作品名稱：同「周」共「積」

摘要：

我們從考卷上的一個碰巧答對的題目出發，探討：在不討論單位換算下，長方形的「周長」值等於「面積」值的條件及相關概念，得到這種長方形有無限多種，但是整數邊長的情況只有兩種。我們繼續研究三角形、圓、菱形、平行四邊形這些基本的幾何圖形其「周長」值等於「面積」值的條件。

壹、研究動機：

有一次在算一道數學題目的時候，我發現自己不小心把長方形的「周長」誤算成「面積」，但是後來發現算出的答案卻是對的，當時也不覺得怎樣，只是覺得運氣好，最近在找科展主題，我提出這個問題和同學及老師討論，同學也好奇竟然有這樣特殊性質的長方形，以及別的幾何圖形是不是也有相同的情況，老師也鼓勵我們不仿研究看看，於是我便和同學開始研究這個題目。

貳、研究目的：

一、在不討論單位換算下，長方形的「周長」值等於「面積」值的條件及尺規作圖。

二、在不討論單位換算下，三角形的「周長」值等於「面積」值的條件及尺規作圖。

(一)正三角形。(二)等腰三角形。(三)直角三角形。(四)一般三角形。

三、在不考慮單位換算下，圓「面積」與「周長」數值相等的條件。

四、在不考慮單位換算下，菱形「面積」與「周長」數值相等的條件。

五、在不考慮單位換算下，平行四邊形「面積」與「周長」數值相等的條件。

叁、研究器材與設備：圓規、尺、電腦、計算紙、GSP 繪圖軟體、excel 軟體。

肆、研究過程與方法：

一、在不討論單位換算下，長方形的「周長」值等於「面積」值的條件及尺規作圖。

一開始，我們還沒有什麼想法，只是用亂湊的方法，湊出了4×4和3×6這兩種答案，後來才開始進一步探討其理論。

在原問題中，我們可以假設矩形的長、寬分別為 x、y

∵面積值等於周長值

$\therefore xy=2x+2y$

$\Rightarrow xy-2y=2x$

$\Rightarrow (x-2)y=2x$

可知 x 必須大於 2

同理可知 y 也必須大於 2

於是將上式改寫為

$y=\dfrac{2x}{x-2}(x>2)$

討論 1：是否有解？

$\because y=\dfrac{2x}{x-2}$

∴只要令$x>2$的任意數代入，都可求出y值，而且當 x 值越大，y 值越接近 2。故有無限多組解。

討論 2：是否有整數解？有幾組整數解？

答：有 3 組。(x=3，y=6；x=4，y=4；x=6，y=3)

說明如下：

$\because y=\dfrac{2x}{x-2}$

$\therefore y=\dfrac{2x-4+4}{x-2}$

$\Rightarrow y=\dfrac{2(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{2(x-2)}{x-2}+\dfrac{4}{x-2}$

$\Rightarrow y=2+\dfrac{4}{x-2}$

若要使 y 為正整數，則必須使 $\dfrac{4}{x-2}$ 為正整數，

$\Rightarrow (x-2)$ 必是 4 的正因數

$\Rightarrow (x-2)$ 可能是 1、2、4

$\Rightarrow x$ 可能是 3、4、6

(1) $x=3, y=6$

(2) $x=4, y=4$

(3) $x=6, y=3$

但矩形只有兩種。

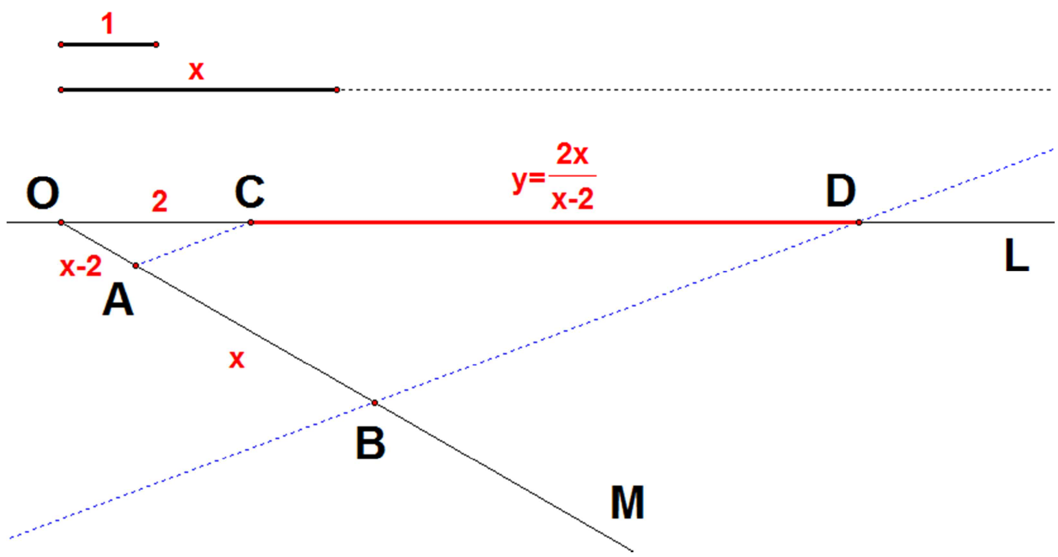
討論 3：是否可尺規作圖？

由 $y=\dfrac{2x}{x-2}(x>2)$，可看成 $y=\dfrac{2\times x}{x-2}$

故可尺規作圖。

<作法>：將矩形的長 x 視為已知長度，作出對應的 y 值，

1. 過 O 作兩相異直線 L 和 M
2. 在直線 M 上取 A、B 兩點，使 $\overline{OA}=x-2$ 、$\overline{AB}=x$
3. 在直線 L 上取 C 點，使 $\overline{OC}=2$
4. 連 $\overline{AC}$ 、過 B 作 $\overline{BD}//\overline{AC}$ 交直線 L 於 D
5. 則 $\overline{CD}=\dfrac{2\times x}{x-2}$ 。



二、在不討論單位換算下，三角形的「周長」值等於「面積」值的條件及尺規作圖。

（一）正三角形：

設邊長為 x

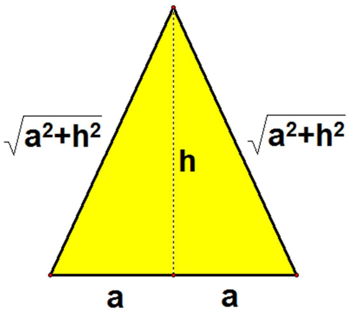
∵面積值等於周長值，

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 3x$$

$$x = 4\sqrt{3}$$

故三邊長為$4\sqrt{3}$、$4\sqrt{3}$、$4\sqrt{3}$

（二）等腰三角形：



設等腰三角形的底邊長為 2a，高為 h

∵面積值=周長值

$$\therefore \frac{1}{2}\times 2a\times h = 2a + 2\sqrt{a^2+h^2}$$

$$\Rightarrow ah - 2a = 2\sqrt{a^2+h^2}$$ ，可知$h>2$

$$\Rightarrow (ah-2a)^2 = (2\sqrt{a^2+h^2})^2$$

$$\Rightarrow a^2h^2 - 4a^2h + 4a^2 = 4a^2 + 4h^2$$

$$\Rightarrow a^2h^2 - 4a^2h - 4h^2 = 0$$

同除以 h：

$$\Rightarrow a^2h - 4a^2 - 4h = 0$$

$$\Rightarrow (a^2-4)h = 4a^2$$

由上式可知，a 必須大於 2 才行，可得

$$h = \frac{4a^2}{a^2-4}(a>2)$$ ，可知$h>4$

將$h = \frac{4a^2}{a^2-4}$代入$\sqrt{a^2+h^2}$求腰長

$$\sqrt{a^2+h^2} = \sqrt{a^2+(\frac{4a^2}{a^2-4})^2} = \sqrt{\frac{a^2(a^2-4)^2+16a^4}{(a^2-4)^2}} = \sqrt{\frac{a^2[(a^2-4)^2+16a^2]}{(a^2-4)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2\cdot(a^2+4)^2}{(a^2-4)^2}} = \frac{a(a^2+4)}{a^2-4}$$

