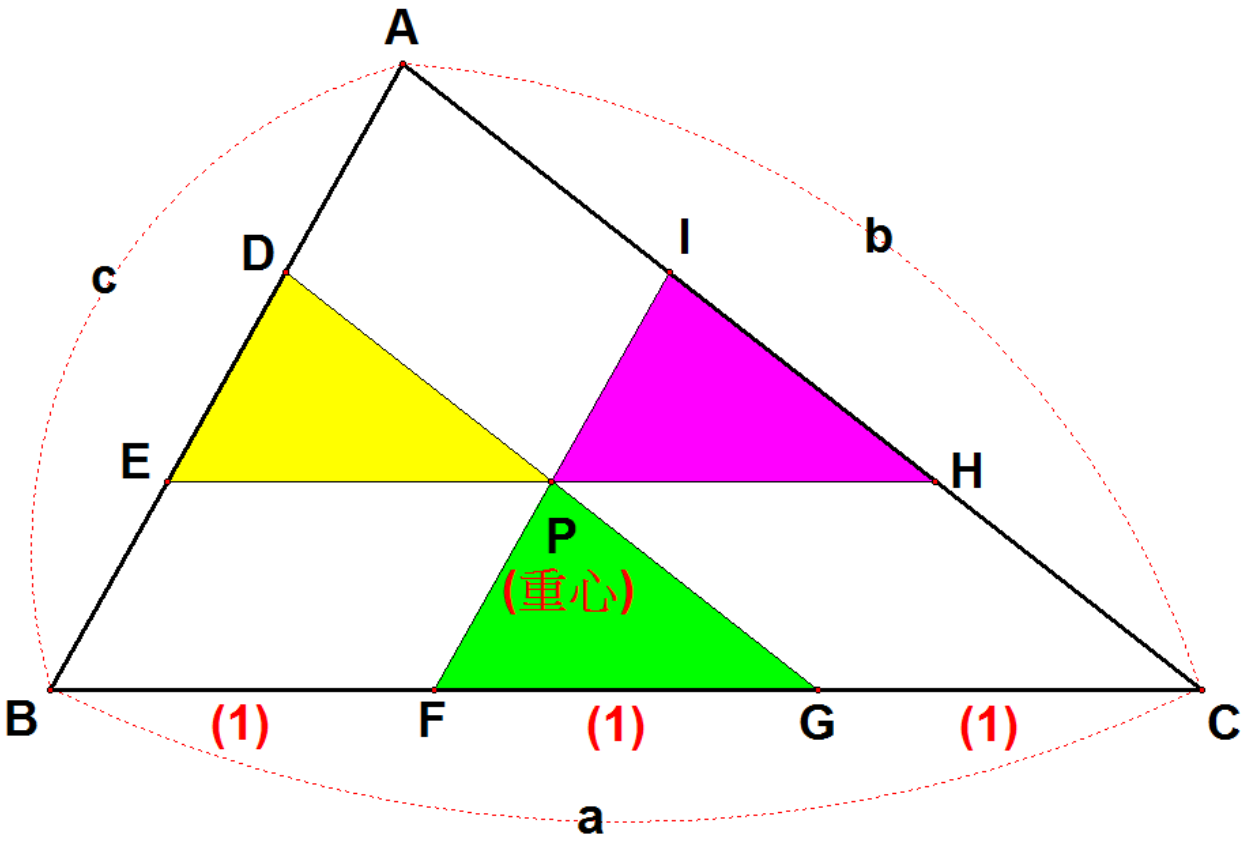



(一)令 $x=\frac{1}{3}$，可得 $y=\frac{1}{3}$、$z=\frac{1}{3}$

$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}$ 為最小值。

此時 P 點即為 $\Delta ABC$ 的重心。

而內部三個子三角形面積和 $\to \frac{1}{3}\Delta ABC$ 面積。




(二)當 $x\to 1$，$y\to 0$，$z\to 0$

則 $x^2+y^2+z^2\to 1$ 為最大值。

而內部三個子三角形面積和 $\to \Delta ABC$ 面積。

## 柒、參考資料：

一、胡炳生、胡禮祥著－一九七八~一九九零大陸地區數學競賽題解－九章出版社出版－民國 83 年版－第 194 頁。
二、洪有情主編－國中數學第四冊－民國 104 年 2 月再版－出版地：台灣－康軒文教事業出版－民國 104 年 2 月出版
三、洪有情主編－國中數學第五冊－民國 103 年 9 月再版－出版地：台灣－康軒文教事業出版－民國 103 年 9 月出版