所以腰長為$\frac{a(a^2+4)}{a^2-4} = \frac{a^3+4a}{a^2-4}$

討論 1：是否有三邊都是整數且面積值=周長值的等腰三角形?是有限種嗎?

欲使底長 $2a$ 為正整數，可令 $a=\frac{1}{2}x$，x 為正整數即可

但由上面的式子知道 $a>2$，故 $x>4$

將 $a=\frac{1}{2}x$ 代入腰長 $\frac{a^3+4a}{a^2-4}$ 中，得

$$\frac{a^3+4a}{a^2-4}=\frac{\frac{1}{8}x^3+2x}{\frac{1}{4}x^2-4}=\frac{x^3+16x}{2x^2-32}$$

若 $\frac{x^3+16x}{2x^2-32}$ 為正整數

則 $2\times\frac{x^3+16x}{2x^2-32}$ 為正整數

$\Rightarrow\frac{2x^3+32x}{2x^2-32}$ 為正整數

$\Rightarrow x+\frac{64x}{2x^2-32}$ 為正整數，則必須 $64x\geq 2x^2-32$

$2x^2-64x-32\leq 0\Rightarrow x^2-32x-16\leq 0\Rightarrow x^2-32x\leq 16$

$\Rightarrow x^2-32x+16^2\leq 16+16^2\Rightarrow (x-16)^2\leq 272$

$x = 5, 6, 7, 8, \ldots\ldots, 32$ （可能值），只要檢驗這些值即可。

以下是驗證過程：

底長 x	腰長：$\frac{x^3+16x}{2x^2-32}$
5	11.38888889
6	7.8
7	6.893939394
8	6.666666667
9	6.715384615
10	6.904761905
11	7.176190476
12	7.5
13	7.859477124
14	8.244444444
15	8.648325359
16	9.066666667
17	9.496336996
18	9.935064935
19	10.38115942
20	10.83333333
21	11.29058824

22	11.75213675
23	12.21734893
24	12.68571429
25	13.15681445
26	13.63030303
27	14.1058906
28	14.58333333
29	15.06242424
30	15.54298643
31	16.02486772
32	16.50793651

由上表可知：不存在三邊都是整數且面積值=周長值的等腰三角形。

討論 2：是否可尺規作圖？

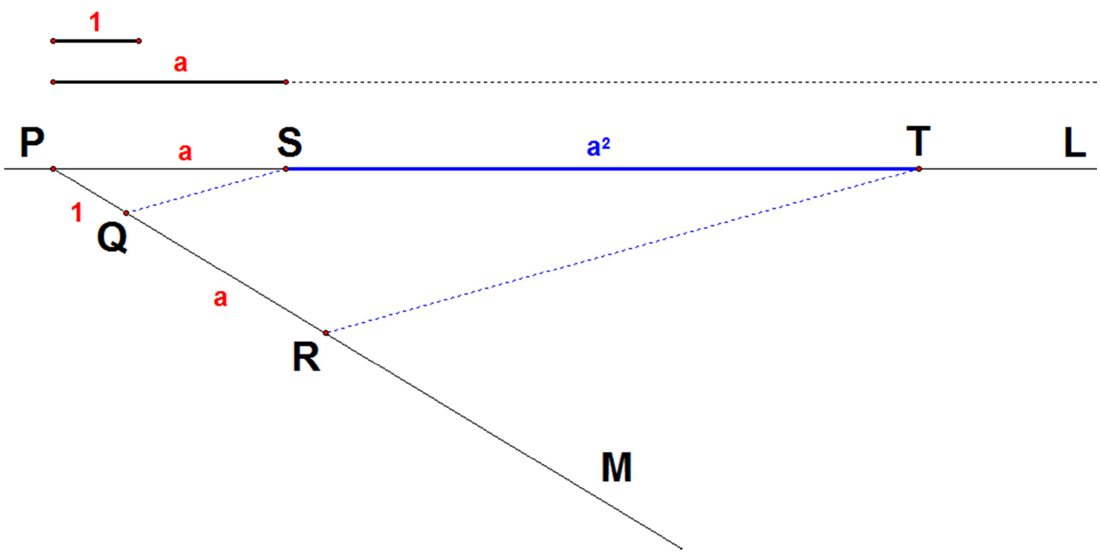
在設定底邊長為 2a 時，

其高為 $h=\dfrac{4a^2}{a^2-4}$ $(其中a>2)$

<作法>：將底邊 2a 中的 a 視為已知長度，作出對應的高 h，

先作出 a^2：

1. 過 P 作兩相異直線 L 和 M
2. 在直線 M 上取 Q、R 兩點，使 $\overline{PQ}=1$ 、$\overline{QR}=a$
3. 在直線 L 上取 S 點，使 $\overline{PS}=a$
4. 連 $\overline{QS}$ 、過 R 作 $\overline{RT}\,//\,\overline{QS}$ 交直線 L 於 T
5. 則 $\overline{ST}=a^2$ 。



再作 $h=\dfrac{4a^2}{a^2-4}$

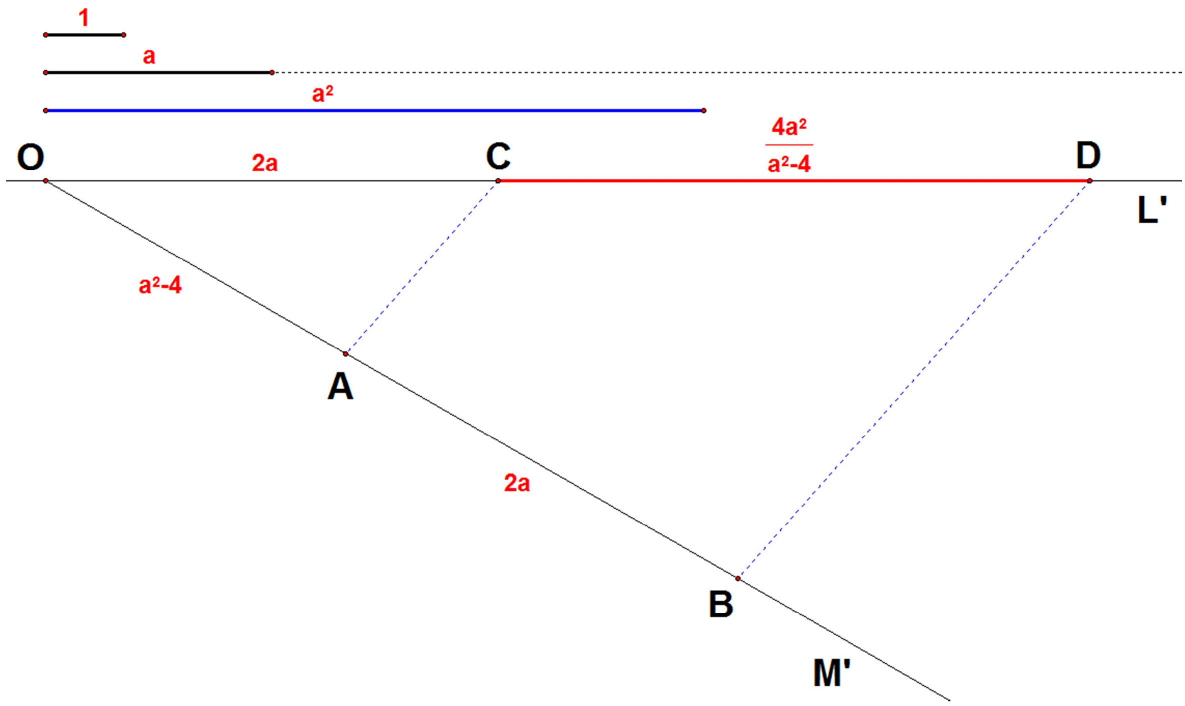
6. 另過 O 作兩相異直線 L’ 和 M’

7. 在直線 M’ 上取 A、B 兩點，使 $\overline{OA}=a^2-4$ 、$\overline{AB}=2a$

8. 在直線 L’ 上取 C 點，使 $\overline{OC}=2a$

9. 連 $\overline{AC}$ 、過 B 作 $\overline{BD}//\overline{AC}$ 交直線 L’ 於 D

10. 則 $\overline{CD}=\dfrac{4a^2}{a^2-4}$ 。



故知只要給定底邊長為 $2a$ $(a>2)$，就可作出其對應的高而作出此等腰三角形。

(三)直角三角形：

我們已知很多整數邊長的直角 Δ

如：三邊長分別為 3、4、5；6、8、10；5、12、13；8、15、17；7、24、25 等，其中有 6、8、10；5、12、13 這兩組符合「面積值=周長值」

($\because \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24=6+8+10$ ；$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30=5+12+13$)

1. 討論邊長比為 3：4：5 的直角 Δ

   設邊長分別為 3x、4x、5x($x>0$)

   可列式為 $\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 4x=3x+4x+5x \Rightarrow x=2$

   故三邊長為 6、8、10(整數邊長)

2. 邊長比為 5：12：13 的直角 Δ

   設邊長分別為 5x、12x、13x($x>0$)

   $\frac{1}{2}\cdot 5x\cdot 12x=5x+12x+13x \Rightarrow x=1$

   故三邊長為 5、12、13(整數邊長)

3. 邊長比為 8：15：17 的直角Δ

設邊長分別為 8x、15x、17x($x>0$)

$\frac{1}{2}\cdot 8x\cdot 15x=8x+15x+17x$

$\Rightarrow 60x=40\Rightarrow x=\frac{2}{3}$

故三邊長為$\frac{16}{3}$、10、$\frac{34}{3}$

4. 邊長比為 7：24：25 的直角Δ

設邊長分別為 7x、24x、25x($x>0$)

$\frac{1}{2}\cdot 7x\cdot 24x=7x+24x+25x$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3}$

故三邊長為$\frac{14}{3}$、16、$\frac{50}{3}$

5. 角度為30°、60°、90°的直角Δ：

設三邊長為 1x、$\sqrt{3}x$、2x($x>0$)

$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{3}x=x+\sqrt{3}x+2x$

$x=2\sqrt{3}+2$

故三邊長為$2\sqrt{3}+2$、$6+2\sqrt{3}$、$4\sqrt{3}+4$

6. 角度為45°、45°、90°的直角Δ：

設三邊長為 x、x、$\sqrt{2}x$($x>0$)

$\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=x+x+\sqrt{2}x$

$\Rightarrow x=4+2\sqrt{2}$

故三邊長為$4+2\sqrt{2}$、$4+2\sqrt{2}$、$4\sqrt{2}+4$

7. 探討：一般的直角三角形

設直角Δ的兩股分別為 a、b，斜邊為 c，所以$c=\sqrt{a^2+b^2}$

∵面積值=周長值

$\therefore \frac{1}{2}ab=a+b+c=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$

$\times 2\Rightarrow ab=2a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow ab-2a-2b=2\sqrt{a^2+b^2}$

兩邊平方：

$\Rightarrow (ab-2a-2b)^2=(2\sqrt{a^2+b^2})^2$

$\Rightarrow a^2b^2+4a^2+4b^2-4a^2b-4ab^2+8ab=4a^2+4b^2$

$\Rightarrow a^2b^2-4a^2b-4ab^2+8ab=0$

$\div ab\Rightarrow ab-4a-4b+8=0$

將a視為已知數：

$\Rightarrow (a-4)b = 4a-8 = 4(a-2)$

由上式可知 $a \neq 2$ 且 $a \neq 4$

$\Rightarrow b = \dfrac{4(a-2)}{(a-4)}$

$\because b > 0$ ，

$\therefore b = \dfrac{4(a-2)}{(a-4)} > 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) > 0$

$a > 4$ 或 $0 < a < 2$

但 $0 < a < 2$ 時，會使原式 $ab - 2a - 2b = 2\sqrt{a^2+b^2}$ 不合理

故只能 $a > 4$

討論(1)：三邊都是整數且面積值=周長值的直角三角形有哪些?是有限種嗎?

由上面過程知道，當設定一股長為 a 時($a > 4$)，

另一股長 $b = \dfrac{4(a-2)}{(a-4)} = \dfrac{4a-8}{(a-4)} = \dfrac{4(a-4)+8}{(a-4)} = 4 + \dfrac{8}{a-4}$

若要使 b 為正整數，則 $a-4$ 必須是 8 的正因數

$\Rightarrow a-4$ 可能是 1、2、4、8

$\Rightarrow a$ 可能是 5、6、8、12

(A) $a = 5$ ，$b = 12$ ，斜邊 $\sqrt{a^2+b^2} = 13$

(B) $a = 6$ ，$b = 8$ ，斜邊 $\sqrt{a^2+b^2} = 10$

(C) $a = 8$ ，$b = 6$ ，斜邊 $\sqrt{a^2+b^2} = 10$

(D) $a = 12$ ，$b = 5$ ，斜邊 $\sqrt{a^2+b^2} = 13$

故三邊都是整數且面積值=周長值的直角三角形只有 2 種，

即邊長分別是 6、8、10 和 5、12、13。

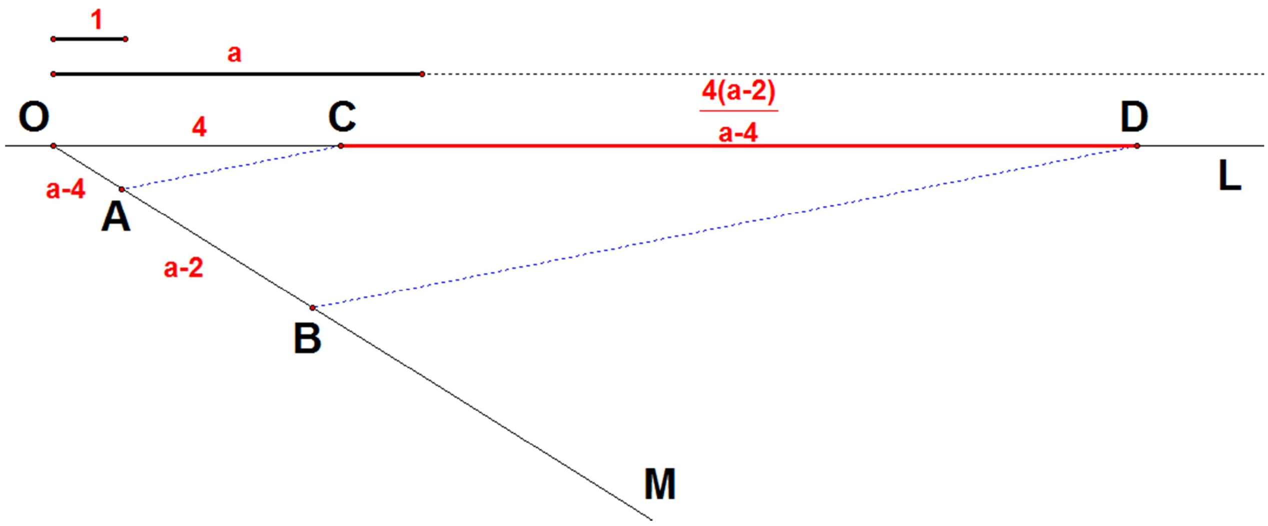
討論(2)：可否利用尺規作圖做出面積值=周長值的直角三角形?

在給定一股長為 a 時($a>4$)

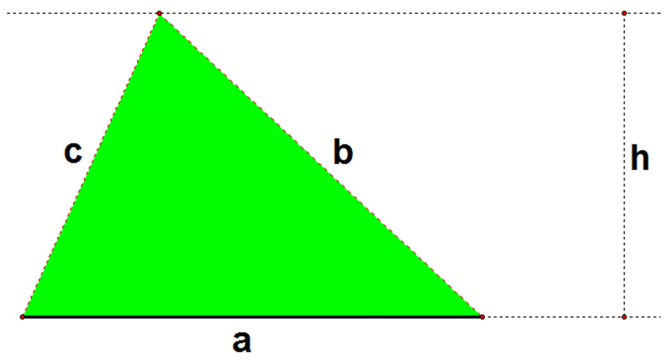
則另一股長為 $b=\dfrac{4\cdot(a-2)}{(a-4)}$

<作法>：將一股 a 視為已知長度，作出對應的另一股，

1. 過 O 作兩相異直線 L 和 M
2. 在直線 M 上取 A、B 兩點，使 $\overline{OA}=a-4$ 、$\overline{AB}=a-2$
3. 在直線 L 上取 C 點，使 $\overline{OC}=4$
4. 連 $\overline{AC}$ 、過 B 作 $\overline{BD}//\overline{AC}$ 交直線 L 於 D
5. 則 $\overline{CD}=\dfrac{4\cdot(a-2)}{(a-4)}=b$ 。



(四)一般三角形：



設三角形的三邊長為 a、b、c，a 上的高為 h

可列式為 $\frac{1}{2}a\cdot h=a+b+c$

$\Rightarrow ah=2a+2b+2c$

$\Rightarrow ah-2a=2b+2c$

$\Rightarrow a(h-2)=2b+2c=2(b+c)$

$\Rightarrow 2(b+c)=a(h-2)$

可知 h 必須大於 2(單位)

$\Rightarrow b+c=\dfrac{a(h-2)}{2}$

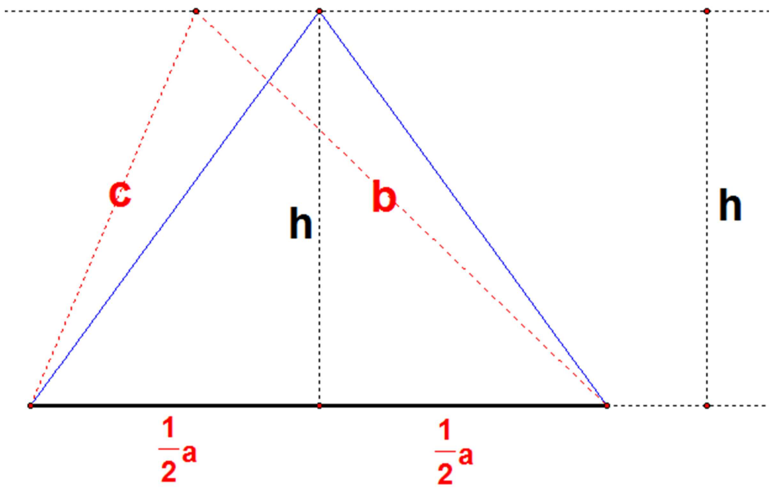
∵三角形之兩邊和＞第三邊

$\therefore b+c=\dfrac{a(h-2)}{2}>a \Rightarrow h>4$

故 h 必須大於 4 才可能有解

討論：三角形的存在性及尺規作圖。

參考下圖，



$$b+c=\frac{a(h-2)}{2}>2\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+h^2}$$

$$a(h-2)>4\sqrt{\frac{1}{4}a^2+h^2}=\sqrt{4a^2+16h^2}$$

$$[a(h-2)]^2>(\sqrt{4a^2+16h^2})^2$$

$$a^2\cdot(h^2-4h+4)>4a^2+16h^2$$

$$a^2h^2-4a^2h+4a^2>4a^2+16h^2$$

$$a^2h^2-4a^2h-16h^2>0$$

$$\div h \Rightarrow a^2h-4a^2-16h>0$$

$$\Rightarrow (h-4)a^2>16h$$

$$\Rightarrow a^2>\frac{16h}{h-4}$$

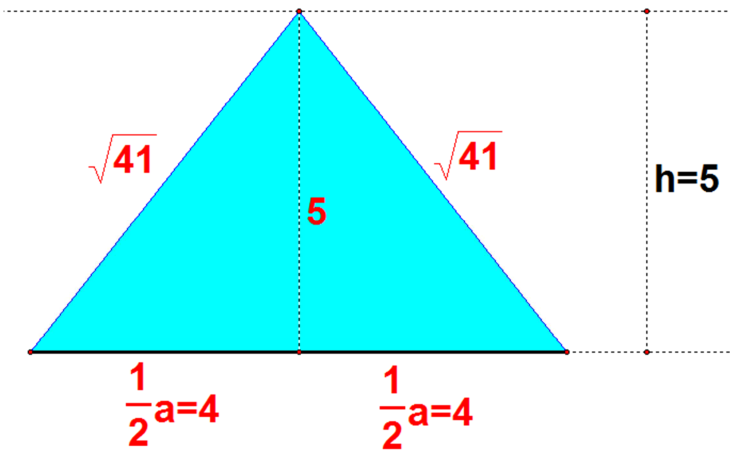
1. 以 $a=8$、$h=5$ 為例，(參考下圖)

由前面推導可求出 $b+c=\dfrac{a(h-2)}{2}=12$

可是 $2\sqrt{4^2+5^2}=2\sqrt{41}>12$

故本題不可解。

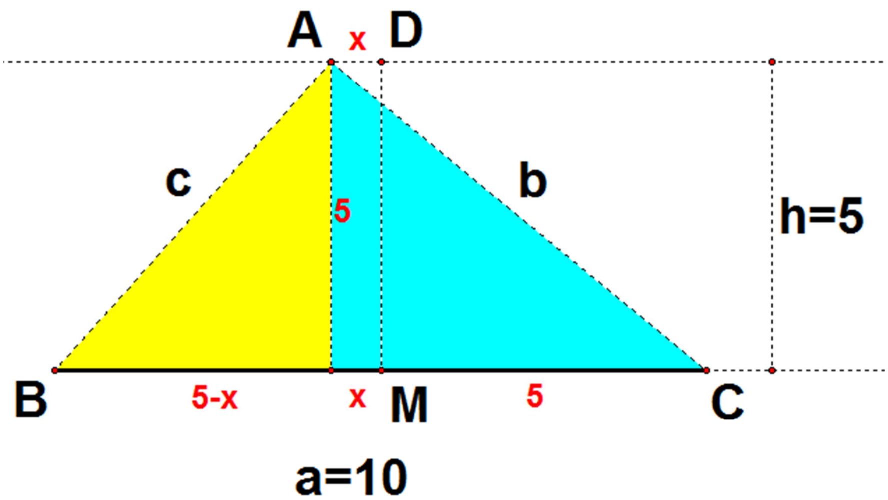
另外∵ $a^2=64$，而 $\dfrac{16h}{h-4}=80$，不符合 $a^2>\dfrac{16h}{h-4}$ 的條件。



2. 但是若 $a=10$、$h=5$，

其 $a^2=100$，$\dfrac{16h}{h-4}=80$，符合 $a^2>\dfrac{16h}{h-4}$ 的條件，故有解。

此三角形的求法如下：參考下圖



根據前面的推導得 $b+c=15$

設過 A 作 $\overline{BC}$ 的平行線交 $\overline{BC}$ 的中垂線於 D(M 是 $\overline{BC}$ 的中點)

假設 $\overline{AD}=x$

$\because b+c=15$

$\therefore \sqrt{(5-x)^2+5^2}+\sqrt{(5+x)^2+5^2}=15$

兩邊平方：$(5-x)^2+5^2+2\sqrt{(5-x)^2+5^2}\cdot\sqrt{(5+x)^2+5^2}+(5+x)^2+5^2=225$

$25-10x+x^2+25+2\sqrt{x^2+50-10x}\cdot\sqrt{x^2+50+10x}+25+10x+x^2+25=225$

$$2\sqrt{x^2+50-10x}\cdot\sqrt{x^2+50+10x}=125-2x^2$$

$$\sqrt{x^2+50-10x}\cdot\sqrt{x^2+50+10x}=\frac{125}{2}-x^2$$

兩邊平方：$(x^2+50)^2-(10x)^2=(\frac{125}{2}-x^2)^2$

$$x^4+100x^2+2500-100x^2=(\frac{125}{2})^2-125x^2+x^4$$

$$125x^2=(\frac{125}{2})^2-2500$$

$$x^2=\frac{125}{4}-20=\frac{45}{4}$$

$x=\pm\sqrt{\frac{45}{4}}=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$（取正）

一般情況下，可利用 a^2 是否大於 $\frac{16h^2}{h-4}$ 判斷是否有解。

三、在不考慮單位換算下，圓「面積」與「周長」數值相等的條件:

設圓的半徑為 r

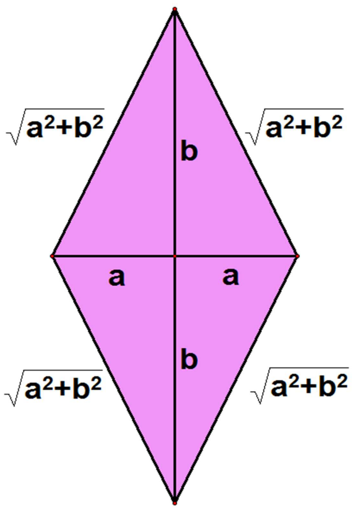
∵圓面積數值=圓周長數值

∴$\pi \cdot r^2 = 2\cdot \pi \cdot r$

$\Rightarrow r = 2$

故當圓半徑為 2 時，圓面積與圓周長數值相等。(這種圓是唯一的。)

四、在不考慮單位換算下，菱形「面積」與「周長」數值相等的條件:



設菱形的兩對角線分別為 2a、2b（a、b>0）

我們利用 a 求出 b ：

∵面積值=周長值　　∴$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b = 4\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow ab = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

兩邊平方：$(ab)^2 = (2\sqrt{a^2 + b^2})^2$

$\Rightarrow a^2b^2 = 4a^2 + 4b^2$

$\Rightarrow a^2b^2 - 4b^2 = 4a^2$

$\Rightarrow (a^2 - 4)b^2 = 4a^2$

可知 a 必須大於 2(單位)，同理可知 b 也必須大於 2(單位)

$\Rightarrow b^2 = \dfrac{4a^2}{a^2 - 4}$

$b = \pm\sqrt{\dfrac{4a^2}{a^2 - 4}} = \pm\dfrac{2a}{\sqrt{a^2 - 4}}$（取正）

$\therefore b = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2 - 4}}$

代入計算菱形的邊長 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{a^2 - 4}} = \sqrt{\dfrac{a^2(a^2 - 4) + 4a^2}{a^2 - 4}}$

$= \sqrt{\dfrac{a^4 - 4a^2 + 4a^2}{a^2 - 4}} = \sqrt{\dfrac{a^4}{a^2 - 4}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - 4}}$

討論：是否可尺規作圖？

已知菱形的一對角線長為$2a$（$a>2$）時，

則另一對角線長為$2b$，$b=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-4}}=\dfrac{2\cdot a}{\sqrt{(a+2)(a-2)}}$

將 2a 視為已知長度，作出對應的 2b，

第一步：先作$\sqrt{(a+2)(a-2)}$

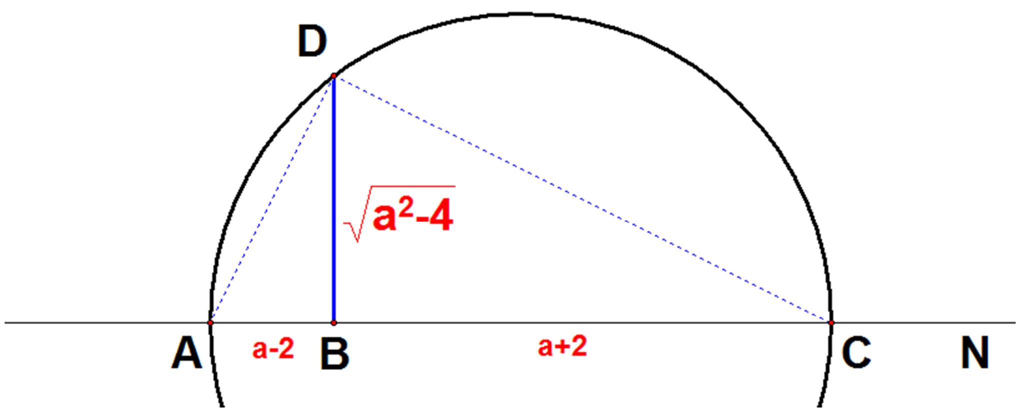
<作法>：

1. 作一直線 N

2. 在直線 N 上取 A、B、C 三點，使$\overline{AB}=a-2$ 、$\overline{BC}=a+2$

3. 以$\overline{AC}$為直徑作半圓，過 B 作$\overline{BD}\perp N$且交半圓於 D

4. 則$\overline{BD}=\sqrt{(a+2)(a-2)}=\sqrt{a^2-4}$



第二步：再作$\dfrac{2\cdot a}{\sqrt{a^2-4}}$

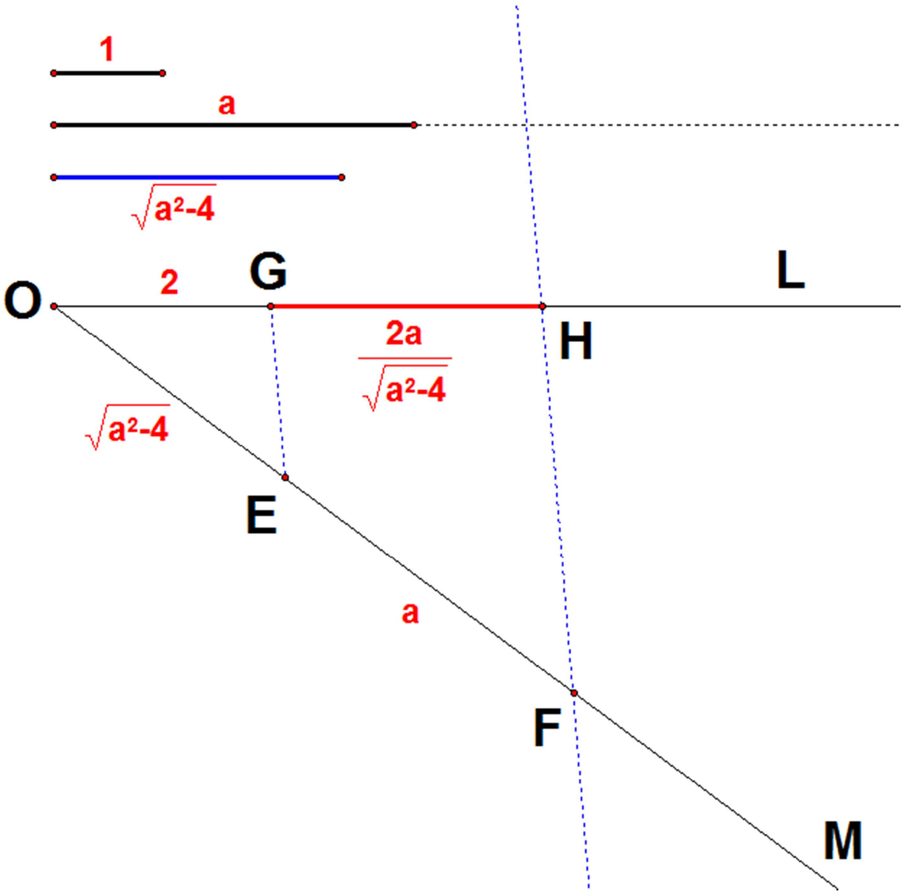
5. 另過 O 作兩相異直線 L 和 M

6. 在直線 M 上取 E、F 兩點，使$\overline{OE}=\sqrt{a^2-4}$ 、$\overline{EF}=a$

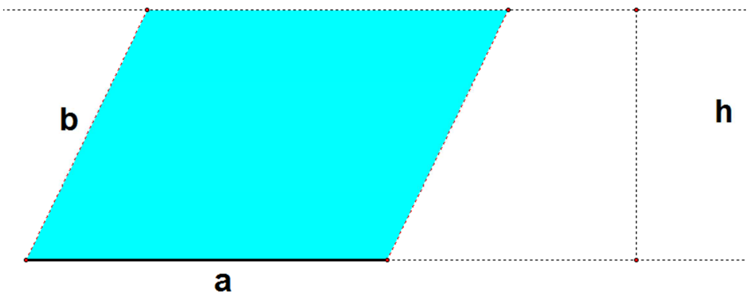
7. 在直線 L 上取 G 點，使$\overline{OG}=2$

8. 連$\overline{EG}$ 、過 F 作$\overline{FH}//\overline{EG}$交直線 L 於 H

9. 則$\overline{GH}=\dfrac{2\cdot a}{\sqrt{a^2-4}}=b$ 。



五、在不考慮單位換算下，平行四邊形「面積」與「周長」數值相等的條件:



設平行四邊形的兩鄰邊為 a、b，所夾的銳角為θ

$\because$面積值=周長值

$\therefore ab\sin\theta = 2a+2b$

$\Rightarrow \sin\theta = \dfrac{2a+2b}{ab}$

$\because \sin\theta < 1$

$\therefore \dfrac{2a+2b}{ab} < 1$

$\Rightarrow 2a+2b < ab$

$\Rightarrow ab-2a > 2b$且$ab-2b > 2a$

$\Rightarrow (b-2)a > 2b$且$(a-2)b > 2a$

$\Rightarrow b > 2$且$a > 2$

討論：是否可尺規作圖？

在給定 a、b 都大於 2 且 $ab > 2a + 2b$ 時，a、b 所夾的銳角 θ 為的作法如下：

<作法>：

第一步：先作 ab

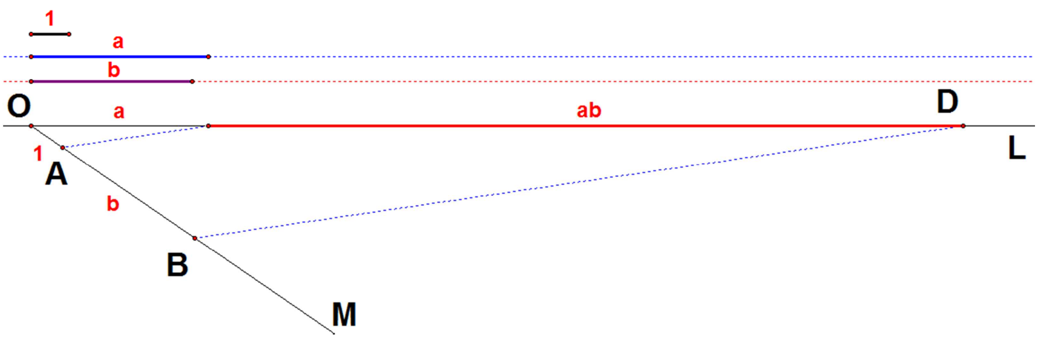
1. 過 O 作兩相異直線 L 和 M

2. 在直線 M 上取 A、B 兩點，使 $\overline{OA} = 1$ 、 $\overline{AB} = b$

3. 在直線 L 上取 C 點，使 $\overline{OC} = a$

4. 連 $\overline{AC}$ 、過 B 作 $\overline{BD} // \overline{AC}$ 交直線 L 於 D

5. 則 $\overline{CD} = ab$ 。

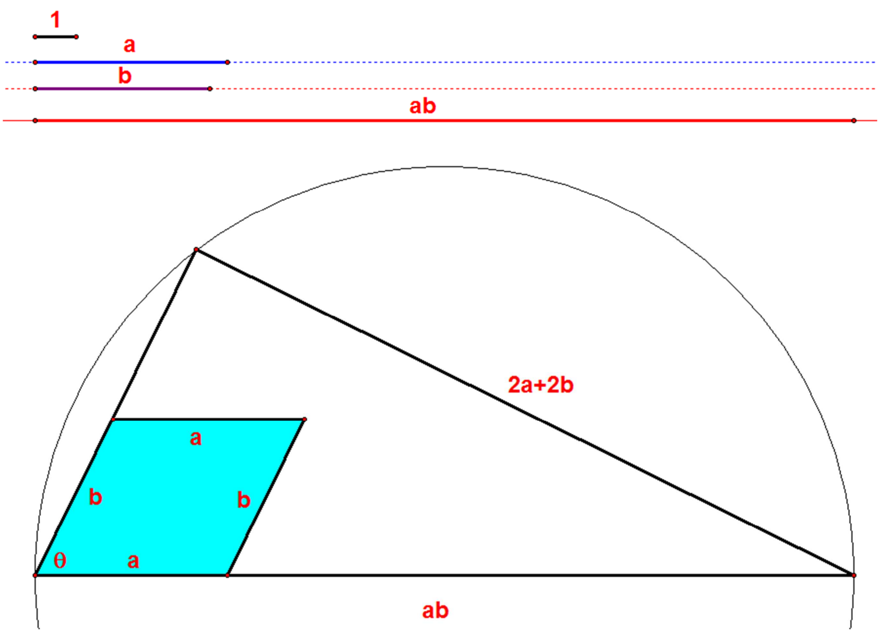


第二步：作一直角三角形使斜邊為 ab ，一股為 $2(a+b)$ ，

則此股的對角就是 a、b 所夾的銳角 θ 。

第三步：在 θ 的兩夾邊，由頂點處開始各取 a、b 長，

則可作出兩鄰邊為 a、b，所夾的銳角為 θ 的平行四邊形。



伍、研究結果：

一、在不討論單位換算下，長方形的「周長」值等於「面積」值的條件及尺規作圖。

假設矩形的長、寬分別為 x、y

$$y=\frac{2x}{x-2}(x>2)$$

討論 1：是否有解？

只要令 $x>2$ 的任意數代入，都可求出 y 值，而且當 x 值越大，y 值越接近 2。

故有無限多組解。

討論 2：是否有整數解？有幾組整數解？

答：有 3 組。(x=3，y=6；x=4，y=4；x=6，y=3)

但矩形只有兩種。

討論 3：是否可尺規作圖？

由 $y=\frac{2x}{x-2}(x>2)$，可看成 $y=\frac{2\times x}{x-2}$

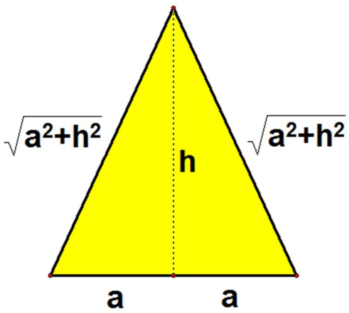
故可尺規作圖。

二、在不討論單位換算下，三角形的「周長」值等於「面積」值的條件及尺規作圖。

(一)正三角形：

三邊長為 $4\sqrt{3}$、$4\sqrt{3}$、$4\sqrt{3}$

(二)等腰三角形：



設等腰三角形的底邊長為 2a，高為 h

$$h=\frac{4a^2}{a^2-4}(a>2)$$

腰長為 $\frac{a(a^2+4)}{a^2-4}=\frac{a^3+4a}{a^2-4}$

討論 1：是否有三邊都是整數且面積值=周長值的等腰三角形?是有限種嗎?

不存在三邊都是整數且面積值=周長值的等腰三角形。

討論 2：是否可尺規作圖？

在設定底邊長為 2a 時，

其高為 $h=\frac{4a^2}{a^2-4}$ (其中 $a>2$)

將底邊 2a 中的 a 視為已知長度，可作出對應的高 h，

故只要給定底邊長為 $2a$ $(a>2)$，就可作出其對應的高而作出此等腰三角形。

(三)直角三角形：

設直角 Δ 的兩股分別為 a、b，斜邊為 c，

$$\Rightarrow b=\frac{4(a-2)}{(a-4)}\quad , a>4$$

討論(1)：三邊都是整數且面積值=周長值的直角三角形有哪些?是有限種嗎?

故三邊都是整數且面積值=周長值的直角三角形只有 2 種，

即邊長分別是 6、8、10 和 5、12、13。

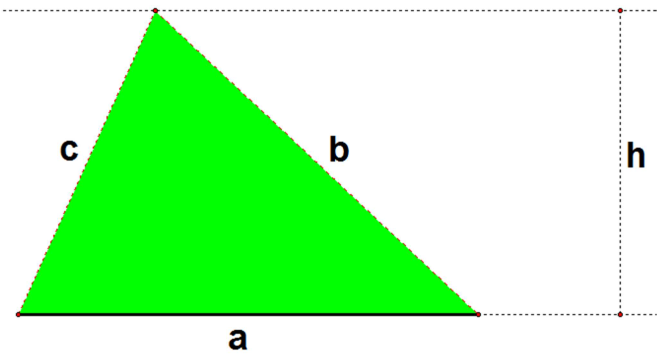
討論(2)：可否利用尺規作圖做出面積值=周長值的直角三角形?

在給定一股長為 a 時($a>4$)

則另一股長為 $b=\dfrac{4\cdot(a-2)}{(a-4)}$

將一股 a 視為已知長度，作出對應的另一股，

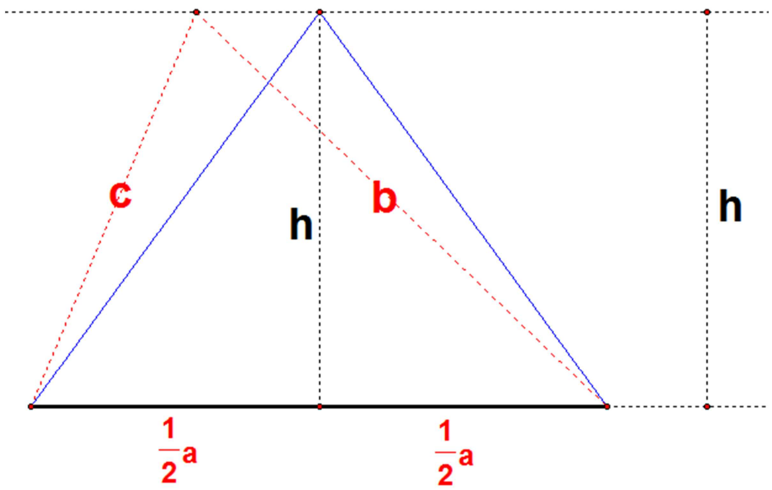
(四)一般三角形：



設三角形的三邊長為 a、b、c，a 上的高為 h

$b+c=\dfrac{a(h-2)}{2}>a\Rightarrow h>4$

討論：三角形的存在性及尺規作圖。



有解的條件： $a^2>\dfrac{16h}{h-4}$

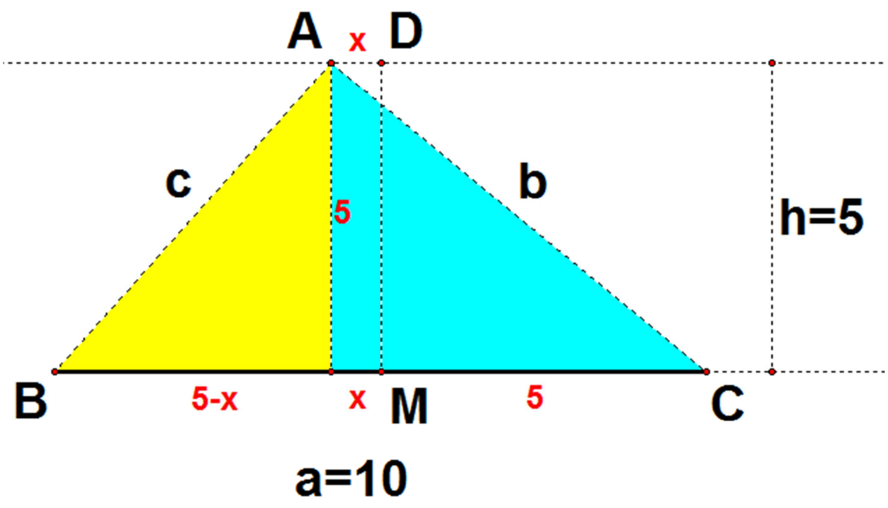
1. 以 $a=8$ 、 $h=5$ 為例，本題不可解。

   不符合 $a^2>\dfrac{16h}{h-4}$ 的條件。

2. 但是若 $a=10$ 、 $h=5$ ，

   其 $a^2=100$ ， $\dfrac{16h}{h-4}=80$ ， 符合 $a^2>\dfrac{16h}{h-4}$ 的條件，故有解。

此三角形的求法如下：



根據前面的推導得 $b+c=15$ （M 是 $\overline{BC}$ 的中點）

假設 $\overline{AD}=x$

$\because b+c=15$

$\therefore \sqrt{(5-x)^2+5^2}+\sqrt{(5+x)^2+5^2}=15$

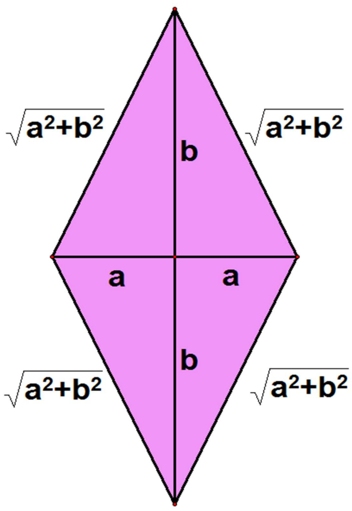
$x=\pm\sqrt{\dfrac{45}{4}}=\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$（取正）

一般情況下，可利用 a^2 是否大於 $\dfrac{16h^2}{h-4}$ 判斷是否有解。

三、在不考慮單位換算下，圓「面積」與「周長」數值相等的條件:

當圓半徑為 2 時，圓面積與圓周長數值相等。(這種圓是唯一的。)

四、在不考慮單位換算下，菱形「面積」與「周長」數值相等的條件:



設菱形的兩對角線分別為 2a、2b（a、b>0）

a 必須大於 2(單位) ，同理 b 也必須大於 2(單位)

$b=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-4}}$

菱形的邊長 $\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-4}}$

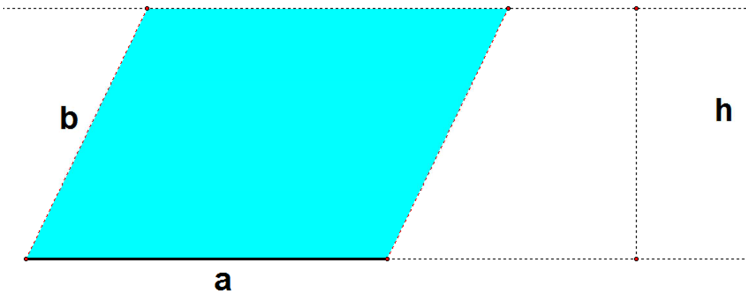
討論：是否可尺規作圖？

已知菱形的一對角線長為 $2a$（$a>2$）時，

則另一對角線長為 $2b$ ，$b=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-4}}=\dfrac{2\cdot a}{\sqrt{(a+2)(a-2)}}$

將 2a 視為已知長度，可作出對應的 2b，

五、在不考慮單位換算下，平行四邊形「面積」與「周長」數值相等的條件:



設平行四邊形的兩鄰邊為 a、b，所夾的銳角為 θ

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{2a+2b}{ab}$

討論：是否可尺規作圖？

在給定 a、b 都大於 2 且 $ab>2a+2b$ 時，

可作出 a、b 所夾的銳角 θ ，並進而作出平行四邊形。

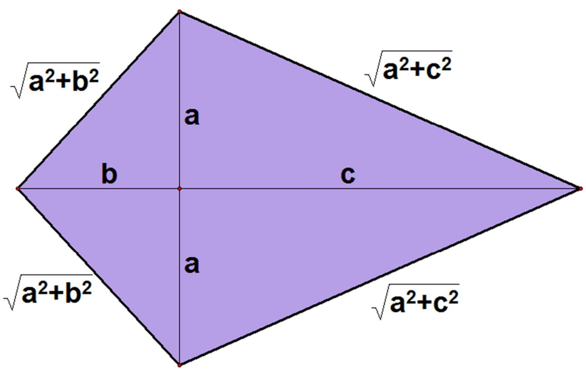
陸、研究討論與展望：

我們將下列問題列為我們進一步研究的課題：在不討論單位換算下，

一、長方形的「周長」值等於 k 倍「面積」值的條件及尺規作圖。（$k>1$）

二、長方形的「周長」值等於 $\dfrac{1}{k}$ 倍「面積」值的條件及尺規作圖。（$k>1$）

三、箏形「面積」與「周長」數值相等的條件。



可列式為 $\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot(b+c)=2\sqrt{a^2+b^2}+2\sqrt{a^2+c^2}$

$$\Rightarrow a(b+c)=2\sqrt{a^2+b^2}+2\sqrt{a^2+c^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}=\frac{a(b+c)}{2}$$

令$\sqrt{a^2+b^2}=\ell_1$、$\sqrt{a^2+c^2}=\ell_2$

$$\Rightarrow \ell_1+\ell_2=\frac{a(b+c)}{2}$$

∵三角形兩邊和大於第三邊

$$\because l_1+l_2=\frac{a\cdot(b+c)}{2}>b+c$$

$$\Rightarrow a>2$$

因為變數太多，目前只能研究到此。

柒、參考資料：

1. 數學考卷。
2. 洪有情主編－國中數學第四冊－民國 105 年 2 月再版－出版地：台灣－康軒文教事業出版－民國 105 年 2 月出版。
3. 洪有情主編－國中數學第五冊－民國 105 年 9 月再版－出版地：台灣－康軒文教事業出版－民國 105 年 9 月出版。